A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1
$V = \{a, e, i, o, u\}$, $V = \{x | x \text{ es una vocal}\}$

1.2
{i, t, o}

1.3
{e, x, i, t, o, r, u, n}

1.4
{u, n}

1.5
{c, a, z}

1.6
{2, 4}, {1, 2, 3, 4, 5, 6}

1.7
{3, 4}, {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, {1, 2, 4, 5}

1.8
{2, 4}, {2, 4}, {2, 4}, {1, 2, 3, 4, 5, 6}, {1, 2, 3, 4, 5, 8, 9}, {2, 4, 6, 8, 9}

1.9
{a, b, c, d, e}, {a, b, c, d, e, f, g}, {a, e, d, f, g}, {a, e}, {d}, ∅.

1.10
a) finito
b) finito
c) infinito

1.14
a) A = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}
b) B = {verano, otoño, invierno, primavera}
c) C = {1, 3, 5, 7, 9}
d) D = {12, 14, 16, 18}
e) E = {1, 2, 3, 5, 7, 11, 13}

1.15
(V), (F), (V), (F),(V)

1.16
a) finito
b) unitario
c) infinito
d) vacio
e) vacio

1.17

Por extensión	En forma constructiva
A = {a, e, i, o, u}	A = {x|x es una vocal}
B = { 0, 2, 4, 6, 8}	B = {x|x es un número par menor que 10}
C = {c, o, n, j, u, n, t, o, s}	C = {x|x es una letra de la palabra conjuntos}
D = {1, 3, 5, 7, 9}	D = {x|x es un número impar menor que 10}
E = {b, c, d, f, g, h, j, …}	E = {x|x es una consonante}

1.18
{c, h, a, r, m, t}, {c, h, a, t, r, n}, {c, h, a, r, m, t, n}, {c, h, a}, {h, t}, {h, r}

1.19
a) 125
b) 25
c) 575

1.20
a) 4
b) 3
c) 2

1.21
a) 3
b) 6
c) 1

1.22
a) 2
b) 5
c) 2

1.23
18

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.24
a) 15
b) 41
c) 132
d) 321
e) 1002
f) 1234
g) 544
h) 833
i) 10545
j) 730604
k) 89736
l) 467985

1.25
a) 10
b) 9
c) 40

1.26
a) 590
b) 6

1.27
a) 28
b) 800

1.29
a) 3^{16}
b) 5^{24}
c) 8^{6}
d) 9^{6}
e) 2^{10}
f) 2
g) 2^{8}
h) 2^{12}
i) 2^{20}
j) 1
k) 3^{30}
l) 2^{12}

1.30
a) $1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$
b) $1\times10^5 + 2\times10^4 + 5\times10^3 + 3\times10^2 + 6\times10^1 + 8\times10^0$

1.31
a) 89
b) 1195
c) 206

1.40
a) 15,30; b) 7,14; c) 9,18, 3,12, , ,8

1.41
$2 \times 3 \times 7 \times 13$

1.42
$2^5 \times 3 \times 11$

1.43
$3 \times 7 \times 359$

1.44
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

1.45
$2^3 \times 3 \times 17^2$

1.46
$2^4 \times 3 \times 5^2$

1.47
24

1.48
mcd = 60

1.49
mcd = 30

1.50
mcd = 6

1.51
30 cm, 6 de 5 cm, 15 de 2 cm, 10 de 3 cm.

1.52
$\frac{63}{4}$

1.53
$\frac{6}{7}$

1.54
1

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.55
$\frac{36}{91}$

1.56
$\frac{15}{22}$

1.57
$\frac{3}{2}$

1.58
$-\frac{1}{3}$

1.59
16.667 km

1.60
5 m/s

1.61
33.33 m

1.62
25 s, 625 m, 375 m.

1.63
a) 1×10^{6};
b) 1×10^{-6}
c) 1×10^{-10}
d) 1×10^{9}
e) 1×10^{-3}
f) 1×10^{-6}

1.64
x^2

1.65
$x\sqrt[3]{x}$

1.66
$\sqrt[3]{2^2}$

1.67
$\sqrt{3}$

1.68
$18\sqrt{2}$

1.69
$5\sqrt{7}$

1.70
$-\sqrt{2}$

1.71
$2\sqrt[4]{5}$

1.72
$9\sqrt{3}$

1.73
$\sqrt{2}$

1.74
$30 - 5\sqrt{6}$

1.75
$2\sqrt{2} + 1$

1.76
$37 - 8\sqrt{21}$

1.77
1.0×10^{-47}

1.78
$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

1.79
$\frac{5\sqrt{3}}{4}$

1.80
$\frac{3\sqrt{2}}{7} + \frac{5}{7}$

1.81
$[2, 6]$

1.82
$[3, 7]$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.83
[–5, 3]

1.85
(–∞, –5] ∪ [1, +∞)

1.86
(–∞, –3] ∪ [7, +∞).
–
1.87
[-1, 2]

1.88
(-3,∞)

1.89
(-11/2,3)

1.90
[-6, 4]

1.91
(-∞,-1)∪(6,∞)

1.92
(-∞, 4)∪(4, ∞)

1.93
(-∞,-17] ∪ [-1,∞)

1.94
(-∞,5]

1.95
(-1/3, 2/3)

1.96
(-13/2, 7/2)

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1
a) 0, Im = –3, b) $-\frac{1}{3}$, Im= $-\frac{4}{3}$, c) $\sqrt{3}$, Im = 1,
b) d) –6, Im = 0, e) 5, Im = –1

2.2
a) $\sqrt{2}$, Im = 7, b) –1, Im = 0, c) 0, Im 3,
d) 2, Im = 2, e) $\frac{1}{3}$, Im = 4

2.3
a) 3, b) $\frac{\sqrt{17}}{3}$, c) 2, d) 6, e) $\sqrt{6}$

2.4
a) $3\sqrt{10}e^{-0.1024\pi i}$ b) $5.831e^{0.17202\pi i}$ c) $8.6023e^{0.30257\pi i}$
d) $1.118e^{1.6476\pi i}$ e) $8.9443e^{1.1476\pi i}$

2.7
a) I
b) $3+\sqrt{3}i$
c) $2-2i$

2.8
a) $e^{\frac{\pi}{2}i}$, b) $\sqrt{12}e^{\frac{\pi}{6}i}$, c) $\sqrt{8}e^{\frac{\pi}{4}i}$

2.10
1 + 7i

2.11
-3 - *i*

2.12
5*i*

2.13
–*i*

2.14
-1 + *i*

2.15
4/5

2.16
–(1/2) – (3/2)*i*

2.17
9 + 5*i*

2.18
–1 – 3*i*

2.19
–1 – *i*

2.20
–11 + *i*

2.21
40 – 24*i*

2.22
58

2.23
54 + 10*i*

2.24
–26 – 36*i*

2.25
$-\frac{7}{41}-\frac{22}{41}i$

2.26
$-\frac{136}{65}-\frac{82}{65}i$

2.27
$-\frac{58}{85}-\frac{11}{85}i$

2.28
$-\frac{19}{29}-\frac{25}{29}i$

2.29
$-\frac{47}{25}-\frac{21}{25}i$

2.30
$-\frac{26}{145}-\frac{138}{145}i$

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.31

$-\frac{1}{10}-\frac{31}{30}i$

2.32

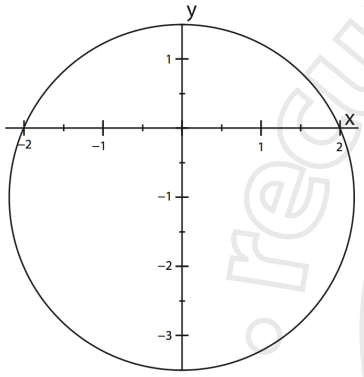
5

2.33

13

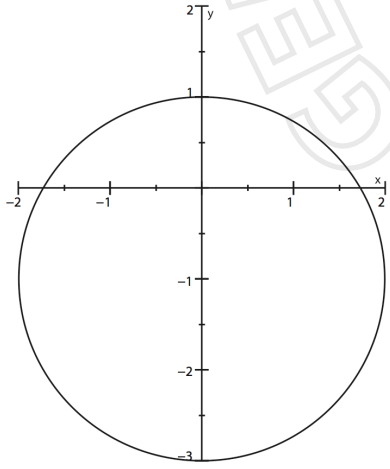
2.35

Región dentro del círculo de radio $\sqrt{5}$ con centro en $(0,-1)$



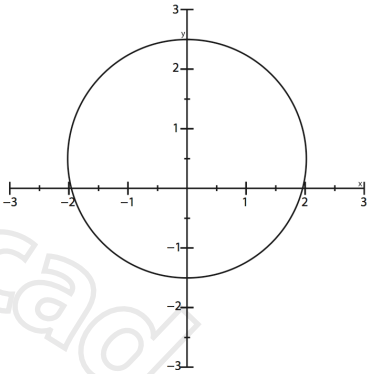
2.36

Circunferencia de radio 2 y centro en $(0,-1)$



2.37

Circunferencia de radio 2 y centro en $(0, 5)$



2.38

a) $\frac{15}{8}+\left(2+\sqrt{3}\right)i$

b) $-\frac{31}{8}+\left(4+\sqrt{3}\right)i$

c) -0.0278

d) $\frac{193}{64}+2i$

e) $-2\sqrt{3}$

f) $-2.4154+2.2731i$

g) $-\frac{12}{13}-\frac{18}{13}i$

2.39

$2+7i, 6-3i$

2.40

$2-i, -3i$

2.41

$15-3i, 5+10i$

2.42

$-2+3i, 6-6i$

2.43

$2-1.5i$

2.44

Lados $(2, 11)$, $(-6, -8)$ y $(4, -3)$

2.45

Si es rectángulo

2.46

$\frac{15}{2}\sqrt{5}$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.47
$x = 7, y = 3$

2.48
a) $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$
b) $\left(\sqrt{3}+3\right) + 5i$
c) $\frac{3+4i}{\sqrt{3}+i}$

2.49
$i^{10} = -1,\ i^{12} = 1,\ i^{11} = -i, i^{13} = i$

2.50
$-5i, 5i$

2.51
$\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{35}}{2}i\ ,\quad \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{35}}{2}i$

2.52
$-\frac{7}{6} + \frac{\sqrt{71}}{6}i\ ,\quad -\frac{7}{6} - \frac{\sqrt{71}}{6}i$

2.53
$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{39}}{2}i\ ,\quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{39}}{2}i$

2.58
No interseca el eje x

2.61
$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\sqrt{2}\ ,\ -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\sqrt{2}\ ,\ -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\sqrt{2}\ ,\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\sqrt{2}$

2.62
$2i$

2.63
8

2.64
círculo unitario

2.65
$\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\ ,\ -i\ ,\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\ ,\ \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\sqrt{3}\ ,\ i\ ,\ \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$

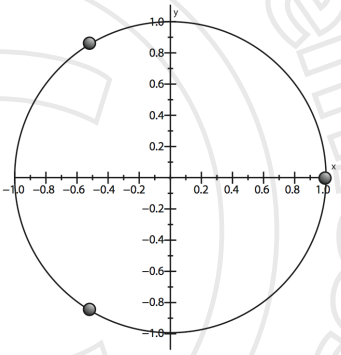
2.66
a) $\frac{27}{4}\sqrt{3} - \frac{27}{4}i$
b) –2,0 + 2,0i
c) 64
d) $1.1054 + 0.19491i,\ 0.3839 + 1.0548i,\ -0.7215 + 0.85986i,$
$-1.1054 - 0.19491i,\ -0.3839 - 1.0548i,\ 0.7215 - 0.85986i$

2.67
$1.6986^{i\frac{\pi}{4}},\ 1.6986^{i\frac{9\pi}{20}},\ 1.6986^{i\frac{17\pi}{20}},\ 1.6986^{i\frac{5\pi}{4}},\ 1.6986^{i\frac{33\pi}{20}}$

2.68
$z^2 - 2z + 5 = 0$

2.69
1

2.70
$1,(1,0),\ -0.5 + 0.86603i, -0, 0.5 - 0.86603i$



2.71
$-1.3747 + 0.7937i$

2.72
a) $2\sqrt{53}e^{i(6)},\ 2\sqrt{53}e^{i(2.86)},\ 6.8681\times10^{-2}e^{i(6.0049)}$
b) $2\sqrt{2}e^{i(5.4978)},\ 2\sqrt{2}e^{i(3.9270)},\ 3.5355e^{i(5.4978)}$

2.73
$\frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+5} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ ,\quad \frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ ,$
$\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\ ,\quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+5}\ ,\quad -2$

2.76
a) $k = 0$
b) $\pm\sqrt{2}$

2.77
z_1 y z_2 son colineales

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1

a) $\frac{8}{3}x^4$

b) $13x^3y^2$

c) $\frac{11}{12}x^6$

d) $\frac{61}{120}x^4y^3z$

e) $\frac{1}{3}x^4$

f) $\frac{4}{5}x^3$

3.2

a) $5x^2 - 7x + 9$

b) $2x^3 - 4x^2 + 8x - 2$

c) $-5x^5 + 10x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 17$

d) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{88}{3}x^2 + \frac{14}{3}x + \frac{23}{2}$

e) $-10x + 7y - 6z + 6$

f) $-13x^2 + 4xy^2 - 2y^2$

3.3

a) $-6x^5 - 8x^4 + 7x^3 + 20x^2 + 8x - 3$

b) $24x^5 - 12x^3 + 6x^2$

c) $-x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 3$

d) $9x^2 - 4$

e) $-3x^5 - 5x^4$

3.4

a) $-x^3 - 2x^2 + 1$

b) $6x^4 + 14x^3 - 4x^2 - 10x + 3$

c) $3x^2 - x - 4$

d) $12x^3 - 12x^2 - 11x + 8$

e) $x^3 + x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

3.5

a) $x^4 - 2x^2 + 1$

b) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$

c) $9x^4 - 12x^2y + 4y^2$

d) $\frac{9}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{4}{9}$

e) $\frac{25}{16}x^6 - \frac{5}{2}x^5 + x^4$

3.6

a) $3x^3 + 6x^2 - 2x + 21$

b) $-2x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 14x + 5$

3.7

a) $-\frac{5}{4}x^2y - \frac{73}{20}xy^2 + \frac{25}{6}xy$

b) $\frac{5}{4}x^2y + \frac{73}{20}xy^2 - \frac{25}{6}xy$

c) $\frac{5}{4}x^2y + \frac{73}{20}xy^2 - \frac{25}{6}xy$

d) $\frac{5}{4}x^2y + \frac{73}{20}xy^2 - \frac{25}{6}xy$

e) $\frac{1}{4}x^2y - \frac{43}{20}xy^2 + \frac{5}{2}xy$

f) $\frac{5}{12}x^2y - \frac{17}{20}xy^2 + \frac{7}{2}xy$

3.8

a) $\frac{9}{8}x^3 + \frac{22}{15}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{11}{3}$

b) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{2}{15}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{7}{3}$

c) $-\frac{5}{16}x^6 - \frac{5}{6}x^5 - \frac{263}{240}x^4 + \frac{17}{20}x^3 + \frac{1339}{360}x^2 - \frac{1}{3}x - 2$

d) $-\frac{5}{4} + \frac{\frac{1}{3}x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{13}{6}}{\frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}}$

3.9

a) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $(2x - y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$

c) $m^2 - 4$

d) $25x^2 - 9$

3.10

a) $-a^4 + 5a^2 - 9a + 4$

b) $-\frac{3}{2}x^5 + \frac{5}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{5}{2}x$

c) $4x^3 - 3x^2 + 2x$

d) $2x^3 + 3x + 4$

e) $4x^3 + 3x^2 - x - 7 - \frac{32x - 21}{2x^2 - 5x + 3}$

f) $x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 26x + 78 + \frac{231x - 3}{x^2 - 3x}$

3.11

a) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

b) $x^4 - 12x^2 + 36 = (x^2 - 6)^2$

c) $9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$

d) $16x^2 + 24xy + 9y^2 = (4x + 3y)^2$

e) $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

f) $4x^2 - 16y^2 = (2x - 4y)(2x + 4y)$

g) $4x^2 - 16xy + 16y^2 = (2x - 4y)^2$

h) $9x^2 - 49z^2 = (3x - 7z)(3x + 7z)$

i) $9x^2 + 42xz + 49z^2 = (3x + 7z)^2$

j) $\frac{x^2}{4} - 3xy + 9y^2 = \left(\frac{x}{2} - 3y\right)^2$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.12

a) $\frac{4}{25}x^2-\frac{5}{3}xy+\frac{9}{16}y^2=\left(\frac{5}{2}x-\frac{3}{4}y\right)^2$

b) $16x^2y^4-25=(4xy^2-5)(4xy^2+5)$

c) $(x-y)^2-z^2=(x-y-z)(x-y+z)$

d) $x^2+2xy+y^2-z^2=(x+y)^2-z^2=(x+y-z)(x+y+z)$

e) $\left(a-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}=\left(a-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)\left(a-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\left(a-\frac{4}{3}\right)a$

f) $a^2-x^2-2xy-y^2=a^2-(x+y)^2=(a-x-y)(a+x+y)$

g) $a^2-x^2+2xy-y^2=(a-x+y)(a+x-y)$

h) $16y^2-x^4=(4y-x^2)(4y+x^2)$

3.13

a) $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}y+\frac{1}{9}y^2=\frac{(2y-3)^2}{36}$

b) $\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x+x^2=\frac{(3x-1)^2}{9}$

c) $x^4+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{36}=\frac{\left(6x^2+1\right)^2}{36}$

d) $\frac{a^2}{9}-\frac{b^2}{25}=\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{5}\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{5}\right)$

e) $a^6-1=(a^3-1)(a^3+1)$

f) $4x^2-9=(2x-3)(2x+3)$

g) $16y^2-x^4=(4y-x^2)(4y+x^2)$

h) $3x^6+9x^2=3x^2(x^4+3)$

i) $x^3+20x^2-16x=x(x^2+20x-16)$

3.14

a) $24x^5+18x^4-30x^2=6x^2(3x^2+4x^3-5)$

b) $x^4-x^3+x-1=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)$

c) $x^3+15x^2+75x+125=(x+5)^2$

d) $4x^2+12x+9=(2x+3)^2$

e) $\frac{1}{36}-x^2=\left(\frac{1}{6}-x\right)\left(\frac{1}{6}+x\right)$

3.15

a) $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$

b) $-10x+25+x^2=(x-5)^2$

c) $\frac{1}{4}x^2-9=\left(\frac{x}{2}-3\right)\left(\frac{x}{2}+3\right)$

d) $36x^2-12x^5+60x^3=-12x^2(-5x+x^3-3)$

e) $6x^3-3x^2+4x-2=(2x-1)(3x^2+2)$

3.16

a) $\left(x^3-x^2+11x-10\right)\div(x-2)$

$=x^2+x+13+\frac{16}{x-2}$

b) $\left(8x^3-3x+x^4+20+12x^2\right)\div(x+3)$

$=x^3+5x^2+3x+6+\frac{2}{x+3}$

c) $\left(6x^4+20x^3-41x^2+50x-20\right)\div(x+5)$

$=6x^3-10x^2+9x+5+\frac{5}{x+5}$

d) $\left(20-20x^3+5x^5\right)\div(x-2)$

$=5x^4+10x^3+\frac{20}{x-2}$

3.17

a) $\left(20-22x^3-5x^5\right)\div(x-2)$

$=5x^4+10x^3-2x^2-4x-8+\frac{4}{x-2}$

$(20-22x^3+5x^5)\div(x-2)=5x^4+10x^3-2x^2-4x-8+\frac{4}{x-2}$

b) $\left(\frac{1}{2}x^6+\frac{2}{5}x^5+3x^4-\frac{5}{6}x^3-\frac{2}{3}x+4\right)\div(x-2)$

$=\frac{1}{2}x^5+\frac{7}{5}x^4-\frac{1}{5}x^3-\frac{37}{30}x^2-\frac{37}{15}x-\frac{64}{15}+\frac{68}{15(x-2)}$

c) $\left(7x^2+\frac{2}{3}x^5+\frac{11}{2}x-\frac{15}{4}x^3+\frac{1}{2}\right)\div(x+3)$

$=\frac{2}{3}x^4-2x^3+\frac{9}{4}x^2+\frac{x}{4}+\frac{1}{6}$

3.18

a) -234

b) $-\frac{17}{54}$

c) $\frac{1}{6}$

d) -3

e) 0

f) $\frac{5}{2}$

3.22

$P(x)=x^4-6x^2-27=(x+3)(x-3)(x^2+3)$,
el polinomio tiene una raíz positiva y una negativa.

3.23

raíz en $x=1$

3.24

$-1{,}05$

3.25

Las raíces del polinomio son:
$1,\ 1+3i,\ 1-3i,\ \frac{-3+7i}{4},\ \frac{-3-7i}{4}$

3.26

a) Aproximada es -1.48

b) Aproximada es -0.42

c) Las raíces son $-3, 1, 3, -1$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.27
a)Las raíces son –5, 6, 2
b) Las raíces son –3 de multiplicidad 2 y –4
c) Las raíces son 7, –3, 2
d) Las raíces son 1, –7, 4, –2
e) Las raíces son –3, 1 ambas de multiplicidad 2

3.28
a) 3 negativas 1 positiva
b) 3 positivas y 3 negativas
c) 1 positiva y 2 negativas

3.29
a) Las raíces son 4, 2, $\frac{1}{3}$, –3
b) Las raíces son $\frac{1}{3}$, 6, –1, 1
c) Las raíces son 2, 1, –10, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$

3.30
a) 1,25
b) –3,78
d) –1,3
e) –1,73

3.31
a) $x^3 - 8x^2 + 22x - 20$
b) $x^3 - 15x^2 + 73x - 111$
c) $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x + 6$
d) $x^3 - \frac{7}{3}x^2 + x - \frac{7}{3}$

3.32
a) $\pm\sqrt{2}$, $\pm i$
b) i, $-i$, ambas con multiplicidad doble
c) $2 + i$, $2 - i$, $1 + i$, $1 - i$

3.33
7 y 15

3.34
8 y 13

3.35
10 y 6

3.36 18.349 cm, 5.4498 cm

3.37
6 y 7

3.38
6 y 15

3.39
9 cm y 12 cm

3.40
Base = 12 cm, Altura = 4 cm

3.41
5, 7, y 9

3.42
6 y 36

3.43
a) 0, 2, 3
b) 3, 0, -3
c) 1, -4, 5
d) 1.5650,-1.0650, 0

3.44
a) 3.7065, -0.35326+1.2223i,-0.35326-1.2223i
b) -0.88165, 1.2408+0.21976i, 1.2408-0.21976i
c) i, -i, 2
d) 1.6401, -0.22117, -0.91894

3.45
a) 3, 2, -3, -1
b) -1.6068 - 0.59197i, 5.4113 + 4.4005i, 1.8313 - 2.5927i, 4.3643 - 1.2159i
c) -1.0, -2.4909, 0.65662, 1.8342

3.46
$x^4 - 29x^3 + 3x^2 - 29x + 1 = 0$
$x^4 - 29x^3 + 3x^2 - 29x + 1 = 0$,
$1.7262 \times 10^{-2} - 0.99985i$, $1.7262 \times 10^{-2} - 0.99985i$,
3.4565×10^{-2}, 28.931

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

4.1
a) (0,4/5), (4,0)
b) (0,2), (10/3,0)
c) (0,5), (4,0)
d) (0,3), (2,0)
e) (0,6), (3,0)
f) (0, 3/2), (3,0)
g) (0,-4), (-8/7,0)
h) (0,2), (1,0)
i) (0,-2), (1,0)
j) (0,-2), (3,0)

4.2
a) -4
b) 5/3
c) -2
d) 4/3
e) 1
f) 25/21
g) -27

4.13
24, 25, 26

4.4
14, 5

4.5
20

4.6
5

4.7
17

4.8
29

4.9
23

4.10
15, 30, 45

4.11
15

4.12
4

4.13
8 y 28

4.14
28 y 34

4.15
María 21, Esther 7, Isabel 16

4.16
38 y 14

4.17
10 años

4.18
gomas $2, lápiz $4, cuaderno $26

4.19
Pablo 28, Tobías 14, María 9,33

4.20
25

4.21
40 kg del café colombiano y 40 kg del café brasileño.

4.22
a) (0,8), (1,28/3), (2,32/3), (3,12), (4,40/3)
b) (0,-1), (1,-2), (2,-3), (3,-4), (4,-5)
c) (0,-7), (1,-1), (2,5), (3,9), (4,17)

4.23

a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 4 \\ 6 & -3 & 3 \end{array}\right)$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 21 \end{pmatrix}$; $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 15 \\ 6 & 5 & 21 \end{array}\right)$

c) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 48 \end{pmatrix}$; $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -3 & 29 \\ 8 & 4 & 48 \end{array}\right)$

d) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$; $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 7 \\ 7 & 2 & 16 \end{array}\right)$

e) $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$; $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 2 & 10 \\ 9 & -3 & 6 \end{array}\right)$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.24
a) x = 2, y = 3,
b) x = 1, y = 3
c) x = 5, y = 2
d) x = 2, y = 1
e) x = 1, y = 1

4.25
a) x = 2, y = 3
b) x = 1, y = 3
c) x = 5, y = 2
d) x = 2, y = 1
e) x = 1, y = 1

4.26
a) x = 2, y = 3
b) x = 1, y = 3
c) x = 5, y = 2
d) x = 2, y = 1
e) x = 1, y = 1

4.27
a) x = 2, y = 4
b) x = 5, y = 3
c) x = 3, y =-2
d) x = 5, y = -1
e) x = 2, y= 4
f) x = 3, y = 4

4.28
25 y 12

4.29
30 y 24

4.30
9 mujeres y 6 hombres

4.31
7 de $10 y 6 de $5

4.32
manzanas $15 por kg, naranjas $10 por kg

4.33
45

4.34
79

4.35
a) inconsistente, no tiene solución
b) si es consistente determinado, una de las ecuaciones se hace 0 = 0
c) inconsistente, no tiene solución

4.36
a) (0,0,0)
b) $\left(\frac{13}{11},\frac{4}{11},\frac{34}{11}\right)$
c) (0,0,0)
d) $\left(\frac{37}{14},\frac{9}{7},-\frac{20}{7}\right)$

4.37
a) m=-47/191, n= -49/191, p=-20/191, q=-75/191
b) p=12/11, q=-113/99, m=-19/33, n=161/99
c) x=-41/6, y=14, z=-7/6, w=-5
d) A=0, B=0, C=0, D=0, E=0

4.38
a=12, s=4, u=2, t=5

4.39
x=0.375, y= 1.0625, z=0.5625

4.40
a) k=0
b) k= 2, x=3, y=2, z=-1

4.41
PRI 28, PAN 38, PRD 34

4.43
43, 30, 17

4.43
28, 24, 8

4.44
225, 75, 100

4.45
a) consistente, solución trivial
b) inconsistente, no tiene solución
c) consistente, número infinito de soluciones

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

5.1

a) 3, -1, 3, 2, 2
b) 23, -11, 43, 22, 12
c) -1, 4, -3, 2, 2
d) -3, 2, 2, 4, 1

5.2

$A+B=B+A=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, conmutativa

5.3

No se pueden realizar porque son de orden diferente.

5.4

Si	3×5
No	
No	
Si	7×2
No	
Si	5×2
Si	3×4
No	
Si	2×4

5.5

a) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 4 & -3 & -4 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 3 & -14 & -3 \\ 16 & 2 & -2 \\ -7 & -29 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -20 & -11 \\ 2 & 10 & -4 \\ 15 & -13 & 1 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A+B$, $B+A$, $A-B$, $B-A$, no se pueden realizar por ser de diferente orden, $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -18 & 11 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -5 & 2 & 2 \\ -51 & 26 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -0 \\ -4 & -6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$

no se pueden realizar, no se pueden realizar, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

e) No se puede realizar: $A+B$, $B+A$, $A-B$, $B-A$, $A \times B$, $B \times A$, $A^t=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 10 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 7 & 10 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $A \times B$ y $B \times A$ no se puede realizar,

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.6

$$\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 4 & 10 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

5.7

$$\begin{pmatrix} 37 & 31 & -19 & 39 \\ -51 & -47 & 32 & -53 \\ 13 & 21 & -10 & 15 \\ -13 & -13 & 27 & -20 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -13 & -30 & -39 & -24 \\ -5 & -8 & -8 & -14 \\ -15 & -20 & -42 & -22 \\ 1 & 27 & 13 & 23 \end{pmatrix}$$

5.8

a) $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 135 & -109 & 91 \\ -39 & 92 & -33 \\ -45 & 3 & 95 \end{pmatrix}$

b) $3A - 3B = \begin{pmatrix} 58 & -50 & 134 \\ 7 & 67 & -46 \\ -13 & -21 & -4 \end{pmatrix}$

c) $A^2 - 5B = \begin{pmatrix} 76 & -38 & 102 \\ -5 & 61 & -13 \\ 41 & 0 & 19 \end{pmatrix}$

d) $A + A^2 + B + B^2 = \begin{pmatrix} 129 & -107 & 90 \\ -34 & 91 & -34 \\ 48 & 7 & 106 \end{pmatrix}$

5.10

a) $\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} & 7 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -5 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{17}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{17}{2} & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

5.12

Si es ortogonal

5.13

$x = \frac{4}{5}, \quad y = \frac{4}{5} \quad x = -\frac{4}{5}, \quad y = -\frac{4}{5}$

5.14

$X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

5.15

$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5.19

No

5.23

Para $k \neq 3$

5.24

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.25

1, 1

5.26

$p = \frac{308}{79}, \quad q = -\frac{102}{79}, \quad r = \frac{93}{79}, \quad s = \frac{63}{79}$

5.27

2, 3, 4

5.28

$a = -1, \quad b = -2, \quad c = 3$

5.29

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.30

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 13 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}, 32$$

5.32

a) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 33 & -15 & -13 \\ -33 & -13 & -1 \\ 11 & 9 & -23 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 \\ -49 & 44 & -19 \\ -48 & 33 & -13 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -22 & 21 & 13 \\ 11 & -21 & -24 \\ 0 & -7 & 14 \end{pmatrix}$

5.33

a) $\begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{14} & \frac{15}{154} & \frac{13}{154} \\ \frac{3}{14} & \frac{13}{154} & \frac{1}{154} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{9}{154} & \frac{23}{154} \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \frac{2}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{49}{55} & \frac{4}{5} & -\frac{19}{55} \\ -\frac{48}{55} & \frac{3}{5} & -\frac{13}{55} \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{11} & -\frac{13}{77} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{11} & \frac{24}{77} \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$

5.34

a) $(2,\ -1,\ 1)$

b) $\left(-1-\frac{t}{7},\ -1+\frac{2t}{7},\ t\right)$

c) $\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$

d) $(5,\ 3,\ -1)$

e) Inconsistente

f) Inconsistente

g) $(4,\ 3,\ 2,\ 1)$

h) $(-7t,\ 5t,\ t)$

i) $(0,\ 0,\ 0)$

j) $(1,\ -2,\ 3)$

k) Inconsistente

l) $(1,\ 2,\ -1)$

m) $(1-a,\ -a-1,\ a)$

5.35

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -8 \\ -3 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5.36

(40, 6, 2)

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.37
(40, 20, 40)

5.38
(20, 200, 2000)

5.39
(16, 14, 10)

5.40
(1.2, 1.5, 1.8)

5.41
(5, 3, 2)

5.42
a) k=1, indeterminado
b) k=2, indeterminado
c) k=1 o 2, indeterminado

5.43
$\alpha \neq 0$

5.44
Consistente determinado $x = 3+5, \quad y = -2, \quad z = -3$

5.45
Si = 1 consistente indeterminado
$x = s, \quad y = t, \quad z = 3 - s - t \quad \text{con } s, t \ R.$

5.46
a) $-52, \quad \left(\frac{59}{52}, \quad -\frac{4}{13}\right)$

b) 0, inconsistente

c) 0, consistente $x = \left(\frac{1}{2}\right)t_2 + \left(\frac{3}{4}\right), \quad y = t_2$

5.47
a) $\left(-\frac{13}{5}, \quad \frac{22}{5}, \quad \frac{63}{5}\right)$

b) $x = \frac{546}{263}, \quad y = \frac{556}{263}, \quad z = -\frac{533}{263}, \quad u = \frac{594}{263}$

c) $x = -\frac{17}{2}, \quad y = -\frac{17}{2}, \quad z = \frac{3}{2}, \quad u = -\frac{7}{2}, \quad v = 7$

5.48
Si $\alpha \neq 0$, sistema consistente, $x = \frac{5}{\alpha}, \quad y = -\frac{5}{2\alpha}, \quad x = \frac{5}{2\alpha}$

5.50
Rango matriz de coeficiente 3, rango matriz ampliada 3, número de incógnitas 3, sistema consistente determinado, solución 1, -2, 3

5.51
$\begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}$, todas de rango 2

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1

a) Lineal b) No lineal c) No Lineal
d) Lineal e) No lineal

1.2

a) General: $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$, $x_1 = -2 + 3\alpha - \frac{1}{2}\beta$,

Particular: $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ y $x_1 = 0$.

b) General: $x_2 = \alpha$, $x_1 = -6 - 3\alpha$

Particular: $x_2 = 0$, $x_1 = -6$

c) General: $y = \alpha$, $z = \beta$, $w = \gamma$,
$x = \frac{1}{3} - \alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{5}{3}\gamma$

Particular: $y = 1$, $z = -3$, $w = 0$, $x = -\frac{3}{2}$

d) General: $b = \alpha$, $c = \beta$, $d = \gamma$,
$a = -4 - \frac{1}{2}\alpha + \beta - 2\gamma$,

Particular: $b = -2$, $c = 1$, $d = -1$ y $a = 0$.

e) General: $y = \alpha$, $x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\alpha - \frac{1}{2}$

Particular: $y = \sqrt{2}$, $x = \pi - \frac{1}{2}$.

1.3

a) Solución única: $x = 1$, $y = 2$, $z = -3$

e) Solución única $x = \frac{17}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$, $z = \frac{4}{3}$

f) Solución única: $a = 2$, $b = -1$

g) Solución única: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$

h) Solución única:
$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = -4$

1.4

a) Solución única
$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$

b) Solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

e) Solución única
$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$

f) Solución única $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$

g) Solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

1.5

a) $y = \alpha$, $x = -2\alpha$

b) $x_3 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_1 = 3\alpha + 2\beta$

c) $y = \alpha$, $z = \beta$, $w = \gamma$, $x = \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3}\beta + 2\gamma$

d) $y = \alpha$, $x = (\tan^2)\alpha$

e) $b = \alpha$, $c = \beta$, $d = \gamma$, $e = \eta$,
$a = -\alpha - \beta - \gamma - \eta$

1.6

a) i) $k \neq -2$, $k \neq 1$
ii) $k = -2$, $k \neq 1$
iii) $k = -2$, $k = 1$

b) i) No tiene solución única
ii) $k_3 - k_2 - k_1 \neq 0$
iii) $k_3 - k_2 - k_1 = 0$

c) i) $m \neq 4$, $n \in R$
ii) $m = 4$, $n \neq 4$
iii) $m = 4$, $n = 4$

1.7

a) $a \neq -2$, $a \neq 4$ b) $a = -2$, $a = 4$

1.8

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2}{b^2 + c^2 - 2bc},$$
$$\cos(\beta) = \frac{b^2}{a^2 + c^2 - 2ac},$$
$$\cos(\gamma) = \frac{c^2}{a^2 + b^2 - 2ab}$$

1.9

$a = 1$, $b = -6$, $c = 2$ y $d = 10$, es decir,
$p(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 10$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.10

Una respuesta posible es $\begin{aligned} -2x+4y&=1\\ 2x+y&=3\end{aligned}$

1.11

Una respuesta posible es $\begin{aligned} x-2y&=-3\\ -3x+6y&=9\end{aligned}$

1.12

Una respuesta posible es $\begin{aligned} 8x+4y&=0\\ -4x-2y&=-1\end{aligned}$

1.13

a) $\begin{aligned} -x+3y+2z-4w&=5\\ 0x+y+3z-4w&=3\end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1+4x_2-5x_3+3x_4&=0\\ 0x_1+0x_2+x_3-x_4&=0\end{aligned}$

c) $\begin{aligned} a+0b+c&=2\\ 0a+b+0c&=2\\ 0a+0b+c&=2\end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1+3x_2-2x_3+5x_4-3x_5&=0\\ 0x_1+x_2+x_3-3x_4+x_5&=0\\ 0x_1+0x_2+0x_3+x_4-2x_5&=0\end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x-2y+4z&=2\\ 0x+y-3z&=-1\\ 0x+0y+0z&=3\end{aligned}$

1.14

a) Número infinito de soluciones

$y=\alpha,\ \ w=\beta,\ \ x=-9-\alpha+10\beta,\ \ z=-7+7\beta$

b) Número infinito de soluciones

$x_3=\alpha,\ x_5=\beta,\ x_4=-\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\beta,\ x_1=-\frac{17}{3}-\alpha-\frac{56}{9}\beta,\ x_2=3+2\alpha+\frac{12}{9}\beta$

c) Número infinito de soluciones

$z=\alpha,\ \ y=-\frac{6}{7}+\frac{11}{7}\alpha,\ \ x=\frac{11}{7}-\frac{5}{7}\alpha$

d) Número infinito de soluciones

$x_3=\alpha,\ \ x_5=\beta,\ \ x_4=2,\ \ x_1=-3-4\alpha-\beta,\ \ x_2=1+2\alpha+\beta$

e) Número infinito de soluciones

$d=\alpha,\ \ e=-1,\ \ c=4,\ \ a=6+\alpha,\ \ b=-1+\alpha$

1.15

Se tiene que llegar a alguna inconsistencia.

1.16

a) Solución única: $x_1=1,\ \ ,x_2=\frac{2}{3},\ \ x_3=-\frac{2}{3}$

b) Sin solución.

c) Número infinito de soluciones:

$x_4=\alpha,\ \ ,x_3=8-2\alpha,\ \ x_2=-1,\ \ x_1=-2+\alpha$

d) Número infinito de soluciones:

$w=\alpha\ ,\ \ z=\frac{35}{17}-\frac{25}{17}\alpha,\ \ y=\frac{29}{17}-\frac{28}{17}\alpha,$

$x=-\frac{21}{17}+\frac{15}{17}\alpha$

e) $x=-\frac{4}{3},\quad y=-\frac{23}{90},\quad z=\frac{25}{18},\quad w=\frac{34}{45}.$

f) Solución única: $x=-1\ ,\ y=2\ ,\ z=0$

1.17

a) Número infinito de soluciones

$w=\alpha,\ \ x=6\alpha,\ \ y=-7\alpha,\ \ z=-\alpha$

b) Número infinito de soluciones

$x_3=\alpha,\ \ x_4=\beta,\ \ x_2=-4\alpha+7\beta,\ \ x_1=11\alpha-18\beta$

c) Número infinito de soluciones

$z=\alpha,\ \ y=\frac{8}{5}\alpha,\ \ x=\frac{2}{5}\alpha$

d) Número infinito de soluciones

$x_4=\alpha,\ \ x_3=-\alpha,\ \ x_2=-\alpha,\ \ x_1=-\alpha$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

e) Número infinito de soluciones
$w=\alpha,\ \ z=\alpha,\ \ y=19\alpha,\ \ x=30\alpha$

1.18
$q=-4$ y $t=5$

1.19
a) $a\neq 0$ y $b\neq 2$
b) $a\neq 0$ y $b=2$, $a=0$ y $b=2$
d) $a=0$ y $b\neq 2$

1.20
$k\neq -2,\ \ k\neq 1$

1.22
$m=4,\ \ n\neq 4$

1.23
$a\neq -2,\ \ a\neq 4$

1.24
$a=-4$ y $b=5$

1.25
$a\neq 0$ y $b\neq 2$

1.26
a) $k\neq 1$ b) $k=1$

1.27
$$\cos(\alpha)=\frac{a^2}{b^2+c^2-2bc},$$
$$\cos(\beta)=\frac{b^2}{a^2+c^2-2ac},$$
$$\cos(\gamma)=\frac{c^2}{a^2+b^2-2ab}$$

1.28
Tiene una inconsistencia, $d=10$ y $d=6$.

1.29
$x=0$, $y=0$ y $z=1$.

1.30
$A=-\frac{1}{5}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=0$, $D=-\frac{2}{15}$ y $E=-\frac{1}{5}$

1.31
$p(x)=3x^2-18x-29$

1.32
a) Una línea recta.
b) Un punto.
c) $-x_1-x_2-x_3=-3$

1.33
$p(x)=x^3-3x$

1.34
45 miligramos de semiconductor A, 48 gramos semiconductor B y 54 miligramos de semiconductor C.

1.35
2 tipo *M*1, 3 tipo *M*2 y 6 tipo *M*3.

1.36
120 dólares en la memoria, 160 dólares en el microprocesador y 220 dólares en la tarjeta

1.37
Flujo de entrada *140* litros/hora y flujo de salida *40* litros/segundo.

1.38
$i_1=\frac{46}{25}$ amperes, $i_2=\frac{42}{25}$ amperes y $i_3=\frac{4}{25}$ amperes.

1.39
a) $x=3,\ \ y=-1,\ \ z=2$
b) Sin solución
c) $z=\alpha,\ \ y=\alpha+1,\ \ w=\beta,\ \ x=\alpha+\beta-2$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.40

a) $a=\alpha,\ \ b=\alpha,\ \ c=-\alpha$

b) $x_1=0,\ \ x_2=0,\ \ x_3=0$

c) $w=\alpha,\ \ z=\alpha,\ \ y=\beta,\ \ x=\alpha-2\beta$

1.41

Un posible sistema es $\begin{aligned}3x+y&=3\\4x+2y&=6\end{aligned}$

1.42

$i_1=1$ amper, $i_2=4$ amperes e $i_3=3$ amperes.

1.43

Solo hay que reducir los sistemas y verificar que son iguales.

1.44

$x-3y-2z=0$

1.45

24 km.

1.46

$P=(-1,2,-3)$

1.47

16 días

1.48

$A=3$, $B=1$, $C=2$

1.49

100°, 80°, 100° y 80°

1.50

180 km, 3 horas.

1.51

$A=0,\ \ B=\frac{1}{4},\ \ C=-\frac{1}{4}$

1.52

$k=\frac{8}{3}$

1.53

34 modelo A, 4 modelo B y 18 modelo C.

1.54

$x_1=1,\ \ x_2=-2,\ \ x_3=6,\ \ x_4=-3,\ \ x_5=-4,\ \ x_6=3$

1.55

i) $a+b+c=0$

ii) $a+b+c\neq 0$

iii) No es posible

1.56

i)

$x_5=\alpha,\ \ x_1=\alpha-10,\ \ x_2=-\alpha+30,\ \ ,x_3=\alpha-10,\ \ x_4=\alpha+10$

ii) Para $\alpha=10$

1.57

Solución única si $\lambda\neq -5$ y $\lambda\neq 2$

Infinidad de soluciones si $\lambda=2$

Sin solución si $\lambda\neq -5$

1.58

10000 pájaros en la isla A,
5000 pájaros en la isla B,
20000 pájaros en la isla C.

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1

a) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

c) No es posible la operación

2.2

a) $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 0 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -6 & -5 \\ -3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$

c) No está definido.

d) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

h) No está definido

i) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{pmatrix}1$

2.3

$x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$ y $x_4 = 3$.

2.4

$A = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ donde $\alpha, \beta \in R$.

2.5

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.6

a) $x = -1$, $y = 4$ y $z = -3$

b) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$

c) No tiene solución

d) $x_1 = 1 - \alpha$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ y $x_4 = \alpha$

2.7

a) $A_{11} = -18$, $A_{12} = 2$, $A_{13} = 4$,
$A_{21} = -11$, $A_{22} = 14$, $A_{23} = 5$,
$A_{31} = -10$, $A_{32} = -4$ y $A_{33} = -8$.

b) $Adj(A) = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.8

a) $|A| = -42$

b) $|A| = 108$

c) $|A| = -4$

d) $|A| = -24$

e) $|A| = 0$

2.9

a) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0$ y $x_2 = 2$

b) No tiene solución

c) $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$

d) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2,\ x_4 = -4$

e) $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$

2.10

a) $\begin{pmatrix} c & 0 & a \\ b & a & 0 \\ 0 & c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$

c) $\cos(\alpha) = \dfrac{a^2}{b^2 + c^2 - 2bc}$,

$\cos(\beta) = \dfrac{b^2}{a^2 + c^2 - 2ac}$,

$\cos(\gamma) = \dfrac{c^2}{a^2 + b^2 - 2ab}$

2.11

a) $|A| = 0$

b) $|A| = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)$

2.12

a) $k \neq 4$, $k \neq -2$ y $k \neq 2$

b) $k \neq 2$ y $k \neq 4$

2.13

a) $|A| \neq 0$, es invertible $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $|A| = 0$, no es invertible

c) $|A| \neq 0$, es invertible $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

d) $|A| \neq 0$, es invertible $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

e) $|A| \neq 0$, es invertible

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

2.20

$a = \dfrac{20}{3}$.

2.21

Cada punto se sustituye en la ecuación de la recta $ax + by + c = 0$, entonces se tiene un sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas homogéneo, como su determinante es igual a cero, tiene soluciones infinitas, es decir, todos sus puntos son comunes, se trata de una sola recta.

2.25

31 unidades de área.

2.26

32.5 unidades de área.

2.27

4 unidades de volumen.

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.28
12 unidades de volumen.

2.29

$$\begin{pmatrix} 30 & 50 & 25 \\ 15 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 120 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$x =$ número de lotes de medicamento tipo A.
$y =$ número de lotes de medicamento tipo B.
$z =$ número de lotes de medicamento tipo C.

2.30

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2.31

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

2.32

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 2800 \\ 450 \end{pmatrix}$$

$x =$ número de adultos.
$y =$ número de de estudiantes.
$z =$ número de niños.

2.33

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 900 \\ 2800 \\ 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 100 \\ 350 \end{pmatrix}$$

2.34

a) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -5 \\ -3 & 16 & -12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -7 & 22 \\ 11 & 34 \\ 9 & -19 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 37 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -6 & 3 & -1 \\ -6 & -8 & -5 \\ 14 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

2.35

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -2 & -10 \\ 5 & 6 & 0 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -1 & 7 & 0 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} e^2 & -3 & \tan(30) & -5 \\ -1 & \sqrt{3} & -\ln(5) & 0 \\ 3 & 0 & \pi & 3 \\ \cos(45) & 3 & -5 & 4 \end{array}\right)$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$

2.36

a) Soluciones infinitas
b) Sin solución
c) Solución única

2.37

a) $X = \begin{pmatrix} 3 & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{10}{3} & 0 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} -\frac{13}{6} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{17}{6} \\ 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} -\frac{13}{3} & -\frac{10}{3} \\ 4 & -5 \\ -\frac{26}{3} & -\frac{16}{3} \end{pmatrix}$

2.38

a) $|A| = 0$
b) $|A| = -75$
c) $|A| = 4x - 2y - 2$
d) $|A| = a^2b + ab^2$

2.39

a) $|A| = -135$
b) $|A| = 136$
c) $|A| = -1100$

2.40

En ambos casos $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

a) $x = 4, \quad y = 1, \quad z = -7$
b) $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

2.41

a) Solución única
b) Solución única
c) No tiene solución única

2.42

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 4 & -\frac{13}{3} \\ -\frac{2}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 1 & -\frac{13}{9} \\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 0 & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -1 & \frac{10}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 1 & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 2 & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -\frac{3}{2} & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

2.43

a) $3x + 2y + 6z = 23$

b) $2x + z = 10$

c) $5x - 4y + 3z = 15$

2.44

a) -8 b) -240 c) -16

2.45

a) $x_1 = \frac{22}{13}, \quad x_2 = \frac{94}{14}, \quad x_3 = -\frac{6}{13}, \quad x_4 = \frac{63}{13}$

b) $x = \frac{45}{13}, \quad y = -\frac{11}{13}, \quad z = \frac{23}{13}$

c) $x = 2, \quad y = 5, \quad z = -3$

2.47

a) Si $\lambda = 1, \quad \lambda = 2$

b) Si $\lambda = 2, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = -3$

c) Si $\lambda = 0, \quad \lambda = -2$

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1
No es cerrado bajo la suma.

3.2
No es un espacio vectorial.

3.3
No es un espacio vectorial

3.4
Si es un espacio vectorial

3.5
a) Es un subespacio vectorial
b) Es un subespacio vectorial
c) Es un subespacio vectorial
d) No es un subespacio vectorial

3.6
a) Es un subespacio vectorial
b) No es un subespacio vectorial
c) Es un subespacio vectorial
d) Es un subespacio vectorial

3.7
a) Es un subespacio vectorial
b) Es un subespacio vectorial
c) Es un subespacio vectorial

3.8
a) Es un subespacio vectorial
b) Es un subespacio vectorial
c) No es un subespacio vectorial
d) Es un subespacio vectorial

3.9
Es cerrado bajo la suma y el producto por un escalar.

3.10
Se derivan las funciones para construir los sistemas homogeneos.

3.11
$\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$ y $\beta \neq \gamma$

3.12
Una base de W: $\{(1,1,0,0),\ (1,-1,1,0),\ (0,2,0,1)\}$, $Dim(W) = 3$.

3.13
a) No es una base
b) Si es una base

3.14
Se reducen las matrices de vectores y ambas son iguales.

3.15
Generan a R^3, pero no son linealmente independientes. Entonces, no son base.

3.16
Una base es: $\left\{\left(\frac{1}{2},1,0\right),\ \left(\frac{1}{2},0,1\right)\right\}$

3.17
Una base para $gen(S)$ es:
$\{(1,2,-2,1),\ (-3,3,-9,6),\ (-3,0,-4,5)\}$.

3.18
Es un plano que pasa por el origen, cuya ecuación esta dada por: $3x + 6y + z = 0$.

3.19
Una base
$\{(1,0,1,0),\ (-1,1,-1,0),\ (1,0,0,0),\ (0,0,0,1))\}$.

3.20
Una base $\{(3,1,0),\ (-2,0,1)\}$.

3.21
Si es una base.

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.22

$$P_{T\to S}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1/2 & -1/2 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 1\end{pmatrix} \text{ y } Q_{S\to T}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

3.23

a) $P_{T\to S}=\begin{pmatrix}2/5 & -3/5 & 3/5\\ -1/5 & 9/5 & -4/5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

b) $[u]_S=(2,-1,3)$

c) $Q_{S\to T}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1/3 & 2/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

d) $[v]_T=(0{,}8/3{,}1)$

324

$w_1=(-1,1,0)$, $w_2=(1,2,-1)$ y $w_3=(0,1,0)$

3.25

a) $[u]_C=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$ donde $C=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

b) $[u]_C=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ donde $C=\{x^2,\ x,\ 1\}$

3.26

Una base ortonormal

$$\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\right\}.$$

3.27

$u=(12,-6,6)=1\cdot(1,-2,3)+0\cdot(-2,2,2)+7\cdot(5/7,4/7,1/7).$

3.28

$$[u]_S=\begin{pmatrix}1\\0\\7\end{pmatrix}.$$

3.29

Una base ortonormal

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}.$$

3.30

a) El punto $(0,0,0)$

b) El plano $x-3y+z=0$

c) La recta $z=0$, $y=t$ y $x=-3$

3.31

a) $M_{E\to F}=\begin{pmatrix}\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0\end{pmatrix}$

b) $M_{F\to E}=\begin{pmatrix}\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

3.32

Una base ortonormal es:

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}.$$

Es un plano que paso por el origen, cuya ecuación es: $-x-2y+z=0$.

3.33

Mostrar que v, es perpendicular a u_1, u_2 y al plano $-x-2y+z=0$.

3.34

a) W si es un subespacio vectorial
b) W si es un subespacio vectorial
c) V no es un subespacio vectorial
d) V es es un subespacio vectorial
e) W si es un subespacio vectorial

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.35
a) Linealmente dependiente
b) Linealmente independiente
c) Linealmente dependiente
d) Linealmente independiente
e) Linealmente dependiente

3.36
Mostrar con la definición de conjunto generador.

3.37
a) No es una base
b) Es una base
c) No es una base
d) Es una base

3.38

a) $[u]_B = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $[u]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3.39

a) Una base $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

b) Una base $W = \{1+x, 1+x+x^2, 1\}$

3.40
Se reducen la matrices de vectores y ambas son iguales.

3.41
a) Una base $\{(8,-9,-6,6)\}$
b) Una base $\{(-3,0,1),(2,1,0)\}$
c) Una base $\{(2,3,7,0),(-1,0,0,1)\}$

3.42

$$P_{S\to T} = \begin{pmatrix} -\frac{48}{5} & -24 & \frac{4}{5} \\ 4 & 10 & \frac{1}{2} \\ -\frac{6}{5} & -5 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \text{ y } Q_{T\to S} = \begin{pmatrix} \frac{3}{32} & \frac{17}{20} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{6}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

3.43
Como los vectores son uno múltiplo del otro debe generar una recta.

3.45

a) $\left\{\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)\right\}$

b)
$\left\{\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},0\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)\right\}$

c) $\left\{\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5},0\right),\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right),(0,0,1)\right\}$

3.46
$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

3.47

a) $u = 2\cdot(0,2,-2) - 1\cdot(1,0,-2)$

b) $B_O = \left\{\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

c) $u = 3\sqrt{2}\cdot\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

4.1

a) T no es lineal.
b) T no es lineal.
c) T si es lineal.
d) T no es lineal.
e) T si es lineal.
f) T si es lineal.
g) T si es lineal.
h) T no es lineal.
i) T no es lineal.
j) T si es lineal.

4.2

a) T si es lineal.
b) T no es lineal.
c) T si es lineal.
d) T no es lineal.
e) T si es lineal.

4.3

T no es lineal.

4.4

T si es lineal.

4.7

a) $T(-1,5)=(8,5)$

b) $T(x,y)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y,-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$

4.8

a) $T(2x^2-5x+3)=-x^2+3x+3$

b) $T(ax^2+bx+c)=(2a+b)x^2+ax+c$

4.9

a) $T(-10x^2+15x-25)=-\frac{95}{2}x$

b) $T(ax^2+bx+c)=(a-b-c)+(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+2c)x$

4.10

a) $T(-10,15,-25)=\left(-\frac{95}{2},0\right)$

b) $T(x,y,z)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+z,x-y-z\right)$

4.11

a) Una base del kernel $\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$

b) Una base de la imagen $\left\{1+x^2+x^3,1+x+2x^3\right\}$

4.12

a) Una base del kernel $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ entonces

$Dim(Ker(T))=0$ por lo tanto, es uno a uno.

b) Una base de la imagen $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\}$

entonces $Dim(\text{Im}(T))=3$ por lo tanto, es sobre.

4.13

a) Una base del kernel $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$, una base para la imagen $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$

b) Una base del kernel $\left\{1+x-x^2+x^3\right\}$, una base para la imagen $\left\{1,\ -1+x,\ x^2\right\}$.

c) Una base del kernel $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$, una base para la imagen $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.14

a) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $M_T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

c) $M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.15

a) $M_T = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 11 & 33 \\ -6 & 31 \end{pmatrix}$

b) $Ker(T) = \{(0,0)\}$ entonces $Dim(Ker(T)) = 0$

c) $\text{Im}(T) = \{(4x - y, 3x + 2y) \mid x, y \in R\}$, base $\{(4,3),(-1,2)\}$ entonces $Dim(\text{Im}(T)) = 2$

4.16

b) $M_T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

4.17

a) $M_T = \begin{pmatrix} -1 & 27 & -3 \\ 2 & -37 & 6 \end{pmatrix}$

b) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4.18

a)

$Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha + \beta & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in R \right\}$,

base $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ entonces $Dim(Ker(T)) = 2$.

b)

$\text{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -2c & 2a + 2b - 2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$,

base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ entonces $Dim(Ker(T)) = 2$.

4.19

a) $Ker(T) = \{0x + 0\}$ entonces $Dim(Ker(T)) = 0$.

b) $\text{Im}(T) = \{ax^2 + bx + b \mid a, b \in R\}$, base $\{x^2, x + 1\}$ entonces $Dim(\text{Im}(T)) = 2$.

c) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$.

4.20

a) Una base del $Ker(T)$ es $\{x - x^2\}$, su dimensión es 1.

b) Una base de P_2 es $\{x - x^2, 1, x^2\}$

4.23

$T(x, y, z) = (0, y - 2z, -4x + 2y + 3z)$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.24

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 3x - 3y$$

4.25

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

4.26

a) $T^{-1}(p(x)) = p(x) - \frac{d}{dx}p(x) + \frac{d^2}{dx^2}p(x)$

o bien

$T^{-1}(a + bx + cx^2) = (a - b - 2c) + (b - 2c)x + cx^2$

b) $T^{-1}(a + bx) = (a, b - a)$

c) $T^{-1}(p(x)) = p(x - 2)$

d) $T^{-1}(x, y) = \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2}\right)$.

4.27

Una base para el núcleo $\{1, x\}$, una base de la imagen $\{1\}$.

4.28

Probar que son uno a uno y sobre.

4.29

$$T\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

4.30

a) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.31

a) $T_1 + T_2 = (-x - y + z, 2x - 3y - z)$

b) $T_1 + T_2 = (z, 3x - z)$

c) $T_1 \circ T_2 = (x + 4y, 3x - y)$

4.32

$T(x, y, z) = (x, y, -2x + y)$

4.33

a) $M_T = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$

b) $M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.34

a) $M_T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{14}{5} & \frac{11}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.35
Una base para el kernel $\{(1,0,-2),(1,2,0)\}$.

4.36
Son demostraciones.

4.37
a) $T^{-1}(x,y,z)=(x,-x+y,-y+z)$

b) $T^{-1}(x,y)=\left(\frac{x}{5},\frac{y}{5}\right)$

c) $T^{-1}(x,y,z,w)=(x+2y,y,w,z-w)$

4.38
$$M_T=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

5.1

a) $p(\lambda) = 7 - 4\lambda^2 + \lambda^3$

b) $p(\lambda) = 8 + 2\lambda - 5\lambda^2 + \lambda^3$

c) $p(\lambda) = -24 + 26\lambda - 9\lambda^2 + \lambda^3$

d) $p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$

e) $p(\lambda) = \lambda^4 - 14\lambda^3 + 68\lambda^2 - 136\lambda + 96$

5.2

a) $\lambda_1 = -1,\ X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = 2,\ X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y

$\lambda_3 = 4,\ X_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\lambda_1 = 1,\ X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = -1,\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

$\lambda_3 = 3,\ X_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\lambda_4 = 2,\ X_4 = \begin{pmatrix} 29 \\ 7 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\lambda_1 = 1,\ X_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = 3,\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y

$\lambda_3 = -2,\ X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\lambda_1 = 8,\ X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1,$

$X_2, X_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

e) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1,\ X_1, X_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

5.3

a) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 0,\ X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

$X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.4

$a = 0,\ b = 9,\ c = 0.$

5.7

a) No es diagonalizable.
b) Si es diagonalizable.
c) Si es diagonalizable.
d) No es diagonalizable.
e) Si es diagonalizable.
f) No es diagonalizable.

5.8

a) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

c) $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

e) $D=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&6\end{pmatrix}$

5.9

a) $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1,\ X_1=\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\0\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}\beta\\0\\\beta\end{pmatrix}$ y $X_3=\begin{pmatrix}\gamma\\\gamma\\\gamma\end{pmatrix}$

b) $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

5.10

a) $\lambda_1=\lambda_2=1\ \ \lambda_3=2,\ X_1=\begin{pmatrix}\alpha/3\\\alpha\\0\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}2\beta/3\\0\\\beta\end{pmatrix}$ y $X_3=\begin{pmatrix}\gamma\\\gamma/2\\\gamma\end{pmatrix}$

b) $P=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&0&1\\0&3&2\end{pmatrix}$

5.12

a) $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-1\ \ \lambda_3=4,\ X_1=\begin{pmatrix}0\\\alpha\\0\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}2\beta\\0\\\beta\end{pmatrix}$ y $X_3=\begin{pmatrix}-\gamma/2\\0\\\gamma\end{pmatrix}$

b) $P=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{1}{\sqrt{5}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$

5.13

a) $\lambda_1=\lambda_2=-3,\ \lambda_3=3,\ X_1=\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\0\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}-\beta\\0\\\beta\end{pmatrix}$ y $X_3=\begin{pmatrix}\gamma\\\gamma\\\gamma\end{pmatrix}$

b) $P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

5.14

Para todo número real $c>0$.

5.16

$A=\begin{pmatrix}2&3\\0&5\end{pmatrix}$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.17

Las columnas de P, deben ser múltiplos de los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.18

a) $\begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

5.19

a) $x'^2 - y'^2$

b) $-2x'^2 + 5y'^2 - 5z'^2$

c) x'^2

d) $3x'^2 + 9y'^2 + 3z'^2$

e) $y'^2 + 3z'^2$

5.20

a) Punto.
b) Hipérbola.
c) Circunferencia.
d) Elipse.
e) Elipse.

5.21

a) Circunferencia $x'^2 + y'^2 = 25$

b) Parábola $y'^2 = -4x'$

c) Hipérbola $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1$

d) Punto $(1,3)$, $x'^2 + y'^2 = 0$

5.22

a) Cono $x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0$

b) Paraboloide elíptico $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{8} = 1$

c) Elipsoide $x'^2 + y'^2 + 3z'^2 = 1$

d) Cilindro parabólico $y'^2 = \frac{4}{\sqrt{2}} z'$

5.23

a) Si es.
b) Si es.
c) No es.

5.24

a) $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -27 & 18 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \\ 19 & -11 & 6 \end{pmatrix}$

b) No tiene inversa

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.26

a) Par de rectas paralelas $y'^2 = \frac{4}{10}x'^2$,

$y' = \frac{2}{\sqrt{10}}x'$ y $y' = -\frac{2}{\sqrt{10}}x'$

b) Hiperboloide de dos hojas

$$\frac{4x'^2}{7} - \frac{4y'^2}{7} - \frac{4z'^2}{7} = 1$$

5.29

a) Valores propios: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0.$

Vectores propios:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Valores propios: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2.$

Vectores propios:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5.30

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3,\ \lambda_4 = 7,\ \lambda_5 = 8,\ \lambda_6 = 9.$

5.31

a) $\lambda_{1,2} = -3$, multiplicidad algebraica 2, multiplicidad geométrica 1.

b) $\lambda_{1,2} = 1$, multiplicidad algebraica 2, multiplicidad geométrica 2.
$\lambda_3 = -1$, multiplicidad algebraica 1, multiplicidad geométrica 1.

c) $\lambda_{1,2} = 1$, multiplicidad algebraica 2, multiplicidad geométrica 2.
$\lambda_3 = -1$, multiplicidad algebraica 1, multiplicidad geométrica 1.

d) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$, todas las multiplicidades son de 1.

5.32

Polinomio característico,

$p(x) = (x-4)(x+5)(x+2) = x^3 + 3x^2 - 18x - 40$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 40 & 18 & -3 \end{pmatrix}$$

5.33

$$A = \begin{pmatrix} 4^{n-1} & 0 & 4^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 3\cdot 4^{n-1} & 0 & 3\cdot 4^{n-1} \end{pmatrix}.$$

5.34

Comprobar solamente.

5.35

a) $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.36

a) $P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

b) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

5.37

a) $J=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $J=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

5.38

a) Valores propios: $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=6.$
Vectores propios:
$X_1=3+2x,\ X_2=-5+10x+2x^2,\ X_3=-1+2x.$

b) Valores propios: $\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=3.$
Vectores propios:
$X_1,\ X_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

5.39

a) $\{x,\ -1+x\}.$

b) $\{(1,-1),\ (1,1)\}.$

recursos · académicos · en · línea · ©

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

A.10
$x > \frac{13}{4}$

A.11
$x > \frac{1}{5}$

A.12
$x \leq -1$

A.13
$x \geq -\frac{2}{3}$

A.14
$x > \frac{6}{5}$

A.15
$x > \frac{3}{5}$

A.16
$x \leq 10$

A.17
$x \geq -6$

A.18
$x < 7$

A.19
$x < -\frac{17}{8}$

A.20
$x \leq -\frac{49}{18}$

A.21
$x \geq \frac{2}{7}$

A.22
$\frac{2}{3} \leq x \leq 3$

A.23
$-4 \leq 2x \leq 1$

A.24
$-1 \leq x \leq \frac{1}{5}$

A.25
$-\frac{10}{7} \leq x \leq \frac{2}{7}$

A.26
$(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

A.27
$[-4, -1]$

A.28
$(-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

A.29
$(-\infty, -1) \cup (7, \infty)$

A.30
$(-\infty, -1) \cup (4, 6)$

A.31
$(-7, -1) \cup (3, \infty)$

A.32
$[-1, 1] \cup [7, \infty)$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A..33
$(-\infty, -4] \cup [2, 5]$

A.34
$(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

A.35
$(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{5}{3}, \infty)$

A.36
$(1, 3]$

A.37
$-\frac{7}{8} \leq x \leq \frac{13}{8}$

A.38
$-6 < x < -5$

A.39
$-7 \leq x \leq 3$

A.40
$(-\infty, -\frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$

A.41
$(-\infty, -\frac{9}{7}] \cup [\frac{1}{7}, \infty)$

A.42
$(-\infty, -\frac{15}{9}) \cup [-\frac{1}{9}, \infty)$

A.43
$(-0.6, 5)$

A.44
$[-4, 0]$

A.45
$(-\infty, 1.5] \cup [4, \infty)$

A.46
$(f+g)(x) = x^2 + x + 1$
$(f-g)(x) = x^2 - x - 1$
$(f \cdot g)(x) = x^3 + x^2$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x+1}$

A.47
$(f+g)(x) = \frac{2 + x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3}}{x+1}$
$(f-g)(x) = -\frac{x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3}}{x+1}$
$(f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{x+1}$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3} + 1}$

A.48
$(f+g)(x) = \frac{1 + \sqrt{x^3} - 2\sqrt{x}}{x-2}$
$(f-g)(x) = \frac{1 - \sqrt{x^3} + 2\sqrt{x}}{x-2}$
$(f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x}}$

A.49
$(f+g)(x) = \sqrt{x+1} + (x-1)^2$
$(f-g)(x) = \sqrt{x+1} - (x-1)^2$
$(f \cdot g)(x) = (x-1)^2 \sqrt{x+1}$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{(x-1)^2}$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A.50

$f[g(x)] = x+1$

$g[f(x)] = x+2\sqrt{x}+1$

A.51

$f[g(x)] = (x+1)^2$

$g[f(x)] = x^2+1$

A.52

$f[g(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$

$g[f(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

A.53

$f[g(x)] = \dfrac{1}{x}$

$g[f(x)] = \dfrac{x}{x-1}$

A.54

$f[g(x)] = x+1$

$g[f(x)] = x+2\sqrt{x}+1$

A.55

$f[g(x)] = \sqrt{x^2-2x}$

$g[f(x)] = x-2\sqrt{x-1}$

A.56

$f^{-1}(x) = x+1$

A.57

$f^{-1}(x) = x^3+1$

A.58

$f^{-1}(x) = 2x+8$

A.59

$f^{-1}(x) = 1-x^2$

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1
8

1.2
-1

1.3
31

1.4
5

1.5
5

1.6
$\frac{5}{3}$

1.7
671

1.8
$\sqrt{3}$

1.9

x	$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$	x	$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$
0	1	2	3
0.5	1.5	1.5	2.5
0.9	1.9	1.1	2.1
0.99	1.99	1.01	2.01
0.999	1.999	1.001	2.001

Conforme x tiende a la unidad, $f(x)$ tiende a dos

1.10

x	$f(x)=\frac{\text{sen } x}{x}$	x	$f(x)=\frac{\text{sen } x}{x}$
1	0.841	-1	0.841
0.5	0.959	-0.5	0.959
0.1	0.998	-0.1	0.998
0.01	0.9999	-0.01	0.9999
0.001	0.999999	-0.001	0.999999

Conforme x tiende a cero, $f(x)$ tiende a la unidad

1.11
Límite por la derecha

1.12
Límite por la izquierda

1.3
Límite por la derecha

1.14
Límite por la izquierda

1.15
Límite bilateral

1.16
Límite bilateral

1.17
32

1.18
-16

1.19
12

1.20
-12

1.21
30

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.22
3

1.23
27

1.24
$\frac{27}{2}$

1.25
$-\frac{8}{3}$

1.26
$-\frac{8}{3}$

1.27
$\frac{4}{5}$

1.28
-5

1.29
$\frac{7}{8}$

1.30
No tiene límite

1.31
$-\frac{7}{8}$

1.32
11

1.33
-9

1.34
$\frac{10}{11}$

1.35
$-\frac{2}{9}$

1.36
-16

1.37
$-\frac{6}{5}$

1.38
$-\frac{5}{7}$

1.39
$\frac{10}{3}$

1.40
$-\frac{2}{3}$

1.41
$\frac{1}{2}$

1.42
2

1.43
$-\frac{3}{4}$

1.44
$\frac{1}{\sqrt{7}}$

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.45
$\frac{1}{\sqrt{6}}$

1.46
$\frac{1}{5}$

1.47
$\frac{1}{2}$

1.48
$\frac{1}{3}$

1.49
No tiene límite

1.50
$\frac{9}{2}$

1.51
$\frac{-3}{2\sqrt{7}}$

1.52
$\frac{-3}{2\sqrt{2}}$

1.53
1

1.54
$\sqrt{11}$

1.55
$\frac{3}{2}$

1.56
2

1.57
5

1.58
$\frac{4}{3}$

1.59

x	$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x}$	x	$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x}$
1	0.540	-1	-0.540
0.5	1.755	-0.5	-1.755
0.1	9.950	-0.1	-9.950
0.01	99.995	-0.01	-99.995
0.001	999.9995	-0.001	-999.9995
0.0001	9999.9999	-0.0001	9999.9999

Cuando x tiende a cero por la derecha, el límite tiende a infinito, en cambio, cuando x tiende a cero por la izquierda, el límite tiende a menos infinito.

1.60
$\frac{4}{27}$

1.61
$\frac{1}{6}$

1.62
3

1.63
$-\frac{13}{75}$

1.64
$-\frac{1}{15}$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.65
$\frac{5}{8}$

1.66
$-\frac{21}{5}$

1.67
$-\frac{19}{14}$

1.68
$-\frac{5}{2}$

1.69
No tiene límite

1.70
$\frac{4}{3}$

1.71
No tiene límite

1.72
0

1.73
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

1.74
No tiene límite

1.75
a) $a = 2.164 \quad b = 2.918$
b) 4.91%
c) 5.08%

1.76
a) 12.5
b) 11.905

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1

$$f'(x) = 10x + 2$$

2.2

$$f'(x) = 21x^2 - 16x + 6$$

2.3

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

2.4

$$f'(x) = \frac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

2.5

$$f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{7x+1}}$$

2.6

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2-5}}$$

2.7

$$f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{9-3x^2}}$$

2.8

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

2.9

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$$

2.10

$$\frac{5bx^2 + 4ax}{2\sqrt{a+bx}}$$

2.11

$$4x^3$$

2.12

$$(8x+16)(x-5)^7 + (x-5)^8$$

2.13

$$6x^3\left(x^2-4\right)^2 + 2x\left(x^2-4\right)^3$$

2.14

$$4x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

2.15

$$\left(6x^4+6x\right)\left(x^2-4\right)^2 + 3x^2\left(x^2-4\right)^3$$

2.16

$$\frac{\sqrt{2x^6-16}}{x^2}$$

2.17

$$\frac{-3x\left(1-4x^2\right)^3 - 24x\left(2-3x^2\right)\left(1-4x^2\right)^2}{\sqrt{2-3x^2}}$$

2.18

$$\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

2.19

$$\frac{46x}{\left(4x^2+5\right)^2}$$

2.20

$$\frac{x^2+4}{4x^2}\sqrt{\frac{2x}{x^2-4}}$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.21

$$\frac{x^3+1}{x^2\sqrt{2x^3-1}}$$

2.22

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-7-3y}{-1-2y+3x}$$

2.23

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5x-y}{x+4y}$$

2.24

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2y-x}$$

2.25

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-1}{4y^3+1}$$

2.26

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^2-3x^2}{3y^2+2x^2y}$$

2.30

$x \operatorname{sen} x$

2.31

$$y'=\frac{(\cos y)(\cos x)-1}{(\operatorname{sen} y)(\operatorname{sen} x)+1}$$

2.32

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$$

2.33

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos y}$$

2.34

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}$$

2.40

0

2.42

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.43

$$\frac{\operatorname{arc\,cos} 3x^2\sqrt{1-9x^4}+6x^2}{\sqrt{1-9x^2}\left(\operatorname{arc\,cos} 3x^2\right)^2}$$

2.44

0

2.45

$$\frac{60x^2\left(\operatorname{arc\,sen} 4x^3\right)^4}{\sqrt{1-16x^6}}$$

2.46

$$\frac{2}{\left(2x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}$$

2.47

$$\frac{x}{\left(x^2+4\right)\sqrt{x^2+3}}$$

2.48

$$\frac{4x\left(1-\operatorname{arc\,cot} x^2\right)}{1+x^4}$$

2.49

$$\frac{2x^3+2x\sqrt{1-x^4}\operatorname{arc\,sen} x^2}{\sqrt{1-x^4}}$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.50

$$\frac{2}{\left(x^2-1\right)\sqrt{-1}}$$

2.51

$$\frac{-4x^2+\left(2x^4+4x^2+4\right)\operatorname{arc\,cot}\left(x^2+1\right)}{x^4+2x^2+2}$$

2.52

$$-2x$$

2.53

$$\frac{12x^4\ e^{3x^2}}{1+e^{6x^2}}+6x^2\cdot\arctan e^{3x^2}$$

2.54

$$\frac{5x}{\left(10x^2+14\right)\sqrt[4]{\ln^3\left(5x^2+7\right)}}$$

2.55

$$\frac{8x^2}{8x^3-5}$$

2.56

$$\frac{48x^3-14x}{\left(4x^2-1\right)\left(3x^2-1\right)}$$

2.57

$$\frac{-100x^3-42x}{\left(3-4x^2\right)\left(15x^2+18\right)}$$

2.58

$$\frac{180x^4-180x^2-24x}{\left(5x^3-2\right)\left(2x^2-3\right)}$$

2.59

$$\frac{21}{7x-2}$$

2.60

$$2e^{e^{2x}}e^{2x}$$

2.61

$$6xe^{3x^2}\left(\frac{1+\sqrt{1-9x^4}\operatorname{arc\,sen}\,3x^2}{\sqrt{1-9x^4}}\right)$$

2.62

$$20x^3\cos h\ 5x^4$$

2.63

$$-12x^{-4}\operatorname{sen}\,h\ 4x^{-3}$$

2.64

$$\frac{\sec h^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

2.65

$$2xe^{x^2}\operatorname{sen}\,h\,e^{x^2}$$

2.66

$$\frac{8\csc h^2\ln x^2}{x}\cot h^3\ln x^2$$

2.67

$$\frac{-8x^4\ \csc h^2\ 2x^4-2\cot h\ 2x^4}{x^3}$$

2.68

$$9x^4\cos h\,x^3+6x\operatorname{sen}\,h\,x^3$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.69

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8}{9\sqrt[3]{(2x-1)^5}}$$

2.70

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4\left(x^2+5\right)}{\sqrt[3]{\left(3x^2+5\right)^4}}$$

2.71

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

2.72

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 120(x-1)^3$$

2.73

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{432}{(3x-1)^4}$$

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1
$\theta = 36.86°$

3.2
$\theta = 45°$

3.3
$\theta = 45°$

3.4
$\theta = 0°$

3.5
$\theta_1 = \theta_2 = 45°$

3.6
$\theta_1 = \theta_2 = 81.87°$

3.7
$24x - y + 10 = 0$
$24x - y - 138.15 = 0$

3.8
$5x + y + 22 = 0$
$5x + y - 10 = 0$

3.9
$x - y + \sqrt{50} = 0$
$x - y - \sqrt{50} = 0$

3.10
$x + y - 6 = 0$
$x + y - 2 = 0$

3.11
$(5, 12)$

3.12
$\left(4, \frac{1}{3}\right)$

3.13
$81.87°$

3.14
$40.60°$

3.15
$\theta_1 = 90°$
$\theta_2 = 36.86°$

3.16
$\theta = 67.70°$

3.17
$\theta = 74.74°$

3.18

Máximo	Mínimo	Inflexión	Creciente	Decreciente	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo
$(2, 133)$	$(4, 125)$	$(3, 129)$	$x < 2$ $x > 4$	$2 < x < 4$	$x > 3$	$x < 3$

3.19

Máximo	Mínimo	Inflexión	Creciente	Decreciente	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo
$(-2, -168)$	$(6, 88)$	$(2, -40)$	$-2 < x < 6$	$x < -2$ $x > 6$	$x < 2$	$x > 2$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.20

Máximo	Mínimo	Inflexión	Creciente	Decreciente	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo
$(-1, 896)$	$(-5, 0)$ $(4, -729)$	$(-3.27, 404.1)$ $(1.93, -13.7)$	$-5 < x < -1$ $x > 4$	$x < -5$ $-1 < x < 4$	$x < -3.27$ $x > 1.93$	$-3.27 < x < 1.93$

3.21

Máximo	Mínimo	Inflexión	Creciente	Decreciente	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo
$(-7, 7987)$ $(5, 1075)$	$(1, -205)$	$(-3.86, 4492.9)$ $(3.19, 478.8)$	$x < -7$ $1 < x < 5$	$-7 < x < 1$ $x > 5$	$-3.86 < x < 3.19$	$x < -3.86$ $x > 3.19$

3.22

$x = y = 25$

3.23

a) $r = h = 2.73$

b) $\begin{cases} r = 2.17\ cm \\ h = 4.34\ cm \end{cases}$

3.24

$x = 100\ ,\ y = 200$

3.25

$0.5926\ m^3$

3.26

$r = 24.49\ cm$

$h = 34.64\ cm$

3.27

$x = 3.63\ m$

3.28

$\ell = 99.62\ m$

3.29

$x = 75\ m$

$y = 50\ m$

3.30

$x = 5.61\ m$

3.31

$$\text{Largo} = \frac{25}{4+\pi}$$

$$\text{Diámetro} = \frac{50}{4+\pi}$$

3.32

$$\frac{dx}{dt} = 1.5\ \ m/s$$

3.33

$$\frac{da}{dt} = 0.0183\ \ cm/s$$

$$\frac{dA}{dt} = 2.199\ \ cm^2/s$$

3.34

$$\frac{da}{dt} = -0.0125\ \ cm/s$$

$$\frac{dV}{dt} = -3.75\ \ cm^3/s$$

3.35

$$\frac{dA}{dt} = 150\pi\ \ m^2/s$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.36

a) $\frac{dr}{dr} = -1.086 \times 10^{-3} \quad m/min$

b) $\frac{dA}{dt} = -0.512 \quad m^2/min$

3.37

$\frac{dV}{dt} = -3.37 \times 10^{-5} \quad in^2/dia$

$\frac{dA}{dt} = -1.19 \times 10^{-5} \quad in^2/dia$

3.38

$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{3\pi} \quad cm/s$

$\frac{dr}{dt} = -\frac{2}{5\pi} \quad cm/s$

3.39

$\frac{dc}{dt} = -142 \quad Km/h$

3.40

$\frac{dV}{dt} = 0.07125\pi \quad cm^3/min$

$\frac{dA}{dt} = 0.055\pi \quad cm^2/min$

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Integral definida

Objetivos

- Analizar el concepto de integral definida.
- Aprender a resolver integrales definidas.
- Interpretar de forma geométrica una integral definida.
- Aplicar el concepto de integral definida a la resolución de problemas.
- Aplicar el concepto de integral definida a integrales impropias.

¿Qué sabes?

- ¿La integral definida representa una suma infinita de partes de ancho infinitesimal?
- ¿La integral definida omite el uso de la constante de integración?
- ¿Para resolver una integral definida, primero es necesario resolverla con el método de integración que le corresponda?
- ¿Al resolver una integral definida, todo el resultado se reduce a un valor numérico?
- ¿Qué es una integral impropia?

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

La integral definida

La integral definida tiene aplicaciones en diversas áreas del conocimiento. Dada su naturaleza, es que esta puede aplicarse tanto en geometría, física, economía e incluso biología y química. A continuación se listan las aplicaciones más conocidas de la integral definida.

- Cálculo de áreas de regiones planas.
- Cálculo de la longitud de arco de una curva plana.
- Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.
- Cálculo de momentos (fuerzas que ejercen ciertas masas respecto a un punto) y centros de masa o centroide (el punto en que un objeto se equilibra de manera horizontal).
- Encontrar la presión ejercida por un fluido.

Definición de integral definida

Sea $f(x)$ una función continua y positiva en el intervalo $[a,b]$; en este intervalo se define a la integral definida como el área limitada por las rectas $x=a$, $x=b$, el eje y la gráfica de $f(x)$, y se simboliza como:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

De manera gráfica, se representa de la siguiente manera:

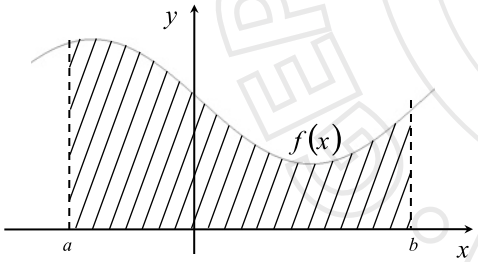


Figura A-1

Propiedades de la integral definida

Si $a>b$, entonces . $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Si $f(x)$ es integrable en el intervalo $[a,b]$ y $c\in[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Si ***k*** es una constante cualquiera, entonces $\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en $[a,b]$, entonces $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Límites de integración

Una vez resuelta la integral es necesario sustituir los límites de integración; primero, se sustituye el límite superior y después la resta con la sustitución del límite inferior. Para concluir, se realizan las operaciones.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_0^3 (4x^2 + 2x - 5)dx$$

Solución

Primero, la integral se resuelve término a término:

$$\int_0^3 (4x^2 + 2x - 5)dx = 4\int_0^3 x^2 dx + 2\int_0^3 x\,dx - \int_0^3 5dx = \left(\tfrac{4}{3}x^3 + x^2 - 5x\right)\Big|_0^3$$

Por tanto:

$$= \tfrac{4}{3}\underbrace{\left[(3)^3 - (0)^3\right]}_{27-0=27} + \underbrace{\left[(3)^2 - (0)^2\right]}_{9-0=9} - 5\underbrace{\left[(3) - (0)\right]}_{3-0=3} = \tfrac{4}{3}(27) + 9 - 5(3)$$

$$= 36 + 9 - 15$$

$$\int_0^3 (4x^2 + 2x - 5)dx = 30$$

Alerta

Una vez que se ha realizado la integración, enseguida se colocan los límites de integración sobre una línea vertical para su posterior sustitución.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{0.6}^{1.4} 3e^{2x}dx$$

Solución

En este caso, se determina la constante de la integral y se realiza el cambio de variable:

$$\int_{0.6}^{1.4} 3e^{2x}dx = 3\underbrace{\int_{0.6}^{1.4} e^{2x}dx}_{u=2x \quad du=2dx} = 3\left(\tfrac{1}{2}\right)\int_{0.6}^{1.4} e^{2x}2dx = \tfrac{3}{2}\int_{0.6}^{1.4} e^u du = \tfrac{3}{2}e^u\Big|_{0.6}^{1.4} = \tfrac{3}{2}e^{2x}\Big|_{0.6}^{1.4}$$

$$= \tfrac{3}{2}\left[e^{2(1.4)} - e^{2(0.6)}\right] = \tfrac{3}{2}\left[e^{2.8} - e^{1.2}\right] = \tfrac{3}{2}[16.444 - 3.320] = \tfrac{3}{2}[16.444 - 3.320]$$

$$\int_{0.6}^{1.4} 3e^{2x}dx = 19.686$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{1.6}^{4.6} 2x\left(7x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

Solución

Primero, al agrupar términos y resolver mediante un cambio de variable se tiene:

$$\int_{1.6}^{4.6} 2x\left(7x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx = 2\int_{1.6}^{4.6} \underbrace{\left(7x^2+1\right)}_{u}^{\frac{1}{2}}x\,dx$$

$$u = 7x^2+1 \qquad du = 14x\,dx$$

Luego, se completa la integral y se integra:

$$= 2\left(\tfrac{1}{14}\right)\int_{1.6}^{4.6} \underbrace{\left(7x^2+1\right)}_{u}^{\frac{1}{2}}\underbrace{14x\,dx}_{du} = \tfrac{1}{7}\int_{1.6}^{4.6} \underbrace{\left(7x^2+1\right)}_{u}^{\frac{1}{2}}\underbrace{14x\,dx}_{du}$$

$$= \tfrac{1}{7}\int_{1.6}^{4.6} u^{\frac{1}{2}}du = \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{2}{3}\right)u^{\frac{3}{2}}\Big|_{1.6}^{4.6} = \tfrac{2}{21}\left(7x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{1.6}^{4.6}$$

Por últimos, se sustituyen los límites de integración:

$$= \tfrac{2}{21}\left\{\left[7(4.6)^2+1\right]^{\frac{3}{2}} - \left[7(1.6)^2+1\right]^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$\int_{1.6}^{4.6} 2x\left(7x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx = 165.588$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{1}^{3} \frac{x\,dx}{3x^2-1}$$

Solución

La integral cumple con las condiciones para que dé como resultado un logaritmo natural; entonces, se realiza el cambio de variable:

$$\int_{1}^{3} \frac{x\,dx}{3x^2-1} = \int_{1}^{3} \frac{x\,dx}{\underbrace{3x^2-1}_{u}}$$

$$u = 3x^2-1 \qquad du = 6x\,dx$$

Luego, se completa la integral:

$$= \tfrac{1}{6}\int_{1}^{3} \frac{\overbrace{6x\,dx}^{du}}{\underbrace{3x^2-1}_{u}} = \tfrac{1}{6}\int_{1}^{3}\frac{du}{u} = \tfrac{1}{6}ln\left|u\right|_{1}^{3} = \tfrac{1}{6}ln\left|3x^2-1\right|_{1}^{3}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Por último, se sustituyen los límites de integración:

$$= \tfrac{1}{6}\left[ln\left| 3(3)^2 - 1 \right| - ln\left| 3(1)^2 - 1 \right| \right]$$

$$= \tfrac{1}{6}\left[ln\, 26 - ln\, 2 \right]$$

$$\int_1^3 \frac{x\,dx}{3x^2 - 1} = 0.427$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_1^3 \frac{5x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Solución

En este caso, la integral se expresa en forma entera y se resuelve mediante cambio de variable:

$$\int_1^3 \frac{5x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2} = 5\int_1^3 \underbrace{\left(x^2+1\right)^{-2}}_{u} x\,dx$$

$$u = x^2 + 1 \qquad du = 2x\,dx$$

Luego, se completa la integral:

$$= 5\left(\tfrac{1}{2}\right)\int_1^3 \underbrace{\left(x^2+1\right)^{-2}}_{u^{-2}}\, 2x\,dx = \tfrac{5}{2}\int_1^3 \underbrace{\left(x^2+1\right)^{-2}}_{u^{-2}}\, \underbrace{2x\,dx}_{du} = \tfrac{5}{2}\int_1^3 u^{-2}\,du$$

Por último, se regresa el cambio de variable y se sustituyen los límites de integración:

$$= \tfrac{5}{2}(-1)u^{-1}\Big|_1^3 = -\tfrac{5}{2}\left(x^2+1\right)^{-1}\Big|_1^3 = -\tfrac{5}{2}\left\{ \left[(3)^2+1\right]^{-1} - \left[(1)^2+1\right]^{-1} \right\}$$

$$= -\tfrac{5}{2}\left(10^{-1} - 2^{-1}\right)$$

$$\int_1^3 \frac{5x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2} = 1$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_0^{\pi} x \times sen\, x\, dx$$

Solución

En este caso, la integral se resuelve *por partes*, esto es se realizan los cambios de variable:

$$\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{sen\, x\, dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = x & dv = sen\, x\, dx \\ du = dx & v = -cos\, x \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} x \times sen\, x\, dx = -x \times cos\, x - \int_0^{\pi} (-cos\, x)dx = -x \times cos\, x + \underbrace{\int_0^{\pi} cos\, x\, dx}_{=sen\, x}$$

$$= -x \times cos\, x + sen\, x \Big|_0^{\pi}$$

Al final, se sustituyen los límites de integración:

$$= \left(-\pi \times \underbrace{cos\, \pi}_{=-1} + \underbrace{sen\, \pi}_{=0} \right) - \left(-0 \times \underbrace{cos\, 0}_{=1} + \underbrace{sen\, 0}_{=0} \right)$$

$$\int_0^{\pi} x \times sen\, x\, dx = \pi$$

Alerta

Siempre que se integren funciones trigonométricas, los límites de integración deben estar expresados en radianes.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_1^5 \left(2x + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

Solución

Separando en suma de integrales y la segunda integral en forma entera, se tiene:

$$\int_1^5 \left(2x + \frac{1}{x^2} \right) dx = 2\int_1^5 x\, dx + \int_1^5 x^{-2} dx = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)x^2 + (-1)x^{-1} \Big|_1^5$$

Y al simplificar y sustituir los límites de integración:

$$\int_1^5 \left(2x + \frac{1}{x^2} \right) dx = 2\int_1^5 x\, dx + \int_1^5 x^{-2} dx = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)x^2 + (-1)x^{-1} \Big|_1^5$$

$$= x^2 - x^{-1} \Big|_1^5 = \left[(5)^2 - (5)^{-1} \right] - \left[(1)^2 - (1)^{-1} \right] = \left(25 - \tfrac{1}{5}\right) - (1 - 1)$$

$$\int_1^5 \left(2x + \frac{1}{x^2} \right) dx = 24.8$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{0.2\pi}^{0.8\pi} sen\,5x \times cos\,4x\,dx$$

Solución

Empleando la identidad trigonométrica se tiene:

$$sen\,x \times cos\,y = \tfrac{1}{2}\left[sen\,(x-y) + sen\,(x+y)\right]$$

Y al sustituir y separar en dos integrales queda:

$$\int_{0.2\pi}^{0.8\pi} sen\,5x \times cos\,4x\,dx = \int_{0.2\pi}^{0.8\pi} \tfrac{1}{2}\left[sen\,(5x-4x) + sen\,(5x+4x)\right]dx$$

$$= \int_{0.2\pi}^{0.8\pi} \tfrac{1}{2}\left[sen\,x + sen\,9x\right]dx = \tfrac{1}{2}\int_{0.2\pi}^{0.8\pi} sen\,x\,dx + \tfrac{1}{2}\int_{0.2\pi}^{0.8\pi} sen\,9x\,dx$$

En este caso, la primera integral está completa, en tanto la segunda requiere que se complete; así:

$$= \tfrac{1}{2}\int_{0.2\pi}^{0.8\pi} sen\,x\,dx + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{9}\right)\int_{0.2\pi}^{0.8\pi} sen\,9x\,(9dx)$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2}cos\,x - \tfrac{1}{18}cos\,9x\right]_{0.2\pi}^{0.8\pi}$$

Al final, se sustituyen los límites de integración:

$$= \left[-\tfrac{1}{2}cos\,(0.8\pi) - \tfrac{1}{18}cos\,9(0.8\pi)\right] - \left[-\tfrac{1}{2}cos\,(0.2\pi) - \tfrac{1}{18}cos\,9(0.2\pi)\right]$$

$$= \left[\underbrace{-\tfrac{1}{2}cos\,(0.8\pi)}_{0.404} \underbrace{-\tfrac{1}{18}cos\,9(0.8\pi)}_{-0.045}\right] + \left[\underbrace{\tfrac{1}{2}cos\,(0.2\pi)}_{0.404} + \underbrace{\tfrac{1}{18}cos\,9(0.2\pi)}_{0.045}\right]$$

$$= (0.404 + 0.045) + (0.404 + 0.045)$$

$$\int_{0.2\pi}^{0.8\pi} sen\,5x \times cos\,4x\,dx = 0.898$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} x^2 cos\,x\,dx$$

Solución

Integrando *por partes*:

$$\int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} \underbrace{x^2}_{u}\ \underbrace{cos\,x\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = x^2 & dv = cos\,x\,dx \\ du = 2x\,dx & v = sen\,x \end{cases}$$

$$\int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} x^2 cos\,x\,dx = x^2 sen\,x - \int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} 2x \times sen\,x\,dx$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

La integral resultante, aunque más sencilla que la original, también requiere integrarse *por partes*:

$$\int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} x^2 \cos x\,dx = x^2 sen\,x - \int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} \underbrace{2x}_{u}\ \underbrace{sen\,x\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = 2x & dv = sen\,x\,dx \\ du = 2dx & v = -\cos x \end{cases}$$

$$= x^2 sen\,x - \left[-2x \times \cos x - \int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} (-2\cos x)dx \right]$$

Simplificando resulta:

$$= x^2 sen\,x + 2x \times \cos x - 2\int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} \cos x\,dx$$

La integral resultante es inmediata:

$$= \left[x^2 sen\,x + 2x \times \cos x - 2sen\,x \right]_{-1.5\pi}^{-0.5\pi}$$

Al sustituir los límites de integración se tiene:

$$= \underbrace{\left[(-0.5\pi)^2 sen\,(-0.5\pi) + 2(-0.5\pi) \times \cos(-0.5\pi) - 2sen\,(-0.5\pi) \right]}_{Límite\ superior}$$

$$- \underbrace{\left[(-1.5\pi)^2 sen\,(-1.5\pi) + 2(-1.5\pi) \times \cos(-1.5\pi) - 2sen\,(-1.5\pi) \right]}_{Límite\ inferior}$$

Al realizar las operaciones con el límite superior:

$$= \underbrace{(-0.5\pi)^2}_{=2.467}\ \underbrace{sen\,(-0.5\pi)}_{=-1} + \underbrace{2(-0.5\pi)}_{=-\pi}\underbrace{\cos(-0.5\pi)}_{=0} - \underbrace{2sen\,(-0.5\pi)}_{=-2}$$

$$= 2.467(-1) - (-2) = -2.467 + 2$$

$$= -0.467$$

Y al efectuar las operaciones con el límite inferior:

$$= \underbrace{(-1.5\pi)^2}_{=22.207}\ \underbrace{sen\,(-1.5\pi)}_{=1} + \underbrace{2(-1.5\pi)}_{=-9.425}\underbrace{\cos(-1.5\pi)}_{=0} - \underbrace{2sen\,(-1.5\pi)}_{=2}$$

$$= 22.207 - 2 = 20.207$$

Así, al juntar los resultados de los dos límites queda:

$$= -0.467 - 20.207$$

$$\int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} x^2 \cos x\,dx = 20.674$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{1.25}^{3.5} x^2 ln\, x\, dx$$

Solución

En este caso, la integral se resuelve *por partes*; por tanto, se eligen variables:

$$\int_{1.25}^{3.5} \underbrace{ln\, x}_{u}\, \underbrace{x^2\, dx}_{du}$$

$$\begin{cases} u = ln\,|x| & dv = x^2 dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

Luego, se sustituyen los cambios de variable:

$$\int_{1.25}^{3.5} x^2 ln\, x\, dx = \tfrac{1}{3}x^3 ln\,|x|\Big|_{1.25}^{3.5} - \int_{1.25}^{3.5} \tfrac{1}{3}x^3 \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{3}x^3 ln\,|x|\Big|_{1.25}^{3.5} - \int_{1.25}^{3.5} \tfrac{1}{3}x^2 dx$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 ln\,|x|\Big|_{1.25}^{3.5} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)x^3\Big|_{1.25}^{3.5} = \tfrac{1}{3}x^3 ln\,|x|\Big|_{1.25}^{3.5} - \tfrac{1}{9}x^3\Big|_{1.25}^{3.5}$$

Por último, se sustituyen los límites de integración:

$$= \left[\tfrac{1}{3}(3.5)^3\, ln\,|3.5| - \tfrac{1}{9}(3.5)^3\right] - \left[\tfrac{1}{3}(1.25)^3\, ln\,|1.25| - \tfrac{1}{9}(1.25)^3\right]$$

$$= 13.140 - (-0.072)$$

$$\int_{1.25}^{3.5} x^2 ln\, x\, dx = 13.212$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{1.5}^{8} \frac{5x\, dx}{x^2 - 1}$$

Solución

Esta integral se resuelve mediante un cambio de variable:

$$\int_{1.5}^{8} \frac{5x\, dx}{x^2 - 1} = 5\int_{1.5}^{8} \frac{x\, dx}{\underbrace{x^2 - 1}_{u}}$$

$$u = x^2 - 1 \qquad du = 2x\, dx$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Enseguida, la integral se completa y se expresa en función de u:

$$\int_{1.5}^{8}\frac{5x\,dx}{x^2-1}=5\left(\tfrac{1}{2}\right)\int_{1.5}^{8}\frac{2x\,dx}{\underbrace{x^2-1}_{u}}=\tfrac{5}{2}\int_{1.5}^{8}\frac{\overbrace{2x\,dx}^{du}}{\underbrace{x^2-1}_{u}}=\tfrac{5}{2}\int_{1.5}^{8}\frac{du}{u}$$

La integral se resuelve con fórmula y se regresa el cambio de variable:

$$=\tfrac{5}{2}\int_{1.5}^{8}\frac{du}{u}=\tfrac{5}{2}ln\left|u\right|_{1.5}^{8}=\tfrac{5}{2}ln\left|x^2-1\right|_{1.5}^{8}$$

Al sustituir los límites de integración queda:

$$=\tfrac{5}{2}\left[ln\left|(8)^2-1\right|-ln\left|(1.5)^2-1\right|\right]$$

$$\int_{1.5}^{8}\frac{5x\,dx}{x^2-1}=9.799$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{0.5}^{3}\frac{(x+1)dx}{x^3+x^2}$$

Solución

Esta integral se resuelve por fracciones parciales y pertenece al caso de factores lineales repetidos:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2}=\frac{x+1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$$

Al sumar las fracciones se tiene:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2}=\frac{x+1}{x^2(x+1)}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

En tanto, al igualar numeradores y suprimir signos de agrupación se tiene:

$$Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2=x+1$$

$$Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2=x+1$$

Ahora, al factorizar con respecto a x e igualar coeficientes queda:

$$x^2(A+C)+x(A+B)+B=x+1$$

$$A+C=0 \qquad (I)$$

$$A+B=1 \qquad (II)$$

$$B=1 \qquad (III)$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

De la ecuación III se obtiene el valor de la primera constante:

$$B = 1$$

Sustituyendo en la ecuación II:

$$A + \underbrace{B}_{=1} = 1$$

$$A + 1 = 1$$

$$A = 0$$

Y mediante la ecuación I:

$$\underbrace{A}_{=0} + C = 0$$

$$C = 0$$

Por último, al sustituir las tres constantes en las fracciones parciales se tiene:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{0}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} = \frac{1}{x^2}$$

Por tanto, la integral resultante es:

$$\int_{0.5}^{3} \frac{(x+1)dx}{x^3 + x^2} = \int_{0.5}^{3} \frac{dx}{x^2} = \int_{0.5}^{3} x^{-2} dx = -x^{-1}\Big|_{0.5}^{3}$$

Por último, se sustituyen los límites de integración y se realizan las operaciones:

$$= -\left[(3)^{-1} - (0.5)^{-1}\right] = -\left[\left(\tfrac{1}{3}\right) - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}\right] = -\left[\tfrac{1}{3} - 2\right] = -\left(\tfrac{5}{3}\right)$$

$$\int_{0.5}^{3} \frac{(x+1)dx}{x^3 + x^2} = \frac{5}{3}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Integrales impropias

Una integral impropia es una integral definida cuando uno o ambos de sus límites de integración tienden a infinito o a menos infinito . No obstante, una integral también es impropia cuando la función que se integra en forma definida no es continua en todo el intervalo de integración ; esto es, si dicha función al integrarse en dicho intervalo presenta alguna asíntota vertical.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{1} e^{x}\,dx$$

Solución

Esta integral impropia se integra como una integral de tipo exponencial; así, la integral está completa:

$$\int_{-\infty}^{1} e^{x}\,dx = e^{x}\Big|_{-\infty}^{1} = e^{1} - e^{-\infty} = e^{1} - \frac{1}{e^{\infty}}$$

Así:

$$= e^{1} - \underbrace{\frac{1}{e^{\infty}}}_{\to 0} = e^{1}$$

$$\int_{-\infty}^{1} e^{x}\,dx = e = 2.718$$

Alerta

Cuando una función exponencial tiene como exponente el término infinito , esta, a su vez, también tenderá al infinito; sin embargo, si la función exponencial se representa en la forma , esta tiende a cero.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral impropia:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$$

Solución

Primero, se completa la integral y esta se expresa en función de u para su integración:

$$\int_{0}^{\infty} e^{\overbrace{-x}^{u}}\,dx$$

$$u = -1 \qquad du = -dx$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = -\int_{0}^{\infty} e^{\overbrace{-x}^{u}} \underbrace{(-dx)}_{du} = -\int_{0}^{\infty} e^{u}\,du = -e^{u}\Big|_{0}^{\infty} = -e^{-x}\Big|_{0}^{\infty}$$

Y se sustituyen los límites de integración:

$$-e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} = -\left[e^{-x} - e^{0}\right] = -\underbrace{e^{-x}}_{\to 0} + e^{0}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = 1$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral impropia:

$$\int_0^{\infty} x \times e^{-2x}\,dx$$

Solución

Esta integral se resuelve *por partes*; por tanto, al realizar los cambios de variable se tiene:

$$\begin{cases} u = x & dv = e^{-2x}dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} x \times e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x \times e^{-2x}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}x \times e^{-2x}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}x \times e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\Big|_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{2}x \times e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^{\infty}$$

Por último, se sustituyen los límites de integración:

$$= -\frac{1}{2}(\infty)\times\underbrace{e^{-2(\infty)}}_{\to 0} + \frac{1}{4}\underbrace{e^{-2(\infty)}}_{\to 0} - \left[-\frac{1}{2}(0)\times e^{-2(0)} + \frac{1}{4}e^{-2(0)}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(0)\times e^{-2(0)}}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{4}e^{-2(0)}}_{=\frac{1}{4}}$$

$$\int_0^{\infty} x \times e^{-2x}dx = \frac{1}{4}$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{0} x \times e^{-x^2}dx$$

Solución

Primero, la integral se resuelve mediante un cambio de variable:

$$\int_{-\infty}^{0} x \times e^{\overbrace{-x^2}^{u}}dx$$

$$u = -x^2 \qquad du = -2x\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} x \times e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}(-2x\,dx) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{u}\,du$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Al final, se integra y se sustituyen los límites de integración:

$$= -\tfrac{1}{2}e^{u}\Big|_{-\infty}^{0} = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= -\tfrac{1}{2}e^{-(0)^2} - \left(-\tfrac{1}{2}e^{-(\infty)^2}\right) = -\tfrac{1}{2}\underbrace{e^{-(0)^2}}_{=1} + \tfrac{1}{2}\underbrace{e^{-(\infty)^2}}_{\to 0}$$

$$\int_{-\infty}^{0} x \times e^{-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral impropia:

$$\int_{0}^{\infty} x^2 \times e^{-x}\,dx$$

Solución

Esta integral se resuelve *por partes*:

$$\int_{0}^{\infty} \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{e^{-x}dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = x^2 & dv = e^{-x}dx \\ du = 2x\,dx & v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^2 \times e^{-x}dx = x^2 \times \left(-e^{-x}\right) - \int_{0}^{\infty} 2x\left(-e^{-x}\right)dx$$

Al suprimir los paréntesis se tiene:

$$= -x^2 \times e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} 2x \times e^{-x}dx$$

Ahora, la integral resultante se vuelve a resolver *por partes*:

$$= -x^2 \times e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \underbrace{2x}_{u}\,\underbrace{e^{-x}dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = 2x & dv = e^{-x}dx \\ du = 2dx & v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$= -x^2 \times e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \underbrace{2x}_{u}\,\underbrace{e^{-x}dx}_{dv} = -x^2 \times e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} + \left[2x\left(-e^{-x}\right)_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} 2\left(-e^{-x}\right)dx\right]$$

$$= -x^2 \times e^{-x} - 2xe^{-x}\Big|_{0}^{\infty} + 2\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx$$

Y la última integral ya es inmediata:

$$= -x^2 \times e^{-x} - 2x \times e^{-x} - 2e^{-x}\Big|_{0}^{\infty}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Por último, se sustituyen los límites de integración:

$$= \underbrace{-(\infty)^2 \times e^{-(\infty)} - 2(\infty)e^{-(\infty)} - 2e^{-(\infty)}}_{®} - \left[-(0)^2 \times e^{-(0)} - 2(0)\times e^{-(0)} - 2e^{-(0)}\right]$$

$$= \underbrace{(0)^2 \times e^{-(0)} + 2(0)\times e^{-(0)}}_{=0} + 2\underbrace{e^{-(0)}}_{=1}$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral impropia:

$$\int_0^{\infty} 2^{-x}\,dx$$

Solución

En este caso, la integral corresponde a una función exponencial en la cual la base es el número dos; por tanto, se resuelve con la fórmula:

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{ln\,|a|}$$

Enseguida, se realiza el cambio de variable:

$$\int_0^{\infty} 2^{\overbrace{-x}^{u}}\,dx$$

$$u = -x \qquad du = -dx$$

Completando la integral y aplicando la fórmula se tiene:

$$\int_0^{\infty} 2^{-x}\,dx = -\int_0^{\infty} 2^{\overbrace{-x}^{u}}(-dx) = -\int_0^{\infty} 2^u\,du = -\left.\frac{2^u}{ln\,2}\right|_0^{\infty}$$

Después, se regresa el cambio de variable y se sustituyen los límites de integración:

$$= -\left.\frac{2^{-x}}{ln\,2}\right|_0^{\infty} = -\frac{1}{ln\,2}\left[2^{-\infty} - 2^0\right] = -\frac{1}{ln\,2}\left[2^{-\infty} - 2^0\right]$$

Por último, se sustituyen los límites de integración:

$$\int_0^{\infty} 2^{-x}\,dx = \frac{1}{ln\,2}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Integrales múltiples

Las integrales múltiples suelen emplearse cuando la función a integrar depende de dos o más variables; por ejemplo, $f(x, y)$ o $f(x, y, z)$.

En el caso de las integrales dobles, su aplicación más simple es para hallar el área de una región del plano . Esta área está dada por una integral del tipo:

$$A = \iint dx\, dy = \iint dy\, dx$$

Con los límites de integración apropiados, las integraciones pueden realizarse primero con respecto a y después con respecto a ; esto es:

$$A = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy\, dx$$

Integrales iteradas

Una integral iterada es aquella que se resuelve de forma sucesiva. Esto significa que primero se integra con respecto a , y el resultado obtenido se integra con respecto a o viceversa:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dx \right) dy$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral doble:

$$\int_{-1}^{3} \int_{x^2}^{x} 7\, dy\, dx$$

Solución

Primero, se integra con respecto a y:

$$\int_{-1}^{3} \int_{x^2}^{x} 7\, dy\, dx = \int_{-1}^{3} \left(\int_{x^2}^{x} 7\, dy \right) dx$$

Por simplicidad, en este caso se extrae la integral que se encuentra dentro del paréntesis y se integra:

$$\int_{x^2}^{x} 7\, dy = 7y \Big|_{x^2}^{x} = 7\left[(x) - \left(x^2\right) \right] = 7x - 7x^2$$

Luego, el resultado obtenido se integra con respecto a x:

$$\int_{-1}^{3} \left(7x - 7x^2\right) dx = \tfrac{7}{2}x^2 - \tfrac{7}{3}x^3 \Big|_{-1}^{3}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Enseguida, se sustituyen los límites de integración y se realizan las operaciones correspondientes:

$$= \tfrac{7}{2}\left[(3)^2 - (-1)^2\right] - \tfrac{7}{3}\left[(3)^3 - (-1)^3\right]$$

$$= \tfrac{7}{2}(8) - \tfrac{7}{3}(28) = \tfrac{28}{2} - \tfrac{196}{3}$$

$$\int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{x} 7\,dy\,dx = -\tfrac{112}{3}$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral doble:

$$\int_{-3}^{3}\int_{2x^2}^{3x-5x^2} 5\,dy\,dx = \int_{-3}^{3}\left[5\int_{2x^2}^{3x-5x^2} dy\right]dx$$

Solución

Primero, se resuelve para y:

$$5\int_{2x^2}^{3x-5x^2} dy = 5\left[y\right]_{2x^2}^{3x-5x^2} = 5\left[(3x-5x^2) - (2x^2)\right]$$

$$= 5\left[3x - 5x^2 - 2x^2\right] = 5\left[3x - 7x^2\right] = 15x - 35x^2$$

$$5\int_{2x^2}^{3x-5x^2} dy = 15x - 35x^2$$

Enseguida, se integra con respecto a x:

$$\int_{-3}^{3}(15x - 35x^2)dx = \left[\tfrac{15}{2}x^2 - \tfrac{35}{3}x^3\right]_{-3}^{3}$$

$$= \tfrac{15}{2}\left[(3)^2 - (-3)^2\right] - \tfrac{35}{3}\left[(3)^3 - (-3)^3\right]$$

$$= \tfrac{15}{2}\left[9 - 9\right] - \tfrac{35}{3}\left[27 - (-27)\right] = -\tfrac{35}{3}(54)$$

$$\int_{-3}^{3}\int_{2x^2}^{3x-5x^2} 5\,dy\,dx = -630$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral doble:

$$\int_{2}^{9}\int_{4}^{5y} 7x\,dx\,dy$$

Solución

Primero, se integra con respecto a x:

$$\int_{4}^{5y} 7x\,dx = \left[\tfrac{7}{2}x^2\right]_{4}^{5y} = \tfrac{7}{2}\left[(5y)^2 - (4)^2\right] = \tfrac{7}{2}\left[25y^2 - 16\right] = \tfrac{175}{2}y^2 - 56$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

El resultado obtenido se integra con respecto a y:

$$\int_2^9 \left(\tfrac{175}{2} y^2 - 56\right) dy = \tfrac{175}{2}\int_2^9 y^2\, dy - 56\int_2^9 dy$$

$$= \left[\tfrac{175}{2}\left(\tfrac{1}{3}\right) y^3 - 56y\right]_2^9 = \left[\tfrac{175}{6} y^3 - 56y\right]_2^9$$

Después, se sustituyen los límites de integración:

$$= \tfrac{175}{6}\left[(9)^3 - (2)^3\right] - 56[(9) - (2)] = \tfrac{175}{6}(729 - 8) - 56(9 - 2)$$

$$= \tfrac{175}{6}(721) - 56(7) = \tfrac{126\,175}{6} - 392$$

$$\int_2^9 \int_4^{5y} 7x\, dx\, dy = \frac{123\,823}{6}$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral doble:

$$\int_{-1}^{7} \int_{2}^{3x} (x + y)\, dy\, dx$$

Solución

Primero, se integra y, y se sustituyen límites de integración:

$$\int_2^{3x} (x + y)\, dy = \int_2^{3x} x\, dy + \int_2^{3x} y\, dy = x\int_2^{3x} dy + \int_2^{3x} y\, dy$$

$$\left[x \times y + \tfrac{1}{2} y^2\right]_2^{3x} = x[(3x) - (2)] + \tfrac{1}{2}\left[(3x)^2 - (2)^2\right] = x(3x - 2) + \tfrac{1}{2}(9x^2 - 4)$$

$$= 3x^2 - 2x + \tfrac{9}{2} x^2 - 2 = \tfrac{15}{2} x^2 - 2x - 2$$

Luego, el resultado se integra con respecto a x:

$$\int_{-1}^{7} \left(\tfrac{15}{2} x^2 - 2x - 2\right) dx = \int_{-1}^{7} \tfrac{15}{2} x^2\, dx - \int_{-1}^{7} 2x\, dx - \int_{-1}^{7} 2\, dx =$$

$$= \left[\tfrac{15}{2}\left(\tfrac{1}{3}\right) x^3 - 2\left(\tfrac{1}{2}\right) x^2 - 2x\right]_{-1}^{7} = \left[\tfrac{15}{6} x^3 - x^2 - 2x\right]_{-1}^{7}$$

Por último, se sustituyen los límites de integración:

$$= \tfrac{15}{6}\left[(7)^3 - (-1)^3\right] - \left[(7)^2 - (-1)^2\right] - 2[(7) - (-1)]$$

$$= \tfrac{15}{6}[343 - (-1)] - (49 - 1) - 2(7 + 1)$$

$$= \tfrac{15}{6}(343 + 1) - 48 - 2(8) = \tfrac{15}{6}(344) - 48 - 16$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral doble:

$$\int_{-3}^{5}\int_{-4}^{5}\left(1-3x^2-8y^2\right)dy\,dx$$

Solución

Primero, se integra con respecto a y:

$$\int_{-4}^{5}\left(1-3x^2-8y^2\right)dy=\int_{-4}^{5}\left(1-3x^2\right)dy-\int_{-4}^{5}8y^2dy$$

$$=\left[\left(1-3x^2\right)y-\tfrac{8}{3}y^3\right]_{-4}^{5}$$

Después, se sustituyen los límites de integración:

$$=\left(1-3x^2\right)[(5)-(-4)]-\tfrac{8}{3}\left[(5)^3-(-4)^3\right]$$

$$=\left(1-3x^2\right)(5+4)-\tfrac{8}{3}[125-(-64)]=\left(1-3x^2\right)(9)-\tfrac{8}{3}(189)$$

$$=9-27x^2-504=-27x^2-495$$

Al final, se integra el resultado con respecto a x:

$$\int_{-3}^{5}\left(-27x^2-495\right)dx=\left[-27\left(\tfrac{1}{3}\right)x^3-495x\right]_{-3}^{5}$$

$$=\left[-9x^3-495x\right]_{-3}^{5}=-9\left[(5)^3-(-3)^3\right]-495[(5)-(-3)]$$

$$=-9[125-(-27)]-495(5+3)=-9(125+27)-495(8)$$

$$=-9(152)-3\,960=-1\,368-3\,960$$

$$\int_{-3}^{5}\int_{-4}^{5}\left(1-3x^2-8y^2\right)dy\,dx=-5\,328$$

Problema resuelto.

Resolver la siguiente integral doble:

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}\partial}\cos 3x\,dx\,dy$$

Solución

En este caso, primero se integra con respecto a x mediante cambio de variable:

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}\partial}\cos 3x\,dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}\partial}\cos\underbrace{3x}_{u}dx$$

$$u=3x \qquad du=3dx$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Después, se completa la integral:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} cos\ 3x\ dx = \left(\tfrac{1}{3}\right)\int \underbrace{cos\ 3x}_{cos\ u}\ \underbrace{3\,dx}_{du} = \tfrac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} cos\ u\ du$$

$$= \left[-\tfrac{1}{3}\,sen\ u\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \left[-\tfrac{1}{3}\,sen\ 3x\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

Se sustituyen los límites de integración:

$$= -\tfrac{1}{3}\left[sen\ 3\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) - sen\ 3(0)\right] = -\tfrac{1}{3}(-1-0)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\delta} cos\ 3x\,dx = \tfrac{1}{3}$$

Por último, se integra con respecto a y:

$$\int_{-2}^{2}\left(\tfrac{1}{3}\right)dy = \tfrac{1}{3}\int_{-2}^{2} dy = \left[\tfrac{1}{3}\,y\right]_{-2}^{2} = \tfrac{1}{3}\left[(2)-(-2)\right] = \tfrac{1}{3}(2+2)$$

$$\int_{-2}^{2}\int_0^{\frac{1}{2}\delta} cos\ 3x\,dx\,dy = \tfrac{4}{3}$$

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas para resolver

Resolver las siguientes integrales definidas:

1. $\int_{1.1}^{3.5} 4x^2\sqrt{3x^3+2}\,dx = 438.002$
2. $\int_{0}^{\pi} x \times sen\, x\,dx = \pi$
3. $\int_{-3}^{2} -e^{-x}dx = -19.950$
4. $\int_{0.1}^{0.7} \frac{x^2\,dx}{1-2x^3} = 0.192$
5. $\int_{\frac{1}{16}\pi}^{\frac{3}{16}\pi} x \times cos\left(7x^2+2\right)dx = -0.123$ (Problema reto)
6. $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{10}\pi} 4e^{2x} \times sen\, e^{2x}dx = 0.276$ (Problema reto)
7. $\int_{0}^{\frac{1}{5}\pi} 2x \times e^{x^2} cos\, e^{x^2}dx = 0.154$ (Problema reto)
8. $\int_{0}^{2\pi} sen^2\, 5x\,dx = \pi$ (Problema reto)
9. $\int_{2.8}^{5.1} 3x\sqrt{2x-5}\,dx = 46.897$
10. $\int_{1.6}^{4.6} 2x\left(7x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx = 165.588$
11. $\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{3}x}dx = 3$
12. $\int_{-\infty}^{0} x \times e^{x}dx = -1$
13. $\int_{0}^{\infty} x \times e^{-x}dx = 1$
14. $\int_{-\infty}^{\infty} x \times e^{-x^2}dx = 0$
15. $\int_{-\infty}^{0} x^2 \times e^{x}dx = 2$
16. $\int_{0}^{\infty} 3x^2e^{-4x}dx =$
17. $\int_{0}^{\infty} 3^{-x}dx = 0.910$
18. $\int_{0}^{\infty} x \times 2^{-x}dx = 2.081$ (Problema reto)
19. $\int_{-\infty}^{0} x \times 5^{-x^2}dx = 0.311$ (Problema reto)
20. $\int_{-5}^{4}\int_{-x}^{6x^2} 3y\,dy\,dx = \frac{447\,147}{10}$
21. $\int_{-1}^{1}\int_{3}^{9}\left(5xy-4x^2y^2\right)dx\,dy = -624$
22. $\int_{0}^{1}\int_{-x}^{x}\sqrt{x+y}\,dy\,dx = \frac{8\sqrt{2}}{15}$ (Problema reto)
23. $\int_{0}^{4}\int_{0}^{\pi} y \times cos\, y\,dy\,dx = -8$
24. $\int_{1}^{e}\int_{0}^{Ln\,x} y\,dy\,dx = e-1$ (Problema reto)
25. $\int_{2}^{4}\int_{1}^{5}\left(x^2+y^2\right)dy\,dx = -8$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Referencias bibliográficas

Leithold, Louis, *El cálculo*,7ª edición, Oxford University Press.México.
Purcell, Edwin J., *Cálculo*, Pearson Educación. México
Ayres, Frank Jr., *Cálculo diferencial e integral*, 3ª edición, McGraw-Hill. México

Referencias electrónicas

http://www.itpuebla.edu.mx/Alumnos/Cursos_Tutoriales/Carlos_Garcia_Franchini/Matematicas/TesisMartha/ejercicios,%20problemas%20y%20sol/Mis_7.htm#Ejercicio7_1_11

http://ed21.webcindario.com/CalculoIntegral/propiedades_de_la_integral%20_definida.htm

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1

$$2^2+3^2+4^2+5^2 \qquad \sum_{x=2}^{5} x^2 = 54$$

1.2

$$\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{6} \qquad \sum_{j=1}^{6}\sqrt[3]{j} = 8.8176$$

1.3

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \qquad \sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k} = \frac{761}{280}$$

1.4

$$\frac{\sqrt{2}}{2^2}+\frac{\sqrt{3}}{3^2}+\frac{\sqrt{4}}{4^2}+\frac{\sqrt{5}}{5^2}+\frac{\sqrt{6}}{6^2} \qquad \sum_{k=2}^{8}\frac{\sqrt{x}}{x^2} = 0.828$$

1.5

$$\sum_{i=0}^{6}\frac{2}{i+2} = 3.436$$

1.6

$$\sum_{n=0}^{4}\frac{n}{3n+2} = 1.008$$

1.7

$$\sum_{x=1}^{6}\frac{5x}{4x-1} = 8.412$$

1.8

$$\sum_{n=1}^{6}\frac{1}{n(2n-1)} = 1.306$$

1.9

$$\sum_{k=0}^{5}\frac{7-4k^2}{3+2k^2} = -2.649$$

1.10

$$\sum_{i=0}^{4}\frac{4}{8-7i} = 3.326$$

1.11

$$\sum_{n=1}^{6}\frac{5n}{4n+2} = 6.306$$

1.12

$$\sum_{k=0}^{5}\frac{k+1}{2k-1} = 4.181$$

1.13

$$\sum_{x=1}^{7}\frac{x^2+1}{x} = 30.593$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1

$$\int \frac{2}{x^2}dx = \frac{-2}{x} + c$$

2.2

$$\int \left(4x - \frac{5}{x^3}\right)dx = 2x^2 + \frac{5}{2x^2} + c$$

2.3

$$\int \frac{4x^3 - 2x^4}{x^6}dx = \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x} + c$$

2.4

$$\int \sqrt[3]{x^2}\ dx = \tfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$$

2.5

$$\int 5\sqrt[4]{x^3}\ dx = \tfrac{20}{7}\sqrt[4]{x^7} + c$$

2.6

$$\int \sqrt{x}\,(2x-1)\,dx = \tfrac{4}{5}\sqrt{x^5} - \tfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

2.7

$$\int \sqrt[4]{x^5}\left(1-x^2\right)dx = \tfrac{4}{9}\sqrt[4]{x^9} - \tfrac{4}{17}\sqrt[4]{x^{17}} + c$$

2.8

$$\int t^3\left(\sqrt[4]{t^5} + \sqrt{t^5}\right)dt = \tfrac{2}{13}\sqrt{t^{13}} + \tfrac{4}{21}\sqrt[4]{t^{21}} + c$$

2.9

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3}} = -\frac{3}{\sqrt{x^3}} + c$$

2.10

$$\int \left(\sqrt[5]{x^6} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}}\right)dx = \tfrac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}} + \frac{5}{\sqrt[5]{x}} + c$$

2.11

$$\int \sqrt[4]{1-2x}\ dx = -\tfrac{2}{5}\sqrt[4]{(1-2x)^5} + c$$

2.12

$$\int (2-x)^3\,dx = -\tfrac{1}{4}(2-x)^4 + c$$

2.13

$$\int (4x+3)^{\frac{4}{3}}\,dx = \tfrac{3}{28}(4x+3)^{\frac{7}{3}} + c$$

2.14

$$\int \frac{5dx}{(7-2x)^3} = \frac{5}{4(7-2x)^2} + c$$

2.15

$$\int \sqrt{4x+8}\ dx = \tfrac{4}{3}\sqrt{(4x+8)^3} + c$$

2.16

$$\int \frac{4\,dx}{\sqrt[3]{2x-5}} = 3\sqrt[3]{(2x-5)^2} + c$$

2.17

$$\int 2x\sqrt{3x^2-1}\ dx = \tfrac{2}{9}\sqrt{(3x^2-1)^3} + c$$

2.18

$$\int 2x\left(7x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx = \tfrac{2}{21}\left(7x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

2.19

$$\int 4r^2\sqrt{3r^3+2}\ dr = \tfrac{8}{27}\sqrt{(3r^3+2)^3} + c$$

2.20

$$\int \frac{2t\,dt}{\sqrt[4]{1-t^2}} = -\tfrac{4}{3}\sqrt[4]{(1-t^2)^3} + c$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.21

$$\int \frac{8x^2\,dx}{\left(1-x^3\right)^3} = \frac{4}{3\left(1-x^3\right)^2} + c$$

2.22

$$\int 4x^3 \sqrt[3]{\left(2x^4-4\right)^2}\,dx = \tfrac{3}{10}\sqrt[3]{\left(2x^4-4\right)^5} + c$$

2.23

$$\int (4x-1)\left(6x^2-3x+5\right)^{\frac{8}{5}}\,dx = \tfrac{5}{39}\left(6x^2-3x+5\right)^{\frac{13}{5}} + c$$

2.24

$$\int (5x^2+1)\sqrt{5x^3+3x-2}\,dx = \tfrac{2}{9}\sqrt{\left(5x^3+3x-2\right)^3} + c$$

2.25

$$\int 7e^{3x}\,dx = \tfrac{7}{3}e^{3x} + c$$

2.26

$$\int 2e^{-x}\,dx = -2e^{-x} + c$$

2.27

$$\int x e^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}e^{x^2} + c$$

2.28

$$\int 4x^2 e^{2x^3}\,dx = \tfrac{2}{3}e^{2x^3} + c$$

2.29

$$\int 5xe^{-3x^2}\,dx = -\tfrac{5}{6}e^{-3x^2} + c$$

2.30

$$\int \frac{5\,dt}{e^{3t}} = -\frac{5}{3e^{3t}} + c$$

2.31

$$\int \frac{2dx}{e^{6x}} = -\frac{1}{3e^{6x}} + c$$

2.32

$$\int \frac{5x}{e^{3x^2}}dx = -\frac{5}{6e^{3x^2}} + c$$

2.33

$$\int \frac{7x^3}{e^{x^4}}dx = -\frac{7}{4e^{x^4}} + c$$

2.34

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{e^{8x}}} = -\frac{3}{8\sqrt[3]{e^{8x}}} + c$$

2.35

$$\int \frac{3e^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} =$$

2.36

$$\int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1} = ln\left|\frac{1}{e^{-x}+1}\right| + c$$

2.37

$$\int 2x\left(e^{3x^2}+3x\right)dx = \tfrac{1}{3}e^{3x^2} + 2x^3 + c$$

2.38

$$\int \frac{e^{5x}-5}{e^{5x}}dx = e^{-5x} + x + c$$

2.39

$$\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}+6}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3e^{\sqrt[3]{x}} + 18\sqrt[3]{x} + c$$

2.40

$$\int \frac{e^{\frac{5}{x^3}}}{x^4}dx = -\tfrac{1}{15}e^{\frac{5}{x^3}} + c$$

2.41

$$\int \left(e^{2x}-3\right)^2 dx = \tfrac{1}{4}e^{4x} - 3e^{2x} + 9x + c$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.42

$$\int \left(e^{3x}+4\right)^2 e^{3x}\,dx = \tfrac{1}{9}\left(e^{3x}+4\right)^3 + c$$

2.43

$$\int e^{-x}\sqrt{e^{-x}-7}\,dx = -\tfrac{2}{3}\sqrt{\left(e^{-x}-7\right)^3} + c$$

2.44

$$\int \left(e^{2x}-\frac{1}{e^{2x}}\right)^2 dx = \tfrac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{4e^{4x}} - 2x + c$$

2.45

$$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx = ln\left|e^x-1\right|^2 - x + c$$

2.46

$$\int \frac{5\,dx}{2x-4} = ln\left|\sqrt{\left(2x-4\right)^5}\right| + c$$

2.47

$$\int \frac{7x\,dx}{3x^2-1} = ln\left|\sqrt[6]{\left(3x^2-1\right)^7}\right| + c$$

2.48

$$\int \frac{5x^2\,dx}{1-2x^3} = ln\left|\frac{1}{\sqrt[6]{\left(1-2x^3\right)^5}}\right| + c$$

2.49

$$\int \frac{6x\,dx}{1-x^2} = ln\left|\frac{1}{\left(1-x^2\right)^3}\right| + c$$

2.50

$$\int \frac{\left(x+1\right)dx}{x-1} = x + ln\left|\left(x-1\right)^2\right| + c$$

2.51

$$\int \frac{\left(x^2+3x-5\right)dx}{x-1} = \tfrac{1}{2}x^2 + 4x - ln\left|x-1\right| + c$$

2.52

$$\int \frac{\left(x^2-x+1\right)dx}{x+1} = \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + ln\left|\left(x+1\right)^3\right| + c$$

2.53

$$\int 2^{3x}\,dx = \frac{2^{3x}}{ln\,8} + c$$

2.54

$$\int 4^{-2x}\,dx = -\frac{4^{-2x}}{ln\,16} + c$$

2.55

$$\int \frac{e^{-x}dx}{5-e^{-x}} = ln\left|5-e^{-x}\right| + c$$

2.56

$$\int \frac{\left(e^{3x}+e^{-3x}\right)dx}{e^{3x}-e^{-3x}} = ln\left|\sqrt[3]{e^{3x}-e^{-3x}}\right| + c$$

2.57

$$\int \frac{\left(x-1\right)dx}{3x^2-6x+1} = ln\left|\sqrt[6]{3x^2-6x+1}\right| + c$$

2.58

$$\int \frac{x^3+1}{x-1}dx = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + x + ln\left|\left(x-1\right)^2\right| + c$$

2.59

$$\int \frac{e^{-x}+2}{e^{-x}-5}dx = Ln\left|\frac{1}{\left(e^x-5\right)\sqrt[5]{\left(1-5e^x\right)^2}}\right| + c$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.60

$$\int 3x\cos\left(6x^2+4\right)dx=\tfrac{1}{4}\operatorname{sen}\left(6x^2+4\right)+c$$

2.61

$$\int 5t\operatorname{sen}\left(6t^2-1\right)dt=-\tfrac{5}{12}\cos\left(6t^2-1\right)+c$$

2.62

$$\int\frac{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}=-3\cos\sqrt[3]{x}+c$$

2.63

$$\int 5e^{-3x}\operatorname{sen}e^{-3x}\,dx=\tfrac{5}{3}\cos e^{-3x}+c$$

2.64

$$\int 2\operatorname{sen}^2\left(\tfrac{1}{2}x\right)dx=x-\operatorname{sen}x+c$$

2.65

$$\begin{cases}\displaystyle\int 5x\operatorname{sen}^3\left(2x^2+3\right)dx=\\ =-\tfrac{5}{4}\cos\left(2x^2+3\right)-\tfrac{5}{12}\cos^3\left(2x^2+3\right)+c\end{cases}$$

2.66

$$\begin{cases}\displaystyle\int\operatorname{sen}^2 2x\cos^2 2x\,dx=\\ =\tfrac{1}{8}x-\tfrac{1}{64}\operatorname{sen}8x+c\end{cases}$$

2.67

$$\begin{cases}\displaystyle\int\operatorname{sen}5x\operatorname{sen}7x\,dx=\\ =-\tfrac{1}{4}\operatorname{sen}\left(-2x\right)-\tfrac{1}{24}\operatorname{sen}\left(12x\right)+c\end{cases}$$

2.68

$$\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{3-4\operatorname{sen}x}}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{3-4\operatorname{sen}x}+c$$

2.69

$$\int\frac{\sqrt[3]{\cos^2 3x}\,dx}{\csc 3x}=-\tfrac{1}{5}\sqrt[3]{\cos^5 3x}+c$$

2.70

$$\int\frac{\sec^2 2x\,dx}{\sqrt{5+3\tan 2x}}=\tfrac{1}{3}\sqrt{5+3\tan 2x}+c$$

2.71

$$\int\frac{\operatorname{sen}7x\,dx}{\cos 7x-1}=ln\frac{1}{\sqrt[7]{\cos 7x-1}}+c$$

2.72

$$\int 3\csc^2 2x\sqrt{\cot 2x}\,dx=-\sqrt{\left(\cot 2x\right)^3}+c$$

2.73

$$\int\frac{\left(e^x+\cos x\right)dx}{\sqrt{e^x+\operatorname{sen}x}}$$

2.74

$$\begin{cases}\displaystyle\int -4\sqrt[3]{1-\tan 3x}\sec^2 3x\,dx=\\ =\sqrt[3]{\left(1-\tan 3x\right)^4}+c\end{cases}$$

2.75

$$\int 3x\cdot\csc x^2\cdot\cot x^2\,dx=-\tfrac{3}{2}\csc x^2+c$$

2.76

$$\int\csc^2\left(a-bx\right)dx=\tfrac{1}{b}\cot\left(a-bx\right)+c$$

2.77

$$\int\csc\tfrac{a}{b}x\cdot\cot\tfrac{a}{b}x\,dx=-\tfrac{b}{a}\csc\tfrac{a}{b}x+c$$

2.78

$$\int\frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{3+\cos 2x}=-ln\left|\sqrt{3+\cos 2x}\right|$$

2.79

$$\int\frac{\csc x\cdot\cot x}{5-4\csc x}dx=ln\left|\sqrt[4]{5-4\csc x}\right|+c$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.80

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\sqrt{4+\cos 2x}} = -\sqrt{4+\cos 2x} + c$$

2.81

$$\int \operatorname{sen} \tfrac{2}{3}x\,dx = -\tfrac{3}{2}\cos \tfrac{2}{3}x + c$$

2.82

$$\int \sqrt{\tan^3 4x}\,\sec^2 4\mathrm{x}\,\mathrm{dx} = \tfrac{1}{10}\sqrt{\tan^5 4x} + c$$

2.83

$$\int \frac{\sec^2 3\mathrm{x}\,\mathrm{dx}}{\sqrt{1+\tan 3\mathrm{x}}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{1+\tan 3\mathrm{x}} + c$$

2.84

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\operatorname{sen}^2 4x} = -\tfrac{1}{4}\cot 4x + c$$

2.85

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\tan 5x} = ln\left|\sqrt[5]{\operatorname{sen} 5x}\right| + c$$

2.86

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 3x} = -\tfrac{1}{3}\cot 3x + \mathrm{c}$$

2.87

$$\int \frac{dx}{\cos 4x} = ln\left|\sqrt[4]{\sec 4x + \tan 4x}\right| + c$$

2.88

$$\int \frac{a\,dx}{\cos^2 bx} = \tfrac{a}{b}\tan bx + c$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1

$$x\ln\left|\sqrt[3]{x^2}\right| - \tfrac{2}{3}x + c$$

3.2

$$\tfrac{3}{2}x^2\ \ln\left|5x\right| - \tfrac{3}{4}x^2 + c$$

3.3

$$\tfrac{4}{3}x^3 \ln\left|\tfrac{2}{3}x\right| - \tfrac{4}{9}x^3 + c$$

3.4

$$\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{x^4}\ \ln\left|x\right| - \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$$

3.5

$$\tfrac{2}{3}xe^x - \tfrac{2}{9}e^{3x} + c$$

3.6

$$-5xe^{-x} - 5e^{-x} + c$$

3.7

$$\frac{2^x}{\ln 2}\left[x - \frac{1}{\ln 2}\right] + c$$

3.8

$$e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c$$

3.9

$$\tfrac{7}{4}e^{-4x}\left(x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{8}\right) + c$$

3.10

$$\tfrac{1}{16}\operatorname{sen} 8x - \tfrac{1}{2}x\cdot\cos 8x + c$$

3.11

$$\tfrac{1}{3}x^2\cdot\operatorname{sen} 3x + \tfrac{2}{9}x\cdot\cos 3x - \tfrac{2}{27}\operatorname{sen} 3x + c$$

3.12

$$x\cdot\operatorname{arc\,sen} 2x + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + c$$

3.13

$$x\cdot\operatorname{arc\,cos} 2x - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + c$$

3.14

$$x\cdot\operatorname{arc\,tan} 7x - \tfrac{1}{14}\ln\left|49x^2+1\right| + c$$

3.15

$$x\sqrt{\left(2x-5\right)^3} - \tfrac{1}{5}\sqrt{\left(2x-5\right)^5} + c$$

3.16

$$-\tfrac{4}{3}x\sqrt{\left(1-2x\right)^3} - \tfrac{4}{15}\sqrt{\left(1-2x\right)^5} + c$$

3.17

$$\tfrac{1}{5}e^{-x}\left(2\operatorname{sen} 2x - \cos 2x\right) + c$$

3.18

$$-\tfrac{1}{10}\csc 5x\cdot\cot 5x + \tfrac{1}{10}\ln\left|\csc 5x - \cot 5x\right| + c$$

3.19

$$\ln\sqrt[6]{\left|\frac{x-3}{x+3}\right|^7} + c$$

3.20

$$\ln\left|\left(x-4\right)^4\left(x+2\right)\right| + c$$

3.21

$$\ln\left|\sqrt[12]{\left(\frac{2x-3}{2x+3}\right)^5}\right| + c$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.22

$$ln\left|(x+2)^{2}(x+1)^{3}\right|+c$$

3.23

$$ln\left|\sqrt[3]{(x+4)(x+1)^{2}}\right|+c$$

3.24

$$ln\left|\frac{\sqrt[28]{(x+4)^{15}}\sqrt[21]{x-3}}{\sqrt[12]{x^{7}}}\right|+c$$

3.25

$$ln\left|\frac{\sqrt{x(x+2)^{3}}}{x-1}\right|+c$$

3.26

$$ln\left|\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[5]{(x+5)^{2}}\sqrt[10]{x}}\right|+c$$

3.27

$$ln\left|\frac{\sqrt{x^{2}+1}}{x-1}\right|+2\arctan x+c$$

3.28

$$ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+x+c$$

3.29

$$ln|x-1|-\frac{4x-3}{2(x-1)^{2}}+c$$

3.30

$$ln\left|\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}\right|-\frac{x}{2(x^{2}-1)}+c$$

3.31

$$x-ln\left|(x-1)^{3}\right|+c$$

3.32

$$ln\left|\frac{\sqrt[10]{(x-3)^{11}}}{\sqrt[20]{x^{2}+1}}\right|+\frac{7}{10}arc\tan x+c$$

3.33

$$ln\left|\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x^{2}+2}}\right|+c$$

3.34

$$ln\left|\sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{5}}\right|-\frac{5x}{2(x^{2}-1)}+c$$

3.35

$$ln\left|\sqrt[9]{\frac{(x-3)^{13}}{x^{4}}}\right|+\frac{4}{3x}+c$$

3.36

$$ln\left|\sqrt[8]{\frac{x-2}{x+2}}\right|+\frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2}+c$$

3.37

$$x+ln\left|(x-4)^{4}(x+2)\right|+c$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.38

$$x + ln\left|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| + c$$

3.39

$$ln\left|\sqrt[5]{(x-4)^4(x+1)}\right| + c$$

3.40

$$\text{arc sen } x - x\sqrt{1-x^2} + c$$

3.41

$$\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} - \tfrac{1}{2}ln\left|\sqrt{x^2+1}+x\right| + c$$

3.42

$$9ln\left|\sqrt{x^2+9}+x\right| + x\sqrt{x^2+9} + c$$

3.43

$$\text{arc tan}\sqrt{x^2-1} + c$$

3.44

$$-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c$$

3.45

$$\frac{\sqrt{25x^2-16}}{x} + c$$

3.46

$$-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$$

3.47

$$\frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} + c$$

3.48

$$ln\left|\sqrt{x^2+1}+x\right| - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + c$$

3.49

$$x\sqrt{x^2-4} + 4Ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + c$$

3.50

$$\text{arc sen}\frac{x}{2} + c$$

3.51

$$ln\left|\frac{\sqrt{16x^2+1}-1}{x}\right| + c$$

3.52

$$a^2\sqrt{x^2-a} + \tfrac{1}{3}\sqrt{(x^2-a)^3} + c$$

3.53

$$\tfrac{1}{16}\text{arc tan}\frac{x}{2} + \frac{x}{32+8x^2} + c$$

3.54

$$\frac{x^3\text{arc sen } x + \sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{9} + c$$

3.55

$$\tfrac{1}{32}x\sqrt{16x^2+9} - \tfrac{9}{128}ln\left|4x+\sqrt{16x^2+9}\right| + c$$

3.56

$$\text{arc sen}\frac{x-4}{3} + c$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.57

$$\int \sqrt{y^2-6y+18}\,dy =$$

$$= \tfrac{1}{2}(y-3)\sqrt{y^2-6y+18} + \tfrac{9}{2} ln\left| y-3+\sqrt{y^2-6y+18}\right| + c$$

3.58

$$\int \sqrt{3-4x-2x^2}\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-4x-2x^2} + \tfrac{5}{2\sqrt{2}}\, arc\ sen\ \sqrt{\tfrac{2}{5}}(x+1) + c$$

3.59

$$ln\left|\sqrt{\frac{t-2}{t-4}}\right| + c$$

3.60

$$\tfrac{1}{2}x\sqrt{3-2x^2} + \tfrac{3}{2\sqrt{2}}\text{arc sen}\ \sqrt{\tfrac{2}{3}}x + c$$

3.61

$$\tfrac{1}{\sqrt{5}} ln\left| x-1+\tfrac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5x^2-10x+4}\right| + c$$

3.62

$$\tfrac{1}{2}\text{arc sen}\left(2x-4\right) + c$$

3.63

$$\int \frac{\sqrt{x^2-10x+9}\,dx}{(x-5)^2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2-10x+9}\,dx}{x-5} + ln\left| x-5+\sqrt{x^2-10x+9}\right| + c$$

3.64

$$ln\left|\frac{\sqrt{x^2-4x+5}-1}{x-2}\right| + c$$

3.65

$$\int \frac{\sqrt{4x^2+3}\,dx}{x^2} = 2ln\left|2x+\sqrt{4x^2+3}\right| - \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x} + c$$

3.66

$$\int \sqrt{3x^2+6x+4}\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}(x+1)\sqrt{3x^2+6x+4} + \tfrac{1}{2\sqrt{3}} ln\left| x+1+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3x^2+6x+4}\right| + c$$

3.67

$$\sqrt{x^2-4x-5} - 3\, arc\ sen\ \frac{x-2}{3} + c$$

3.68

$$\frac{\sqrt{3x^2-1}}{x} + c$$

3.69

$$\tfrac{7}{3\sqrt{3}}\text{arc sen}\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}x + \tfrac{1}{6}x\sqrt{4-3x^2} + c$$

3.70

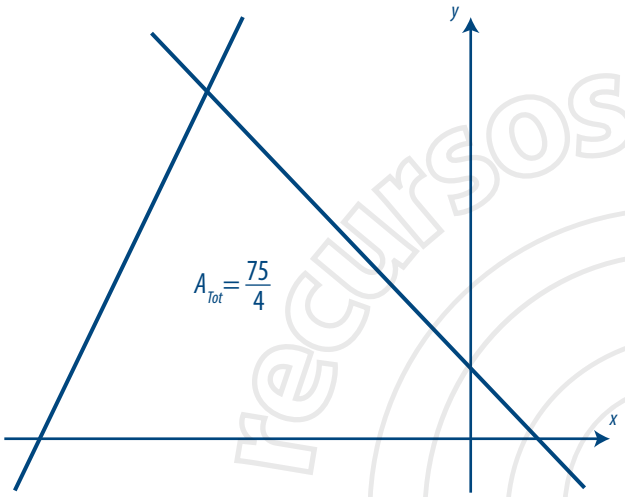
$$4\cdot\text{arc sen}\ \tfrac{1}{2}x - x\sqrt{4-x^2} + c$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

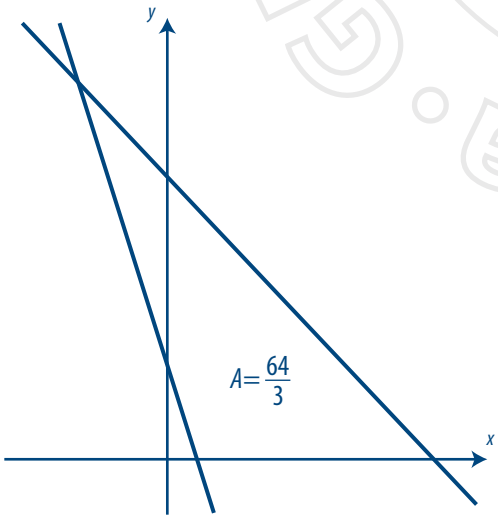
4.1

$$A_{Tot} = \frac{75}{4}$$



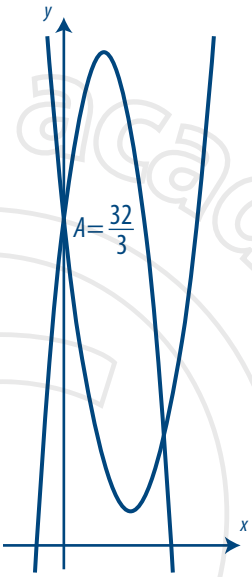
4.2

$$A = \frac{64}{3}$$



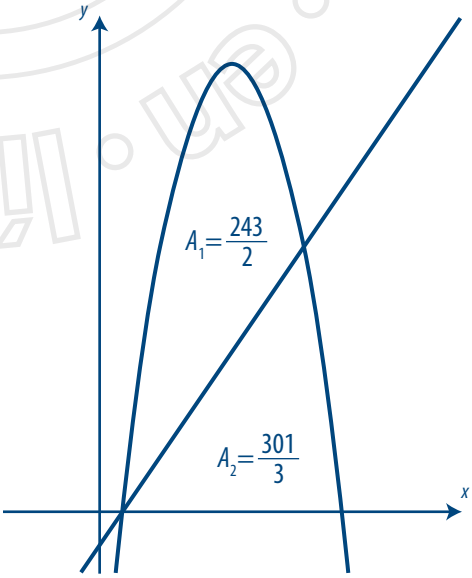
4.3

$$A = \frac{32}{3}$$



4.4

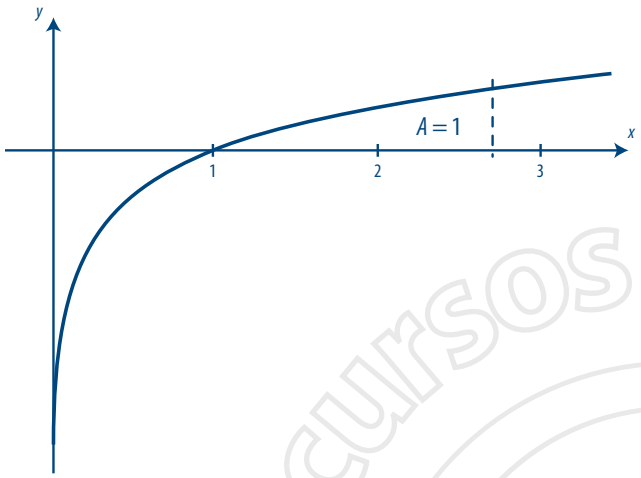
$$A_1 = \frac{243}{2} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{301}{3}$$



D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

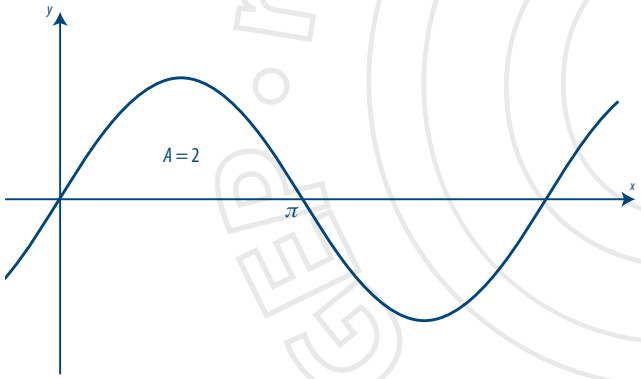
4.5

$A = 1$



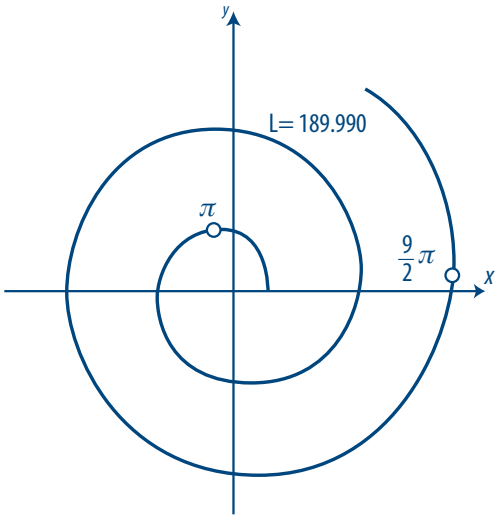
4.6

$A = 2$



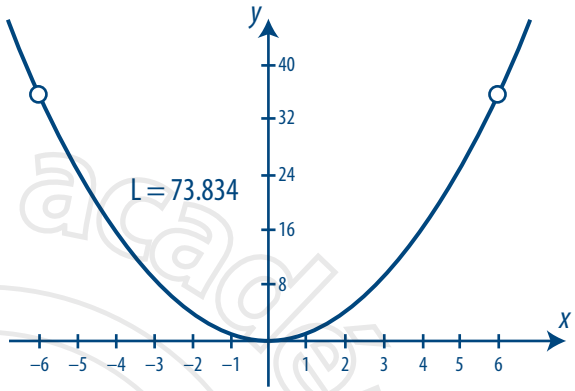
4.7

$L = 189.990$

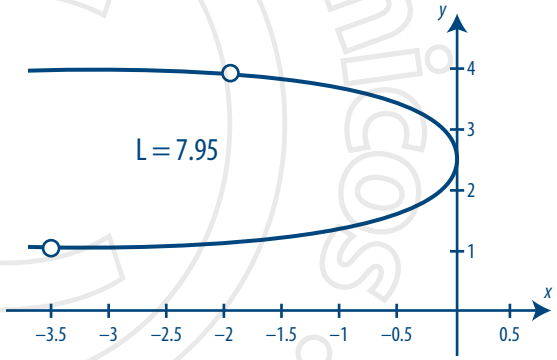


4.8

$L = 73.834$

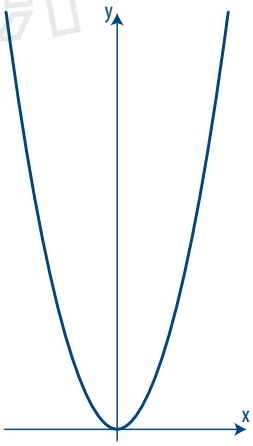


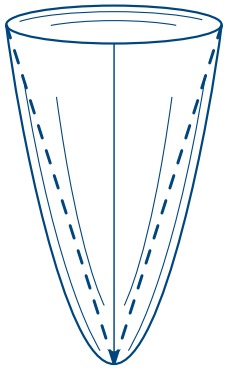
$L = 7.95$



4.9

$V = \frac{128}{3}\pi$



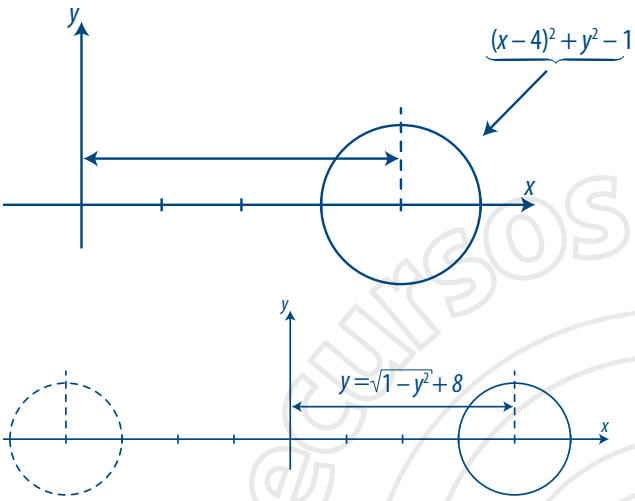


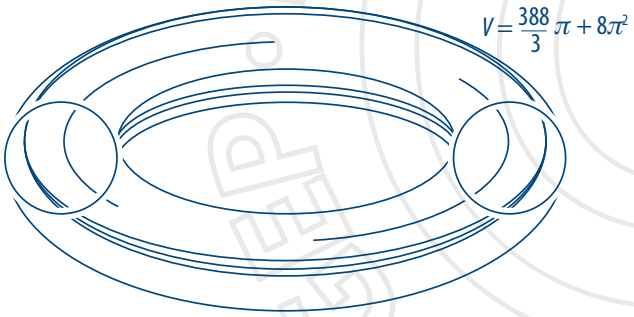
$V = \frac{128}{3}\pi$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.10

$$V = \frac{388}{3}\pi + 8\pi^2$$





4.11

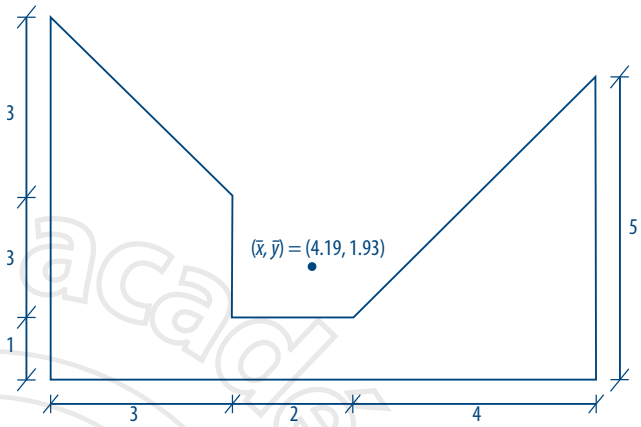
$x = 0.265$

4.12

$(\bar{x}, \bar{y}) - (1.075, -1.192)$

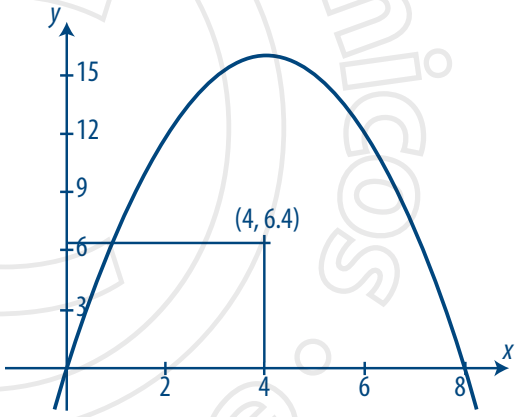
4.13

$(\bar{x}, \bar{y}) - (4.19, -1.93)$



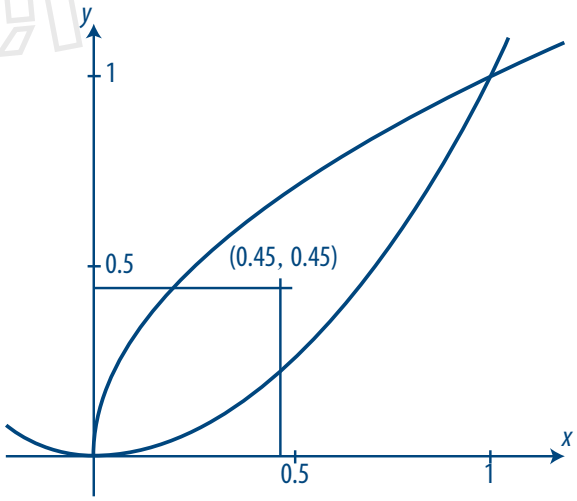
4.14

$(4, 6.4)$



4.15

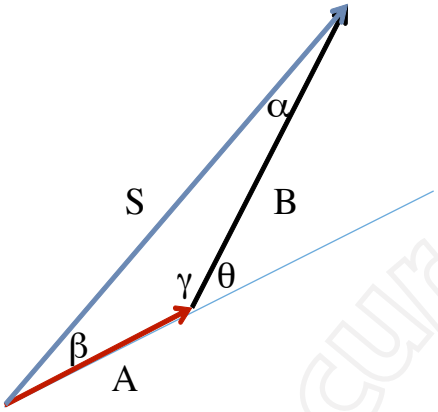
$(0.45, 0.45)$



D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Ley de los cosenos

$$S = \left|\vec{S}\right| = \left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$



Ley de los senos

$$\frac{S}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{A}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{B}{\operatorname{sen}\beta}$$

Suma analítica de vectores

$$\vec{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$\vec{S} = \vec{u} + \vec{v} = \left(u_x + v_x\right)\hat{i} + \left(u_y + v_y\right)\hat{j} + \left(u_z + v_z\right)\hat{k}$$

Resta analítica de vectores

$$\vec{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$\vec{R} = \vec{v} - \vec{u} = \left(v_x - u_x\right)\hat{i} + \left(v_y - u_y\right)\hat{j} + \left(v_z - u_z\right)\hat{k}$$

Producto de un escalar por un vector

$$q\vec{u} = qu_x\hat{i} + qu_y\hat{j} + qu_z\hat{k}$$

Producto punto

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

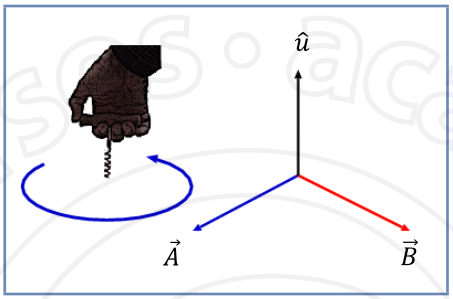
Ángulo entre vectores

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|}\right)$$

Producto vectorial

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\ \text{sen}\theta\hat{u}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{i} \\ &+\left(A_zB_x - A_xB_z\right)\hat{j} \\ &+\left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{k}\end{aligned}$$



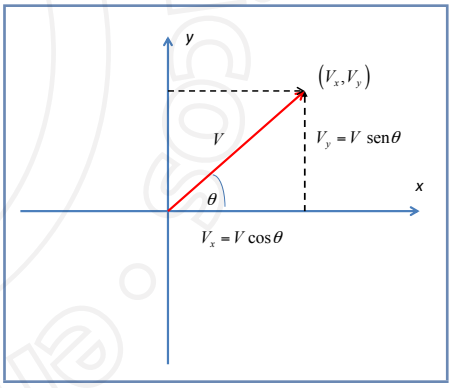
Coordenadas cartesianas → Coordenadas polares

$$\vec{V} = \left(V_x, V_y\right)$$

$$\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

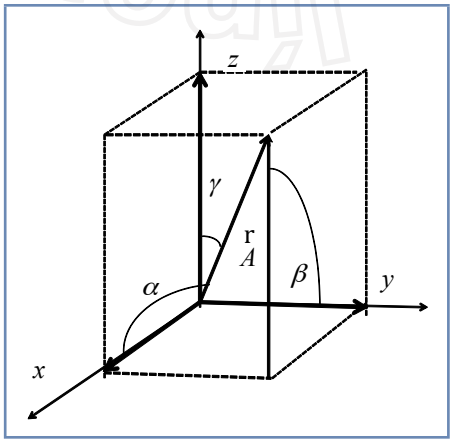
$$V_x = V\cos\theta$$
$$V_y = V\ \text{sen}\ \theta$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$$



En $\mathbb{R}^3$

$$\left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Cosenos directores

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \Rightarrow A_x = A\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{A_y}{A} \Rightarrow A_y = A\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos\gamma = \frac{A_z}{A} \Rightarrow A_z = A\cos\gamma$$

Ecuación vectorial de la recta

P es un punto de la recta *r*, el vector $\overrightarrow{Px}$ tiene la misma dirección que el vector de dirección $\vec{v}$,

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{Ox} - \overrightarrow{OP} = k\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k(u_x, u_y, u_z) = (x_0 + ku_x, y_0 + ku_y, z_0 + ku_z)$$

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^3$

$$x = x_0 + ku_x$$
$$y = y_0 + ku_y$$
$$z = z_0 + ku_z$$

Ecuaciones continuas de la recta en $\mathbb{R}^3$

$$\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y} = \frac{z - z_0}{u_z}$$

Forma punto pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación continua de la recta

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$$

Ángulo entre dos rectas

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores de dirección de las rectas, entonces el ángulo entre las rectas está dado por:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{uv}\right)$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Rectas paralelas pendientes iguales

Rectas perpendiculares $m_{r_1} = \dfrac{-1}{m_{r_2}}$

Rectas secantes se intersectan en un punto y pendientes diferentes

Rectas paralelas no se cortan en ningún punto y sus pendientes son iguales

Rectas coincidentes, pendientes iguales y todos sus puntos son comunes

Distancia entre dos rectas

$$d\left(r_1, r_2\right) = d\left(P, r\right) = \frac{\left|Ax + By + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ecuación vectorial del plano $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0$

$$\overrightarrow{PX} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$$

$$\left(x - x_0, y - y_0, z - z_0\right) = \lambda_1 \left(u_x, u_y, u_z\right) + \lambda_2 \left(v_x, v_y, v_z\right)$$

$$\left(x, y, z\right) = \left(x_0, y_0, z_0\right) + \lambda_1 \left(u_x, u_y, u_z\right) + \lambda_2 \left(v_x, v_y, v_z\right)$$

Ecuaciones paramétricas del plano

$$x = x_0 + \lambda_1 u_x + \lambda_2 v_x$$
$$y = y_0 + \lambda_1 u_y + \lambda_2 v_y$$
$$z = z_0 + \lambda_1 u_z + \lambda_2 v_z$$

Ecuación general o implícita del plano

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y - y_0 & y_B - y_A & y_C - y_A \\ z - z_0 & z_B - z_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Derivada de una función vectorial

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{R}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{R}(t+\Delta t)-\vec{R}(t)}{\Delta t}$$

El vector tangente unitaria $\hat{T}$, a la curva, es:

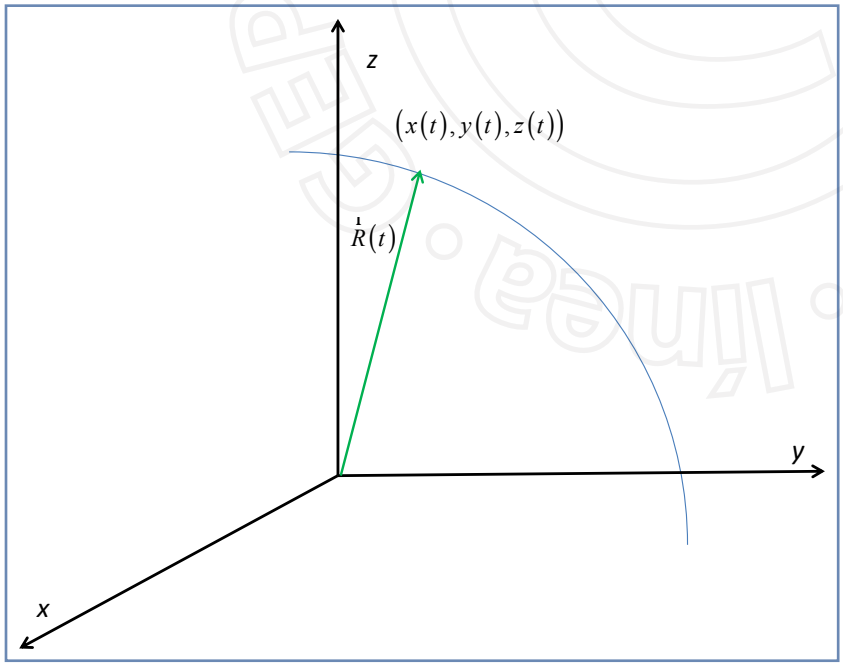
$$\hat{T}=\frac{\dfrac{d\vec{R}(t)}{dt}}{\left|\dfrac{d\vec{R}(t)}{dt}\right|}$$

La tangente horizontal de la curva es: $\frac{dy}{dt}=0$ con $\frac{dx}{dt}\neq 0$.

La tangente vertical de la curva es: $\frac{dx}{dt}=0$ con $\frac{dy}{dt}\neq 0$

La longitud de arco s, de la curva $\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ con $a\le t\le b$ es:

$$s=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt=\int_a^b\left|\vec{R}'(t)\right|dt$$



El vector tangente unitario está dado por: $\vec{T}(t)=\dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

El vector normal principal es: $\vec{N}(t)=\dfrac{\vec{r}\,''(t)}{\left|\vec{r}\,''(t)\right|}$

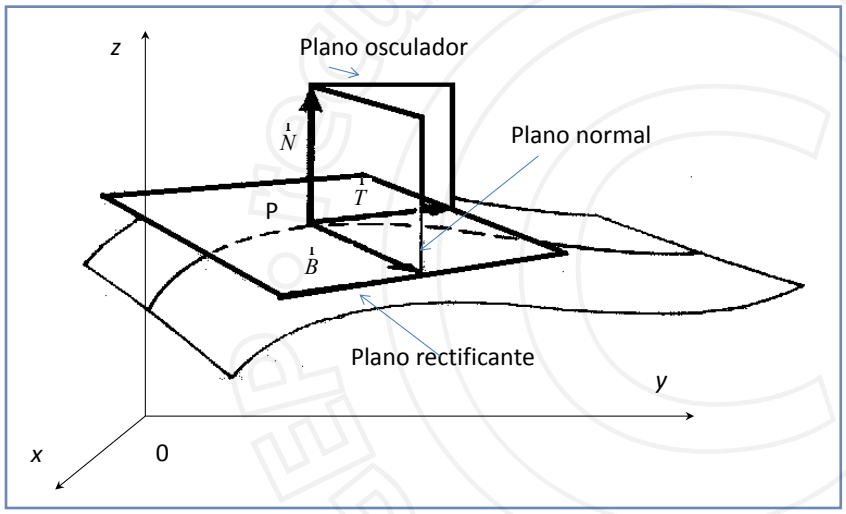
El vector binormal es: $\vec{B}(t)=\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)$

El radio de curvatura está dado por $\rho=\dfrac{1}{\kappa}$ y $\kappa=\left|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right|$

Las fórmulas de Frenet-Serret que relacionan a los vectores $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$ y $\vec{B}(s)$ son:

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=\kappa\vec{N} \quad ; \quad \frac{d\vec{N}}{ds}=\tau\vec{B}-\kappa\vec{T} \quad ; \quad \frac{d\vec{B}}{ds}=\tau\vec{N}$$

En donde el escalar se llama torsión. El recíproco de la torsión $\sigma=1/\tau$ es el radio de torsión.



Plano normal. Plano que pasa por P y tiene como vector característico a $\vec{T}(s_0)$. Su ecuación será:

$$\left(\vec{R}-\vec{R}_0\right)\cdot\vec{T}(s_0)=0$$

Plano rectificante. Plano que pasa por P y tiene como vector característico a $\vec{N}(s_0)$. Su ecuación será:

$$\left(\vec{R}-\vec{R}_0\right)\cdot\vec{N}(s_0)=0$$

Plano osculador. Plano que pasa por P y tiene como vector característico a $\vec{B}(s_0)$. Su ecuación será:

$$\left(\vec{R}-\vec{R}_0\right)\cdot\vec{B}(s_0)=0$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Definición límite

El límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y)\to(x_0,y_0)$ es el número real L si para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que para todos los puntos (x,y) se cumple que:

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

Propiedades de los límites

Si existen los límites $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$ y son finitos, entonces se cumple que

i) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(f(x,y)+g(x,y)\right)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)+\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

ii) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(f(x,y)\cdot g(x,y)\right)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\cdot\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

iii) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(\lambda f(x,y)\right)=\lambda\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

iv) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)}$$ siempre que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\neq 0$

Continuidad

Se dice que una función $f(x,y)$ es continua en el punto (x_0,y_0) si:

i) f está definida en (x_0,y_0).

ii) el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe.

iii) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Derivadas parciales

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(x+h,y\right) - f\left(x,y\right)}{h}$$

$$f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(x,y+h\right) - f\left(x,y\right)}{h}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

Gradiente

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Derivada direccional

$$D_{\hat{u}} f\left(x_0,y_0\right) = \nabla f\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(a,b\right) = \frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x} a + \frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y} b$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Puntos extremos

La matriz hessiana de f en x_0:

$$Hf(x_0)=\begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_2x_n}(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_nx_1}(x_0) & f_{x_nx_2}(x_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Los menores de la matriz hessiana son:

$$\Delta_1 f(x_0)=f_{x_1x_1}(x_0)$$

$$\Delta_2 f(x_0)=\begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 f(x_0)=\begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) & f_{x_1x_3}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) & f_{x_2x_3}(x_0) \\ f_{x_3x_1}(x_0) & f_{x_3x_2}(x_0) & f_{x_3x_3}(x_0) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n f(x_0)=Hf(x_0)=\begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_2x_n}(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_nx_1}(x_0) & f_{x_nx_2}(x_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_0) \end{vmatrix}$$

1) Si $\Delta_1 f(x_0)>0$ y $\left|Hf(x_0)\right|>0$, entonces f tiene en x_0 un mínimo relativo.

2) Si $\Delta_1 f(x_0)<0$ y $\left|Hf(x_0)\right|>0$, entonces f tiene en x_0 un máximo relativo.

3) Si se cumple que $\left|Hf(x_0)\right|<0$, se dice que f tiene en x_0 un punto de silla.

4) Si se cumple $\left|Hf(x_0)\right|=0$, no podemos afirmar nada sobre lo que ocurre en x_0, es necesario estudiar el comportamiento de la función en un entorno del punto.

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Multiplicadores de Lagrange

Si un campo escalar $f\left(x_1,x_2,x_3,...,x_n\right)$ tiene un extremo relativo cuando está sometido a un conjunto de condiciones $g_1\left(x_1,x_2,x_3,...,x_n\right)=0$, …, $g_m\left(x_1,x_2,x_3,...,x_n\right)=0$ siendo $m<n$, existen entonces escalares $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_n$ tales que:

$$\nabla f=\lambda_1\nabla g_1+\lambda_2\nabla g_2+...+\lambda_m\nabla g_m$$

Divergencia

Sea $\vec{F}$ una función vectorial de las variables x,y,z . La divergencia de $\vec{F}$ se define como

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

siendo F_x , F_y , F_z las componentes de $\vec{F}$. La divergencia de $\vec{F}$ es una función escalar ya que es un producto punto.

Rotacional

Por otra parte, el rotacional del campo vectorial ***F*** se define como

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ F_x&F_y&F_z\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ F_y&F_z\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial z}\\ F_x&F_z\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\ F_x&F_y\end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\vec{F}=\hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

El rotacional de $\vec{F}$ es un campo vectorial.

Laplaciano

$$\nabla^2 f=\nabla\cdot\nabla f$$

El operador laplaciano de una función escalar *f* en coordenadas cartesianas es

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

El operador laplaciano de un campo vectorial está dado por:

$$\nabla^2\vec{A}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\left(\nabla\cdot\nabla\right)\vec{A}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Propiedades

i) $\nabla\left(f+g\right)=\nabla f+\nabla g$

ii) $\nabla\left(cf\right)=c\nabla f$ con c una constante

iii) $\nabla\left(fg\right)=g\nabla f+f\nabla g$

iv) $\nabla\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right)=\nabla\cdot\vec{F}+\nabla\cdot\vec{G}$

v) $\nabla\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right)=\nabla\times\vec{F}+\nabla\times\vec{G}$

vi) $\nabla\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\vec{G}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)-\vec{F}\cdot\left(\nabla\times\vec{G}\right)$

vii) $\nabla\cdot\left(f\vec{F}\right)=f\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)+\vec{F}\cdot\left(\nabla f\right)$

viii) $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)=0$

ix) $\nabla\times\left(f\vec{F}\right)=f\nabla\times\vec{F}+\nabla f\times\vec{F}$

x) $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)-\nabla^2\vec{F}$

xi) $\nabla\times\left(\nabla f\right)=0$

xii) $\nabla^2\left(fg\right)=f\nabla^2 g+g\nabla^2 f+2\nabla f\cdot\nabla g$

Un campo $\vec{G}=\nabla\times\vec{F}$ que satisface $\nabla\cdot\vec{G}=0$ se llama campo solenoidal

Un campo $\vec{F}=\nabla f$ que satisface $\nabla\times\vec{F}=0$ se llama campo irrotacional

recursos · académicos · en · línea · Grupo Editorial Patria

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Si $f(x,y)=g(x)h(y) \Rightarrow \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy=\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)$

—

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right) \text{ con } D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\right\}$$

—

En general

$$\iint_{D_{xy}} F(x,y)\,dxdy=\iint_{D_{uv}} F\left(H(u,v),G(u,v)\right)|J|dudv$$

***J* es el Jacobiano**

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial u} & \dfrac{\partial H}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Integral con coordenadas polares

$$\iint_{D_{xy}} F(x,y)\,dx\,dy=\int_0^r\int_0^{2\pi} G(r,\theta)r\ \ dr\,d\theta$$

Integral con coordenadas esféricas

$$\iiint_{D_{xyz}} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_0^r\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} G(r,\theta,\phi)r^2\operatorname{sen}\theta\ \ dr\,d\theta\,d\phi$$

Integral con coordenadas cilíndricas

$$\iiint_{D_{xyz}} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^z G(r,\theta,z)r\ \ dr\,d\theta\,dz$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

El centro de masa está dado por

$$\left(\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\int y\,dm}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\int z\,dm}{M}\right)$$

Momento de inercia

$$I = \int r^2\,dm = \iiint r^2 \rho dV$$

Teorema de la divergencia

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A}\,dV = \iint_s \vec{A} \cdot \vec{n}\,ds = \oiint_s \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Teorema de Stokes

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Teorema de Green

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_C \vec{F}\ \square d\vec{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1

$(-1,\ 1,\ -3),\ (-3,\ -7,\ 1),\ -12,\ 10\hat{i}-5\hat{j}-5\hat{k}$

1.2

$\sqrt{29};\ \cos\alpha=0.55;\ \cos\beta=0.74;\ \cos\gamma=-0.37$

1.3

$(8,\ -1,\ 5);\ (-2,\ -1,\ -9);\ (3,\ 5,\ -4)$

1.4

$\vec{u}=\left(\frac{6}{\sqrt{149}},\frac{8}{\sqrt{149}},\frac{7}{\sqrt{147}}\right)\quad \cos\beta=0.665;\beta=49°$

1.5

$\vec{S}=(3,\ 4,\ -1);\quad \theta=25.9°$

1.6

$\vec{u}=\left(\frac{-7}{\sqrt{94}},\frac{6}{\sqrt{94}},\frac{3}{\sqrt{94}}\right)$

1.7

1

1.9

$\left(1,\ \sqrt{3}\right)$

1.10

$(-1,\ 1,\ -3),$

1.11

$\sqrt{21}$

1.12

0

1.3

$\frac{\sqrt{73}}{4}$

1.14

a) $\alpha=110.56°$

b) $\beta=20.55°$

1.15

a) $k=3$

b) $k=-\frac{4}{3}$

c) $k=0.9888$

1.16

$5x-6y-19=0$

1.17

a) $3x+4y-11=0$

b) $4x-3y+2=0$

1.18

$12x-5y-144=0$

1.19

$(12,\ 0)$

1.20

Paralelas

1.21

Coincidentes

1.22

Paralelas

1.23

Si, $P=(0,\ 2)$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.24
$x = 8,\ y = 2 + k,\ z = 3$

1.25
$10x - 13y + 2z - 10 = 0$

1.26
$6x - 14y + 11z - 1 = 0$

1.27
$x - y - 2z - 9 = 0$

1.28
Secantes

1.29
Paralelos

1.30
Coincidentes

1.31
$x + 2y + z - 8 = 0$

1.32
$-x - 2y + 4 = 0,\ -3y + z + 2 = 0$

1.33
La recta y el plano no son paralelos.

1.34
$x + 5y - 7z + 30 = 0$

1.35
Se obtiene un plano paralelo al anterior.

1.36
$\dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z+2}{9}$

1.37
$5x - 13y - 7z + 32 = 0$

1.38
$2x + 2y + z - 5 = 0$

1.39
$k = 4$

1.40
$(-1,\ -4,\ -7)$

1.41
Las rectas son paralelas.

1.42
Elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

1.43
$x = 4\cos t$ y $y = 3\operatorname{sen} t$

1.44
$x = 2 + 2\sec t$ y $y = 3 + 3\tan t$

1.48
$y = \dfrac{1}{x}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1
$(2,\infty)$

2.2
Circunferencia de radio a.

2.3
Hélice circular de radio 2, con paso = 2π y eje paralelo al eje z.

2.4
Recta, punto de intersección $(-1,3,0)$

2.5
Parábola, punto de intersección $(0,2,4)$

2.6
Hipérbola $x^2 - y^2 = 1$

2.7
$z = 3\text{sen}x$ montada sobre la línea recta $y = x$, $0 \le x \le 2\pi$

2.8
Curva de Agnesi-Fermat $y = \dfrac{27}{x^2+9}$

2.9
Parábola $y^2 = z + 1$ contenida en el plano $x = -3$

2.11
$\vec{R}(t) = 3t\hat{i} + (1 + 3t)\hat{j} + (2 + 3t)\hat{k}$ con $0 \le t \le 1$

2.12
Hélice elíptica

2.13
Hélice cónica

2.14
$2t + 4t^3$ y $\left(5t^4 - 1\right)\hat{i} - 6t^2\hat{j}$, respectivamente

2.15
$x = -2t$, $y = t - 1$, $z = 1 + t$

2.16
a) $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

b) $-2\hat{i} + (1 - \cos 1)\hat{j} + \ln 2\hat{k}$

2.17
b) $2m\left(\hat{i} + 3\hat{k}\right)$

c) $\vec{R}'(t) = 6\text{sen}4t\left(-\cos(2t)\hat{i} + \text{sen}(2t)\hat{j}\right)$,

$\left|\vec{R}'(t)\right| = |6\text{sen}4t|$

2.18
$\dfrac{2}{3}\left[\left(2\sqrt{2} - 1\right)\hat{i} - \hat{k}\right]$

2.19
$\dfrac{1}{2}\ln 2\hat{i} + \left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)\hat{j} + \dfrac{\pi}{4}\hat{k}$

2.20
$\dfrac{1}{3}\hat{i}$

2.21
$r(t) = \left(\dfrac{1}{4}t^4 + 1\right)\hat{i} + \left(t^3 - 1\right)\hat{i}$

2.22
$6 + \hat{i} + \dfrac{16}{3}\hat{j}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.23
$(e-1)\hat{i}+\left(1-e^{-1}\right)\hat{j}+\hat{k}$

2.24
$\vec{R}(t)=\left(e^{t}-t\right)\hat{i}-\text{sen}t\ \hat{j}+\frac{1}{6}t^{3}\ \hat{j}$

2.25
$e^{t}\ \hat{i}$

2.28
π

2.29
$e-e^{-1}=2\text{sen}h\ 1$

2.30
10.63

2.31
8

2.33
16

2.34
8

2.35
4.816

2.37
$\left(0,\frac{5}{2}\right)$

2.38
$\vec{T}(0)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right),\ \vec{N}(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\hat{j}+\hat{k}\right),$
$\vec{B}(0)=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}\right)$

2.39
$\vec{T}(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{i}+\hat{j}\right),\ \vec{N}1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\hat{i}+\hat{j}\right),\ \vec{B}(1)=\hat{k}$

2.40
$\frac{1}{2}$

2.43
1

2.44
$\vec{a}=\vec{R}"(t)=\frac{dv}{dt}\vec{T}+\kappa v^{2}\vec{N}$

2.45
$\frac{1}{10}$

2.46
$\frac{1}{(45)^{\frac{1}{4}}}$

2.48
$\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-2}$

2.49
$\kappa=\frac{1}{4a}$

2.50
Plano $x\ z,\ \kappa=\frac{1}{\sqrt{2}}$

2.52
$\frac{e^{t}}{\left(1+e^{2t}\right)^{3/2}}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.53

$\frac{4}{27}$

2.54

$\frac{1}{4}$

2.55

$\hat{i}+4\hat{k}$ y $4\hat{k}$, respectivamente

2.56

$4\sqrt{6}$

2.57

$\vec{R}(2)=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$

2.58

-7.7

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

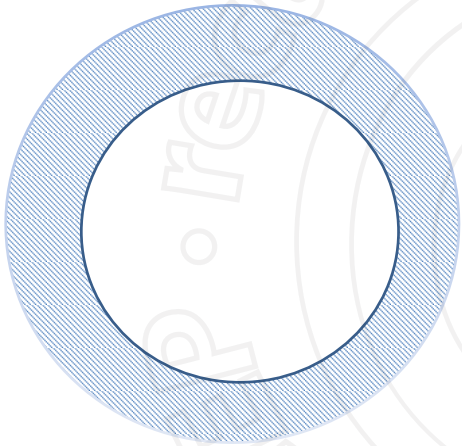
A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1
1, 0

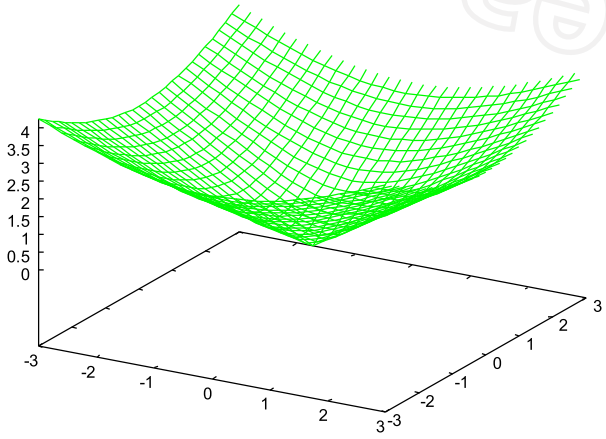
3.2
$0,\ -4,\ a^3$

3.3
Vectorial

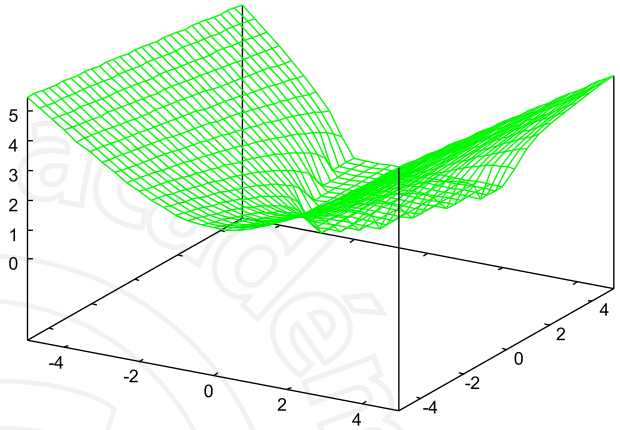
3.4
$x^2+y^2 \geq 4$ y $x^2+y^2 \leq 9$



3.6
Cono circular con vértice en $(0,0,0)$, eje z como eje de simetría, y extendiéndose en la región $z \geq 0$.



3.7
Superficie abierta tal que para z = constante, son parábolas con ejes paralelos al eje y.



3.9
Elipses concéntricas cuyos ejes son los ejes coordenados x e y.

3.10
Curvas cosenoidales $y = c\cos x$; para $c = 0$ resulta un segmento rectilíneo sobre el eje x.

3.11
Plano pasando por los puntos $(0,0,1)$, $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $(0,-1,0)$

3.12
Paraboloide circular con vértice en $(0,0,3)$, el eje z como eje de simetría y abriéndose en la dirección z positiva.

3.13
Cilindro elíptico

3.14
Elipsoides

3.15
5

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.16
3

3.17
i) $f_x = 2$, $f_y = -3$
ii) $f_x = 2$, $f_y = -6y$
iii) $f_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $f_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$
iv) $f_x = \dfrac{2y}{y^2-x^2}$, $f_y = -\dfrac{2x}{y^2-x^2}$
v) $f_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3.18
i) $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{4}$
ii) 1, 1
iii) $-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{4}$
iv) 0, 4

3.20
i) 2, 6, –2, –2
ii) $2x^2-6y^2$, , $12y^2-6x^2$, $-12xy$, $-12xy$

3.26
$-1/\sqrt{2}$

3.27
a) $z = 4x$
b) $z = -6y+18$

3.28
-4

3.29
$x = -1$, $y = 4+t$, $z = -12+t$

3.30
a) $-y\cos\left(x^2y^2\right)$ y $\cos\left(y^2\right)-x\cos\left(x^2y^2\right)$,
respectivamente
b) $-\exp\left(-x^3\right)$ y $2y\exp\left(-y^6\right)$, respectivamente.

3.31
a) 1
b) Ambas derivadas parciales valen 1

3.34
$48y^3z^5$

3.36
$-6yz^2\left(x+y^2-z^4\right)\left(x^2+y^2+z^4\right)^{-5/2}$

3.37
$2\sqrt{2}$

3.38
$1/\sqrt{3}$

3.39
–4

3.40
$x = -1$, $y = 4+t$, $z = -12+t$

3.43
$\dfrac{2(u+1)}{\left(u^2+v^2+2u+v\right)}$ y $\dfrac{(1+2v)}{\left(u^2+v^2+2u+v\right)}$,
respectivamente.

3.44
$2r\text{sen}^2\theta\cos(2\varphi)+\cos\theta$,
$r^2\text{sen}(2\theta)\cos(2\varphi)-r\text{sen}\theta$, $-2r^2\text{sen}^2\theta\text{sen}(2\varphi)$,
respectivamente.

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.49

a) $(0,0)$ es punto silla,

b) $(0,0)$ es punto silla, g tiene un máximo relativo en $(1,1)$

c) $(0,n\pi)$ son puntos silla para $n = 0$, ± 1 , ± 2 , …

3.50

a) $(0,\pm 2,0)$

b) $x = y = z = 1/3$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

4.1
2

4.2
6

4.3
$\frac{4}{3}$

4.4
$\frac{11}{8}$

4.5
$e^2 - e + \frac{3}{2} - 4\ln 2$

4.6
1

4.7
7

4.8
1

4.9
$2(\cos h\ 1 - 1)$

4.10
$\pi/\sqrt{3} - 1$

4.11
$2\pi + \pi^3/3$

4.12
$\frac{64}{3}$

4.13
$\cos h\ 3 - 1$

4.14
$\frac{64}{3}$

4.15
e

4.16
$\frac{32}{15}$

4.17
$(-1,\ 0,\ e)$

4.18
$(1,\ \sqrt{3},\ 5)$

4.19
$(0,\ -3,\ 2)$

4.20
$(\sqrt{2},\ \pi/4,\ 3)$

4.21
$(\sqrt{8},\ \pi/4,\ 2)$

4.22
$(5,\ -38.86°,\ 5)$

4.23
37.16

4.24
$4\pi \ln 2$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.25
$18\pi \ln 2$

4.26
$\sqrt{\pi}/2$

4.27
πab

4.28
$\frac{3\pi}{8}$

4.29
a) $\left(\sqrt{2},\ \pi/4,\ 1\right)$
b) $\left(\sqrt{3},\ 0.95,\ \pi/4\right)$

4.30
a) $\left(\sqrt{3},\ \pi/4,\ 1\right)$
b) $\left(1,\ \pi/6,\ 0\right)$

4.31
a) $z = 2$
b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$

4.32
$128/3$

4.33
$256/5$

4.34
$14/3$

4.35
$8\pi/3$

4.36
$\left[8\pi\left(2-\sqrt{3}\right)\right]/3$

4.37
$(0.82726,\ 0.6100)$

4.38
$(8/5,\ 8/15)$

4.39
$(0,\ 0,\ 16/15)$

4.40
$(4/3,\ 0,\ 0)$

4.41
$\left(\frac{45}{14}\pi,\ \frac{45}{14}\pi\right)$

4.42
$(0,\ 0,\ 4/3)$

4.43
$(0,\ 0,\ 16/15)$

4.44
$5k$

4.45
$8\pi k/21$

4.46
$2m/9$

4.47
$4m/5$

4.48
$5m/4$

4.49
$2m/9$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.50
8

4.51
5

4.52
$2mR^2/5$

4.53
$336k/5 = 28m/9$

4.56
-4π

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1

a) Si es una ED, es una igualdad y contiene una derivada.
b) Si es una ED, es una igualdad y tiene una derivada.
c) Si es una ED, es una igualdad y tiene una derivada.
d) Si es una ED, es una igualdad y tiene una derivada.
e) No es una ED, es una igualdad; sin embargo no tiene derivadas ni diferenciales. Sólo es una ecuación.
f) Si es una ED, es una igualdad y tiene las diferenciales dx y dy.
g) No es una ED ya que no es una igualdad, aunque tiene las diferenciales; es un diferencial pero no una ecuación.
h) Es una ED, es una igualdad y derivadas parciales.
i) Es una ED y es igualdad, ya que tiene diferenciales.
j) Es una ED ya que es una igualdad, y una derivada.

1.2

a) La variable dependiente $\boldsymbol{\theta}$ y la variable independiente t.
b) La variable dependiente $\boldsymbol{y}$ y la variable independiente x.
c) La variable dependiente $\boldsymbol{T}$ y la variable independiente t.
d) La variable dependiente $\boldsymbol{p}$ y la variable independiente t.
e) La variable dependiente $\boldsymbol{N}$ y las variables independientes r y t.
f) La variable dependiente $\boldsymbol{u}$ y las variables independientes x y t.
g) La variable dependiente $\boldsymbol{u}$ y las variables independientes x y y.
h) La variable dependiente $\boldsymbol{y}$ y la variable independiente x.
i) La variable dependiente $\boldsymbol{u}$ y las variables independientes x y y.
j) La variable dependiente $\boldsymbol{y}$ y la variable independiente x.

1.3

a) No lineal, segundo orden.
b) No lineal, segundo orden.
c) Lineal, primer orden.
d) No lineal, segundo orden.
e) Lineal, cuarto orden.
f) Tercer orden, no lineal
g) Segundo orden no lineal
h) Lineal primer orden
i) No lineal primer orden
j) No lineal primer orden
k) No lineal segundo orden

1.4

a) Sí
b) Sí
c) No
d) Sí
e) Sí

1.5

a) Sí,
b) Sí,
c) No,
d) Sí,
e) No,
f) Sí

1.6

a) $c = \frac{1}{2}$
b) No existe la solución
c) $c = \frac{3}{2}$

1.7

$$y = a \ln\left(\frac{x_0(x-a)}{x(x_0-a)}\right) \text{con } x_0 \neq a$$

1.8

$a = 5$

1.9

$a = 2, a = 1$

1.10

$a = 3.4142, a = 0.58579$

1.11

$y' + 2y = 0$	$y' + 2y = 0$
Sea $y = e^{-2x} \Rightarrow y' = -2e^{-2x}$	Sea $y = ce^{-2x} \Rightarrow y' = -2ce^{-2x}$
sustituyendo	sustituyendo
$-2e^{-2x} + 2e^{-2x} = 0$	$-2ce^{-2x} + 2ce^{-2x} = 0$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.12

$y'+y^2=0$	$y'+y^2=0$
Sea $y=\frac{1}{x}\Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}$	Sea $y=\frac{c}{x}\Rightarrow y'=-\frac{c}{x^2}$
sustituyendo	sustituyendo
$-\frac{1}{x^2}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=0$	$-\frac{c}{x^2}+\left(\frac{c}{x}\right)^2\neq 0$ a menos que $c = 0$ o $c = 1$.

1.13

$y'+p(x)y=0$	Ahora
Puesto que $g(x)$ es solución de la ecuación diferencial $g'+pg=0$	$cg'(x)+p(x)cg(x)=0$
	$c\left[g'(x)+p(x)g(x)\right]=0\Rightarrow g'(x)+p(x)g(x)=0$

1.14

$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$	Sustituyendo en la ecuación
$y'=-2c_1e^{-2x}-3c_2e^{-3x}$	$y''+5y'+6y=0$
$y''=4c_1e^{-2x}+9c_2e^{-3x}$	
	$4c_1e^{-2x}+9c_2e^{-3x}+5\left(-2c_1e^{-2x}-3c_2e^{-3x}\right)+6\left(c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}\right)=$
	$4c_1e^{-2x}-10c_1e^{-2x}+6c_1e^{-2x}+9c_2e^{-3x}-15c_2e^{-3x}+6c_2e^{-3x}=0$

1.15

Del problema anterior sabemos que la solución de la ecuación diferencial $y''+5y'+6y=0$ es

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$$

Ahora la evaluamos en $y(0)=2$

$$y(0)=c_1e^{-2(0)}+c_2e^{-3(0)}=c_1+c_2=2$$

Derivando la solución

$$y'=-2c_1e^{-2x}-3c_2e^{-3x}$$

Ahora la evaluamos en $y'(0)=3$

$$y'(0)=-2c_1e^{-2(0)}-3c_2e^{-3(0)}=-2c_1-3c_2=3$$

Ahora resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}c_1+c_2=2\\-2c_1-3c_2=3\end{array}\right\}\Delta=-1\Rightarrow \begin{array}{l}c_1=\dfrac{\begin{vmatrix}2&1\\3&-3\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{-6-3}{-1}=9\\[2ex] c_2=\dfrac{\begin{vmatrix}1&2\\-2&3\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{3+4}{-1}=-7\end{array}$$

Entonces la solución particular es:

$$y=9e^{-2x}-7e^{-3x}$$

1.16

a) La solución particular es:

$$y=-6.667e^{2x}+0.416e^{-x}+0.25e^{-3x}$$

b) La solución particular es:

$$y=-0.66667c_1e^{\frac{x}{2}}+0.66667e^{-x}$$

c) La solución particular es:

$$y=6x^2-11$$

d) La solución particular es:

$$y=\frac{x}{2}\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}x+4$$

e) La solución particular es:

$$y=e^x-0.30685-2x$$

1.17

La solución particular es:

$$y=2e^{-2x}+e^{-x}$$

1.18

La solución particular es:

$$y=-0.3333e^x+2.3333e^{2x}$$

1.19

La solución particular es:

$$y=-\frac{x^2}{2}+1.9375-2.75x+0.062e^{-4x}$$

1.20

La solución particular es

$$z=e^{2x}-\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x-2\sqrt{2}\ \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

1.21

La solución particular es:

$$y=\frac{4}{3}x^3$$

1.22

$m=0.61803, 1.618$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

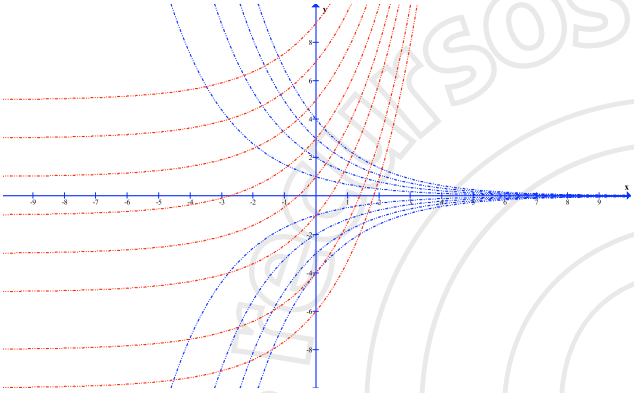
1.23

$$m = \frac{1}{4}$$

1.24

$$y = C + 4e^{x/2}$$

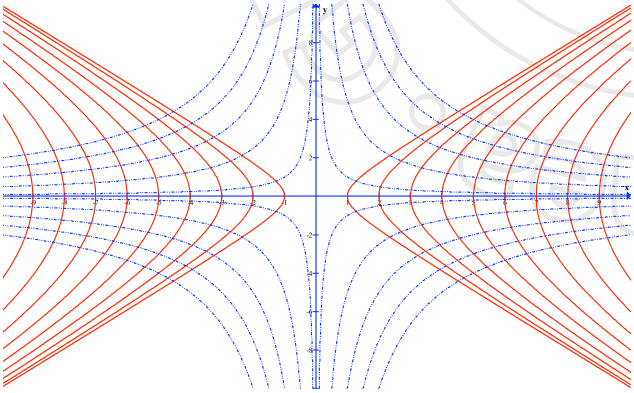
1.25



1.26

$$y = \frac{C}{x}$$

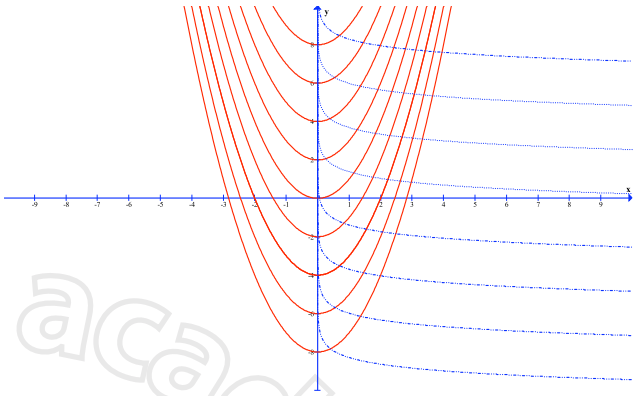
1.27



1.28

$$y = \ln \frac{C}{\sqrt{x}}$$

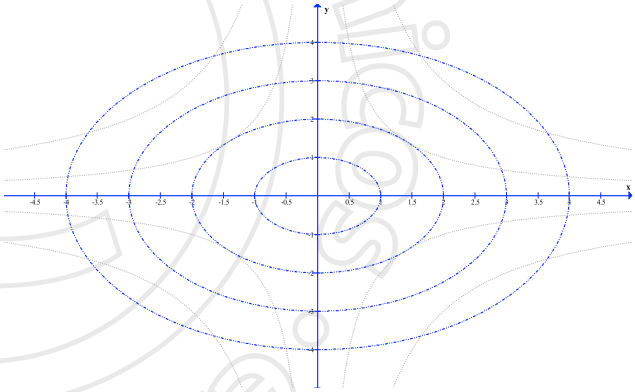
1.29



1.30

$$y = \frac{C}{x}$$

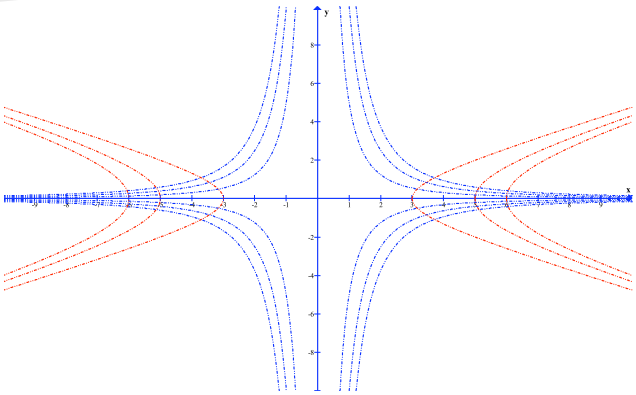
1.31



1.32

$$y = \frac{C}{x^2}$$

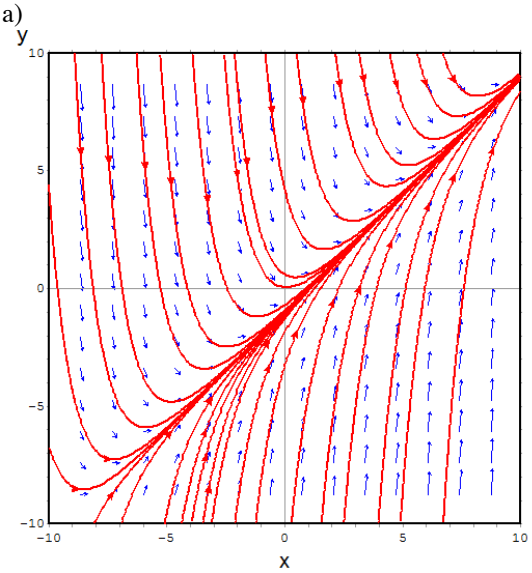
1.33



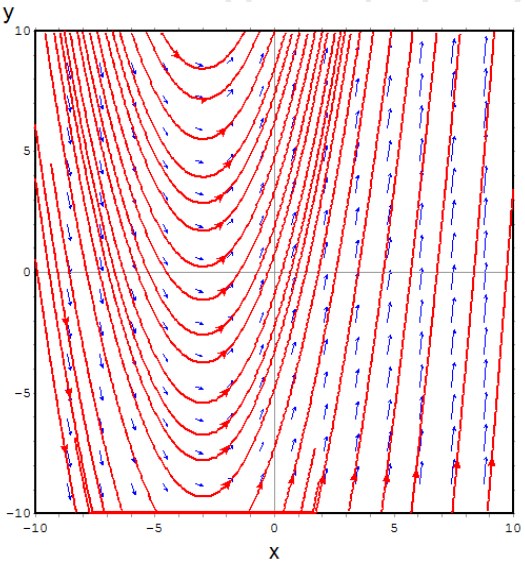
D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.34

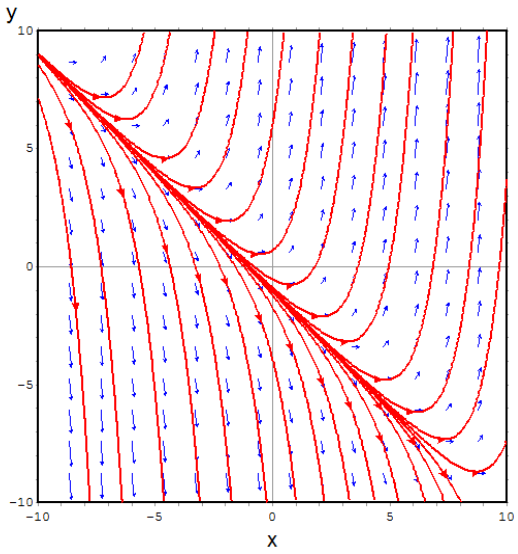
a)



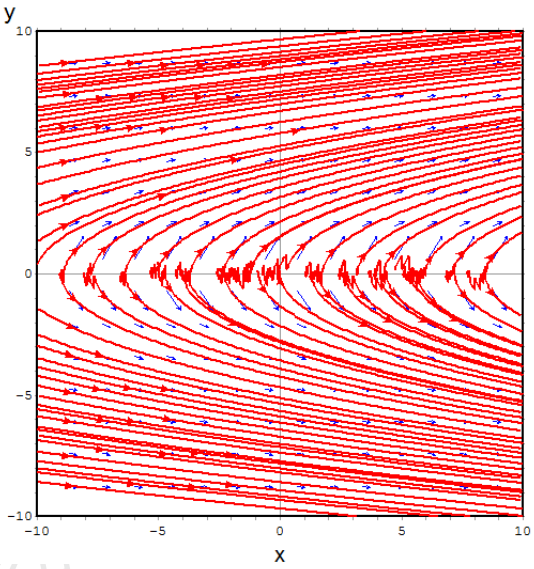
b)



c)

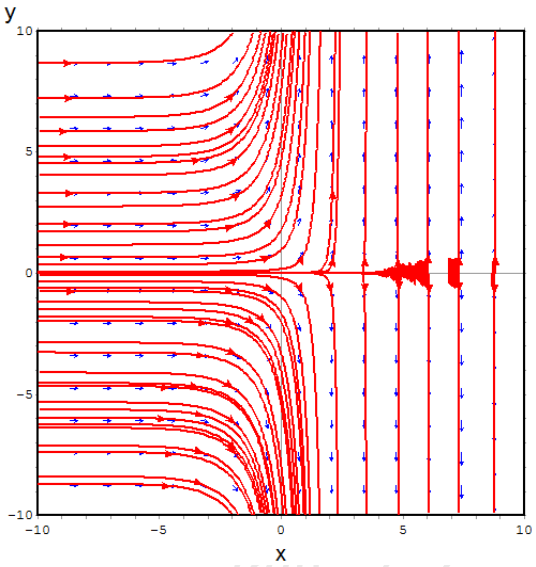


d)

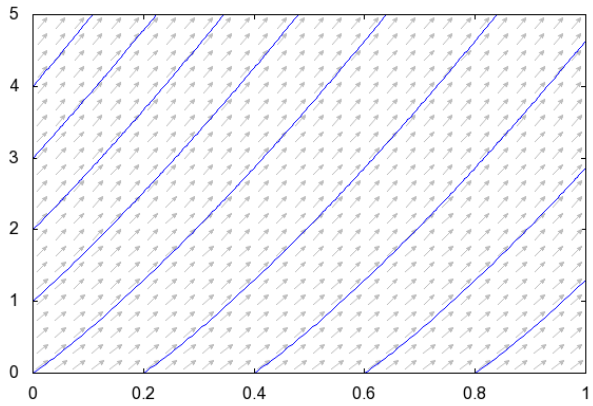


D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

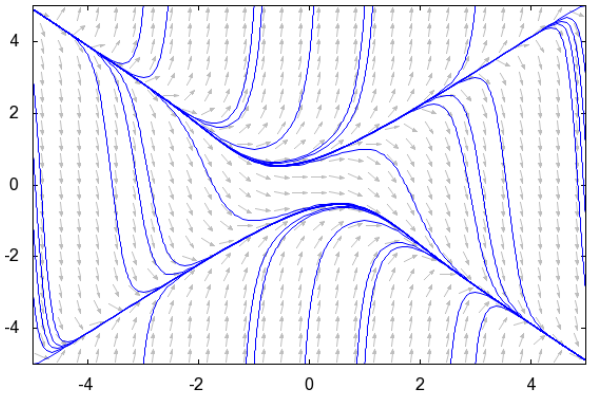
e)



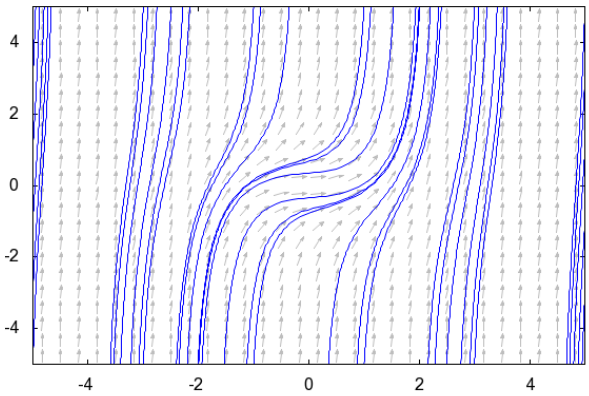
f)



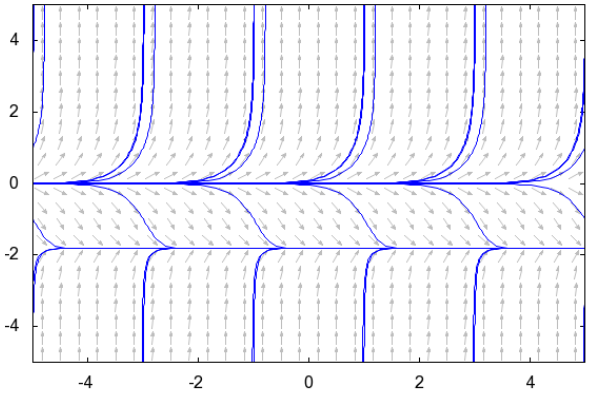
g)



h)

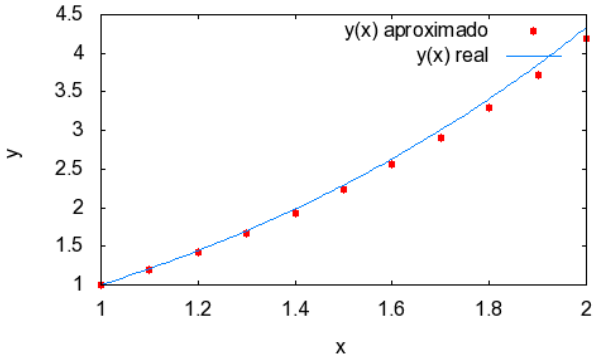


i)



1.35

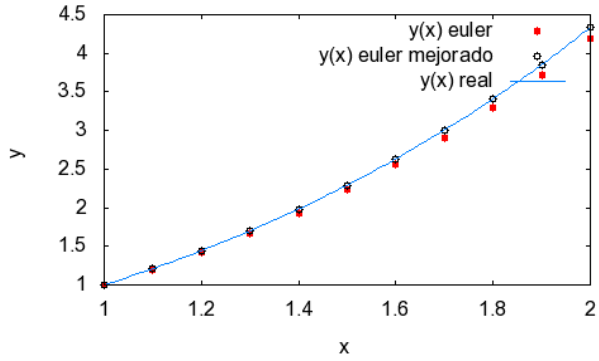
Respuesta 2.23, error 2.69%



D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

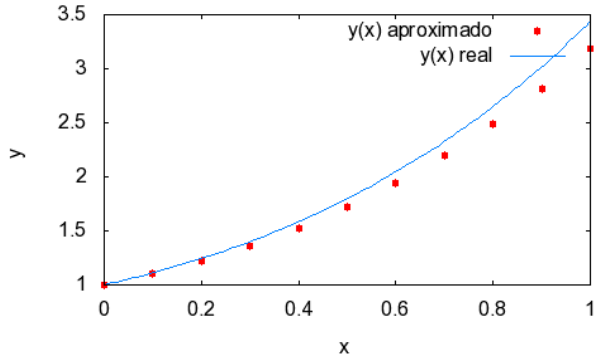
1.36

Respuesta 2.2925, error -0.035%.

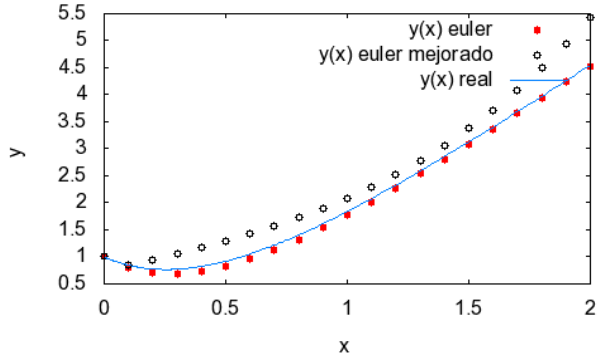


1.37

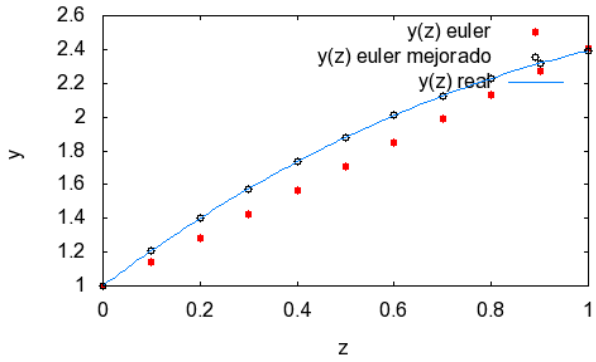
1.72102



1.38



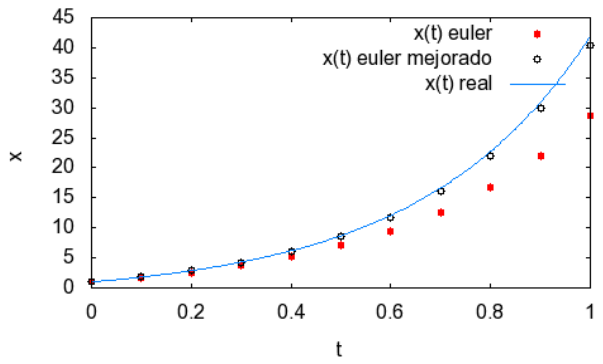
1.39



	Euler	Euler mejorado
0.0	1.0	1.0
0.1	1.141666666666667	1.208055555555556
0.2	1.283194444444445	1.399458179012346
0.3	1.424581018518519	1.574753716478052
0.4	1.565824035493827	1.734470122437938
0.5	1.706921102752058	1.879118046202473
0.6	1.847869787797925	2.009191399132503
0.7	1.988667617594557	2.125167903272049
0.8	2.1293120778878	2.227509621998131
0.9	2.269800612519263	2.316663473277081
1.0	2.410130622727917	2.393061726097443

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.40



	Euler	Euler mejorado	$x(t)=\frac{19}{9}e^{3t}+\frac{2}{3}t-\frac{10}{9}$
0.0	1.0	1.0	1.0
0.1	1.7	1.795	1.8053
0.2	2.59	2.841275	2.8689
0.3	3.727	4.225514875	4.2814
0.4	5.1851	6.064317506875	6.1647
0.5	7.06063	8.514507046746875	8.6836
0.6	9.478819	11.78701197787455	12.06
0.7	12.6024647	16.16553111024127	16.595
0.8	16.64320411	22.0316393432745	22.693
0.9	21.876165343	29.89855491670421	30.902
1.0	28.6590149459	40.45655636296716	41.958

1.41

$dA/dt = -(m - A)$

1.42

$dM/dt = -cM$

1.43

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - \frac{c}{m}v$$

1.44

a)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow (20\text{kg})\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{\text{N}}{\text{m}}x = 0$$

b)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow (20\text{kg})\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{\text{N}}{\text{m}}x + 8\frac{\text{kg}}{\text{s}}v = 0$$

1.45

$$\frac{dS}{dt} = (0.05)S$$

1.46

$\frac{dP}{dt} = CP$, C es positiva porque es crecimiento.

1.47

$\frac{dQ}{dt} = -CQ$, es -C porque es decrecimiento.

1.48

$dA/dt = (100 - 0{,}17)A$

1.49

$$\frac{dA(t)}{dt} = (1 - A)$$

1.50

$$\frac{dS}{dt} = 250000 + (0{,}1)S - 20000$$

$$\frac{dS}{dt} = 250000 + (0.1)S - 20000$$

1.51

$$\frac{dM}{dt} = 2.5 - 0.347M$$

1.52

$$\frac{dA}{dt} = 10 - 0.3A$$

1.53

$$\frac{dS}{dt} + \frac{3}{25\,\text{min}}S = 0$$

1.54

$$\frac{dB}{dt} = -\alpha A + \beta B; \quad A(0) = 10\text{ kg}, B(1) = 5\text{ kg}, A + B = 10\text{ kg}$$

1.55

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20°C), \quad T(0) = 35°C, T(2) = 33°C$$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.56

$$\frac{dy}{dt} - 50\frac{\text{m}}{\text{s}} = -9.8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t$$

1.57

Sea N(t) cantidad de radio al tiempo t, $N(0) = N_0$, $N(1600) = N_0/2$, $\frac{dN}{dt} = KN$

1.58

Sea P(t) el número de bacterias al tiempo t, $P_0 = P(0)$, $P(6) = 2P_0$, $\frac{dP}{dt} = KP$

1.59

v(0) = 15 m/s, v(5) = 8 m/s, $\frac{dv}{dt} = -kv$

1.60

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

1.61

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow v\frac{dv}{dx} = -\frac{25}{x^2}, v(10) = 5$$

1.62

$$\frac{dP}{dt} = 0.15P - 90$$

1.63

-2.7726×10^{-2}, 39.623 años

1.64

$$2\frac{di}{dt} + 10i = 150 \text{ con } i(0) = 0$$

Grupo Editorial Patria · Recursos Académicos en Línea

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1

$$y' = 8 + 2 - 3x^2$$

2.2

$$y = \frac{81}{5}x^5 + 108x^4 + 288x^3 + 384^2 + 256x + C_4$$

2.3

$$y = C + \frac{1}{3}e^{3x} + x^2$$

2.4

$$e^y = e^x - C$$

2.5

$$y^2 = x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\, 2x + C$$

2.6

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}\left(x^3 - 1\right)^{\frac{2}{3}} + C$$

2.7

$$y = C - x + x\ln x - 3x^3$$

2.8

$$-\cos y + e^{-x} = C$$

2.9

$$\frac{1}{y} = -\arctan x + C$$

2.10

$$\frac{1}{2}e^{-2y} + \frac{1}{3}e^{3x} = C$$

2.11

6.9315×10^{-4}s, 1000 s.

2.12

60 s

2.13

4 veces la población inicial

2.14

46.02 días

2.15

10s

2.16

0.036 g/cm^3, 0.073 g/cm^3.

2.17

$$y = Ce^{3x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

2.18

$$y = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

2.19

$$xe^{-y} + 5ye^{-y} + 5e^{-y} = C_1$$

2.20

$$y = \tan\left(x - C\right) - x$$

2.21

$$y = 2\arctan\left(x - C\right) - x$$

2.22

$$y^2 = 2x^2\ln\left(cx\right)$$

2.23

$$\left(x^3 + y^3\right)^2 = cx^9$$

2.24

$$\frac{y}{x} - \arctan\frac{y}{x} = \ln cx$$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.25

$$\left(\frac{y}{x}-1\right)e^{\frac{y}{x}}-\ln x=C$$

2.26

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)=C$$

2.27

$$3xy-2x^2-y^2=C_1$$

2.28

$$x^2y^2+x^3y=C_1$$

2.29

$$y^2=\frac{1}{2x^2}\left(x^4+2C\right)$$

2.30

$$y=-x\ln x+C_1x$$

2.31

$$-\frac{x^2}{2}+xy+\frac{y^2}{2}=C_1$$

2.32

$$y=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{-6x^2-24x-6C+1}$$

2.33

$$x\text{sen}y+y\cos x-\frac{y^2}{2}=C$$

2.34

$$x^2y^2-3x+4y=C$$

2.35

$$\left(-1+\ln x\right)y+x\ln x=C$$

2.36

$$y^3x+y^2\cos x-\frac{x^2}{2}=C$$

2.37

Factor integrante: $\mu\left(x\right)=x^2$, Solución:

$$x\text{sen}xy+x^3y^3=C$$

2.38

Factor integrante: $\mu\left(xy\right)=xy$, Solución:

$$x^2y+xy^2=C$$

2.39

Factor integrante: $\mu\left(xy\right)=e^{xy}$, Solución:

$$e^{xy}+x+y=C$$

2.40

Factor integrante: $\mu\left(x\right)=\frac{1}{x^5}$, Solución:

$$y=x^5\tan x+C_1x^5$$

2.41

Factor integrante: $\mu\left(x\right)=x^2$, Solución:

$$3x^2y=e^{3x}+C_1$$

2.42

Factor integrante: $\mu\left(x\right)=x$, $3xy=4x^2+3C_1$

2.43

Factor integrante: $\mu\left(x\right)=e^{-2x}$, $y=3+C_1e^{2x}$

2.44

Factor integrante: $\mu\left(x\right)=e^{-2x}$, $y=-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+C_1e^{2x}$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.45

Factor integrante: $\mu(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, $y=e^{\frac{x^2}{2}}\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)$

2.46

Factor integrante: $\mu(x)=e^{-x^2}$, $y=e^{x^2}\left(\ln x+C_1\right)$

2.47

Factor integrante: $\mu(x)=e^{\operatorname{sen} x}$,

$y=e^{-\operatorname{sen} x}\left(\tan x+C_1\right)$

2.48

Factor integrante: $\mu(x)=e^{-\sin x}$, $y=-1+C_1e^{\tan^{-1}x}$

2.49

Factor integrante: $\mu(x)=e^{x(\ln x-1)}$, $y=1+C_1x^{-x}e^x$

2.50

Factor integrante: $\mu(x)=e^{x+x^3}$, $y=3+C_1e^{-x\left(1+x^2\right)}$

2.51

$\mu(x)=\sec x+\tan x$, $y=\cos x\left(\frac{x-\cos x+C_1}{1+\operatorname{sen} x}\right)$

2.52

$\frac{1}{y}=\frac{1}{x}(\ln x+C)$

2.53

$\frac{1}{y^3}=C\left(1+x^2\right)+1$

2.54

$\frac{1}{y^3}=-\frac{9}{5x}+\frac{C}{x^6}$

2.55

$y^3=-3x^2+Cx^{\frac{3}{2}}$

2.56

$\frac{1}{x}=-y^2+2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}$

2.57

$y^{-2}=\frac{x}{2}-\frac{1}{20}+C_1e^{-10x}$

2.58

$y^2=-x^2+C_1x$

2.59

$y^{-1}=-\frac{1}{3}x^4+C_1x$

2.60

$y^{-2}=-2xe^{2x}+C_1e^{2x}$

2.61

$y^2=\frac{1}{4x^{\frac{2}{3}}}\left(x^{\frac{8}{3}}+4C_1\right)$

2.62

$y=x+\frac{2x}{-1+2Ce^{2x^2}}$

2.63

$y=-e^x+\frac{1}{-1+Ce^{-x}}$

2.64

$y=\tan x+\frac{1}{-\cos x\ln\left(\sec x+\tan x\right)+C\cos x}$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.65

$$y = -2 + \frac{1}{-1 + Ce^{-x}}$$

2.66

$$y = -3 + \frac{1}{-x + C}$$

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1
$y = Ae^{2x} + Be^{x/2}$

3.2
$y = Ae^{x/4} + Bxe^{x/4}$

3.3
$y = Ae^{-x}(\cos\sqrt{2x}) + Be^{-x}(\text{sen}\sqrt{2x})$

3.4
$y = Ae^{-x} + Be^{3x}$

3.5
$y = Ae^{-5x} + Bxe^{-5x}$

3.6
$y = Ae^{-x} + Be^{x}$

3.7
$y = Ae^{2x} + Be^{x}$

3.8
$y = Ae^{-2x\sqrt{33}-12} + Be^{2x\sqrt{33}+12}$

3.9
$y = Ae^{x(\sqrt{61}-8)} + Be^{-x(\sqrt{61}+8)}$

3.10
$Ae^{-x(2\sqrt{5}+5)} + Be^{x(2\sqrt{5}-5)}$

3.11
A= 2, ω=30π, P=(1/15)s, ν=15Hz

3.12
4.7746×10^{-2}m

3.13
-148.04

3.14
58. 86 N/m, 2. 2293 Hz

3.15
0.3464 m

3.16
$y = \frac{A}{x^3} + Bx^4$

3.17
$y = \frac{A}{\sqrt[3]{x}} + Bx^{\frac{2}{3}}$

3.18
$y = Ax^3 + \frac{B}{x^4}$

3.19
$y = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^2}\ln\ x$

3.20
$y = Ax^2\cos(\ln\ x) + Bx^2\text{sen}(\ln\ x)$

3.21
$Ax\cos(\ln\ x) + Bx\text{sen}(\ln\ x)$

3.22
$y = \frac{A}{x} + \frac{B}{x}\ln\ x$

3.23
$y = \frac{A}{x} + Bx$

3.24
$y = \frac{A}{x^2} + Bx$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.25

$$y=\frac{A}{\sqrt{x}}+B\sqrt{x}$$

3.26

$$y=\frac{2}{3}x\ln^3 x+C_1x\ln x+C_2x$$

3.27

$$y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}-\frac{1}{4}e^{-x}\left(3x^2-2x^2\ln x\right)$$

3.28

$$y=C_1e^{x}+C_2x-\frac{1}{2}e^{-x}\left(2x-1\right)$$

3.29

$$y=A\cos 4x+B\text{sen}4x+\frac{1}{64}\cos 4x+\frac{1}{8}x\ \text{sen}4x$$

3.3

$$y=Ae^{2x}+Be^{-4x}+\left(\ln x\right)e^{2x}$$

3.31

a) D^5+16D^2

b) D^3-2D^2+5D

c) D^5

d) $D^4-2D^3-D^2+2D+10$

e) $D^6-3D^5+7D^4-13D^3+12D^2-4D$

3.32

a) $y=Ae^{2x}+Bx^{2x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}$

b) $y=A(\cos\sqrt{3}x)e^{x}+B(\text{sen}\sqrt{3}x)e^{x}+\frac{1}{12}e^{4x}$

c) $y=A\ \cos\left(2\sqrt{2}x\right)+\ B\ \text{sen}\ \left(2\sqrt{2}x\right)+\frac{16}{7}\text{sen}\ x$

d) $y=A\cos x+B\ \text{sen}\ x-\frac{1}{4}\ \cos\ 3x$

3.33

a) $y=Ae^{x/3}+Bxe^{x/3}+x+6$

b) $y=A\cos\left(\frac{2}{3}x\right)+B\ \text{sen}\left(\frac{2}{3}x\right)+\frac{1}{13}e^{x}$

c) $y=A\cos 2x+B\ \text{sen}2x-3x\cos 2x+\frac{3}{4}\text{sen}2x$

d) $y=Ae^{-x\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{3}{2}\right)}+Be^{x\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\right)}+\frac{4}{15}\cos\ 2x-\ \frac{2}{15}\text{sen}\ 2x$

e) $y=Ae^{x\left(\sqrt{2}+2\right)}+Be^{-x\left(\sqrt{2}-2\right)}-e^{x}$

f) $y=Ae^{x}+Be^{-7x}-\frac{1}{12}e^{x}$

g) $y=Ae^{x(\sqrt{2}-2)}+Be^{-x(\sqrt{2}+2)}+\frac{21}{2}x-3x^2+\frac{1}{2}x^3-18$

h) $y=A\cos\ x+B\text{sen}\ x+e^{-x}(8xe^{x}+1)$

3.34

$x=Ae^{3t}+Be^{-t}$,

a)
$y=\frac{1}{2}Ae^{3t}-\frac{1}{2}Be^{-t}$

$x=Ae^{-t}+\frac{5}{2}Be^{-t}+te^{-t}$

b)
$y=\frac{1}{2}Ae^{-t}+Be^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}$

$x=Ae^{t}\cos 2t+Be^{t}\text{sen}2t$

c)
$y=\frac{1}{2}Ae^{t}\text{sen}2t-\frac{1}{2}Be^{t}\cos 2t$

3.35

a) $y=A+B\ln\ x$

b) $y=A+B(x-1)^2$

c) $y=A-\ln\ x+x(B+1)-x\ln\ x$

d) $y=A+B(x-1)^2$

e) $y=A+Bx^2+\frac{1}{2}x^2\ln\ x$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.36

a) $\omega = 2, \delta = 0.927\text{rad}, R = 5$

b) $\omega = 5, \delta = 0.588\text{rad}, R = 3.6$

c) $\omega = 8, \delta = -0.46365\text{rad}, R = 4.47$

d) $\omega = 3, \delta = -\frac{\pi}{3}\text{rad}, R = 2$

3.37

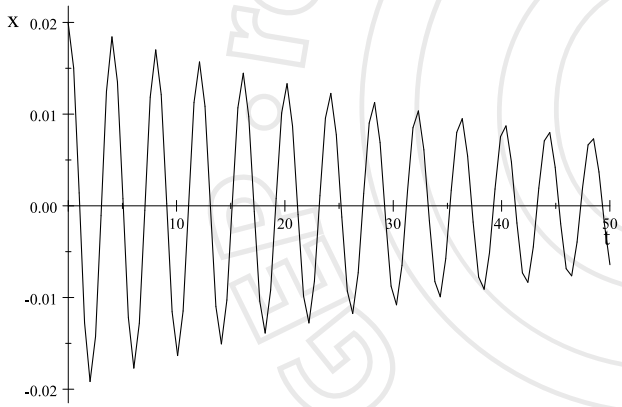
$\omega = 10.46\text{Hz}, P = 0.6\text{s}, R = .03\text{m}$

3.38

$\omega = 18.\ 074\text{Hz}, P = 0.34764\text{s}, R = 0.111\text{m}$

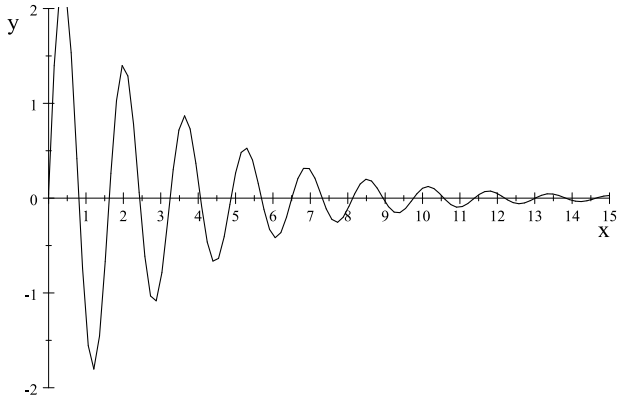
3.39

$x = .02e^{-0.02t}\cos 14t + 2.\ 8571\times 10^{-5} e^{-0.02t}\text{sen}14t$



3.40

$x = .05e^{-\frac{3}{10}t}\cos\frac{\sqrt{1491}}{10}t + 2.\ 5937e^{-\frac{3}{10}t}\text{sen}\frac{\sqrt{1491}}{10}t$



3.42

$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\frac{dy}{dt}, \quad \text{con } y(0) = y_0, y'(0) = 0$

3.43

$y = y_0 + \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k}\right)$, si

3.44

62.018 m

3.45

$y = y_0 - \frac{9.8t^2}{2}$, no

3.46

$my'' = -ky' + mg \text{ con } y'(0) = 4,\ y(0) = 20$

3.47

$y = y_0 + \frac{mv_0}{k} - \frac{g}{k^2}m^2 - \frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{gm}{k}t$

, si

3.48

$t = 2.\ 5406\times 10^{-2}\text{s}$, $y_{max} = 20.022$ m

3.49

$y = -4.\ 9t^2 + 4t + 20$, no

3.50

t= 2.4693 s

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

4.1

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\ldots$$

$$e^3 = 1+3+\frac{1}{2}(3^2)+\left(\frac{1}{6}\right)(3^3)+\frac{1}{24}(3^4)=\frac{131}{8}$$

4.2.

$$\operatorname{sen} x = x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\frac{1}{362880}x^9,$$

6.9253×10^{-3}

4.3

$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+..$, no es buena aproximación

4.4

a)

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{1}{120}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5+\ldots$$

b)

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\ldots = 1$$

c)

$$xe^x = x+x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+\frac{1}{24}x^5+\frac{1}{120}x^6+\frac{1}{720}x^7+\ldots$$

4.5

$$y=e^{\operatorname{sen} x}=x+x^2+\left(\frac{1}{2}\right)x^3+\left(\frac{1}{6}\right)x^4+\left(\frac{1}{24}\right)x^5+\left(\frac{1}{120}\right)x^6+\left(\frac{1}{720}\right)x^7+\ldots$$

4.6

a)no es 0 es igual a 2
b) si es igual a 0
c) si es igual a cero

4.7

a) diverge
b) converge
c) converge

4.9

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\ \forall x$$

4.10

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_n x^{n-1},\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\,a_n x^{n-2}$$

4.12

$$y=C_1e^x=C_1\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{720}x^6+\ldots\right)$$

4.13

$$y=C_1e^{-2x}=C_1\left(1-2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+\frac{2}{3}x^4+\ldots\right)$$

4.14

$$y=C_1\left(1-2x^2-\frac{x^4}{8}+\ldots\right)+C_2\left(x+\frac{1}{6}x^3+\ldots\right)$$

4.15

$\rho=2,\ -2<x<2$

4.17

$\rho=\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

4.18

$$\operatorname{sen} 2x = 2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5-\frac{8}{315}x^7+\ldots$$

4.19

$\cot x=\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5+\ldots$, porque hay indeterminaciones en las divisiones

4.20

$$y=2\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\ldots\right)+1\left(x+\frac{x^3}{3}+\ldots\right)$$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.20

$$y=-(1-x^2+\frac{1}{6}x^4+\ldots)+3(x-\frac{1}{4}x^3+\ldots)$$

4.22

$$H_0(x)=1$$
$$H_1(x)=2x$$
$$H_2(x)=4x^2-2$$
$$H_3(x)=8x^3-12x$$
$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12$$
$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$$

4.23

$$e^{2tx-x^2}=1+2tx+x^2(2t^2-1)+x^3\left(\frac{2t}{3}(2t^2-3)\right)+x^4\left(\frac{1}{6}(-12t^2+4t^4+3)\right)$$
$$+x^5\left(\frac{1}{15}\left(4t^5-20t^3+15t\right)\right)+x^6\left(\frac{4}{45}t^6-\frac{2}{3}t^4+t^2-\frac{1}{6}\right)+\ldots$$

$$e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(t)}{n!}x^n \Rightarrow \begin{cases} \frac{H_0(t)}{0!}x^0=1\Rightarrow H_0(t)=1 \\ \frac{H_1(t)}{1!}x^1=2tx\Rightarrow H_1(t)=2t \\ \frac{H_2(t)}{2!}x^2=x^2(2t^2-1)\Rightarrow H_2(t)=4t^2-2 \\ \frac{H_3(t)}{3!}x^3=x^3\left(\frac{2t}{3}(2t^2-3)\right)\Rightarrow H_3(t)=8t^3-12t \\ \frac{H_4(t)}{4!}x^4=\frac{x^4}{6}(-12t^2+4t^4+3)\Rightarrow H_4(t)=16t^4-48t^2+12 \\ \frac{H_5(t)}{5!}x^5=\frac{x^5}{15}\left(4t^5-20t^3+15t\right)\Rightarrow H_5(t)=32t^5-160t^3+120 \end{cases}$$

4.25

$$y=C_1-\frac{1}{2}C_1x^2\lambda+C_1x^4\left(\frac{\lambda^2}{24}-\frac{\lambda}{6}\right)+C_2x+C_2x^3\left(\frac{1}{3}-\frac{\lambda}{6}\right)+\ldots,$$

4.26

$$y=\frac{1}{24}C_1(-12t^2\alpha^2-5t^4\alpha^2-2t^4\alpha^3+t^4\alpha^4+12t^2\alpha+6t^4\alpha+24)-\frac{1}{6}C_2t(t^2\alpha^2-t^2\alpha-2t^2-6)$$

4.27

$$y=C_1+\frac{1}{6}x^3C_1+C_2x+C_2\frac{1}{12}x^4+\ldots$$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.28

$$y = C_1 + xC_2 \mp \frac{1}{6}k^2x^3C_1 \mp \frac{1}{12}k^2x^4C_2 \ldots$$

4.29

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

4.30

$$P_0(x) = \frac{1}{2}, P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, P_2(x) = \frac{3}{4}\sqrt{10}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), P_3(x) = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{7}\left(5x^3 - 3x\right), P_4(x) = \left(\frac{105}{1096}\sqrt{137}\right)\left(-\frac{6}{7}x + x^4 - \frac{3}{35}\right), P_5(x) = \sqrt{\frac{11}{2}}\left(\frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x\right)$$

4.34

```
(%i43)  f(x):=exp(x^2);
        taylor(f(x),x,0,5);
        plot2d([f(x),taylor(f(x),x,0,8)],[x,-4,4],[y,1,5]);
(%o43)  f(x):=exp(x^2)
```

$$(\%o44)/T/\ 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \ldots$$

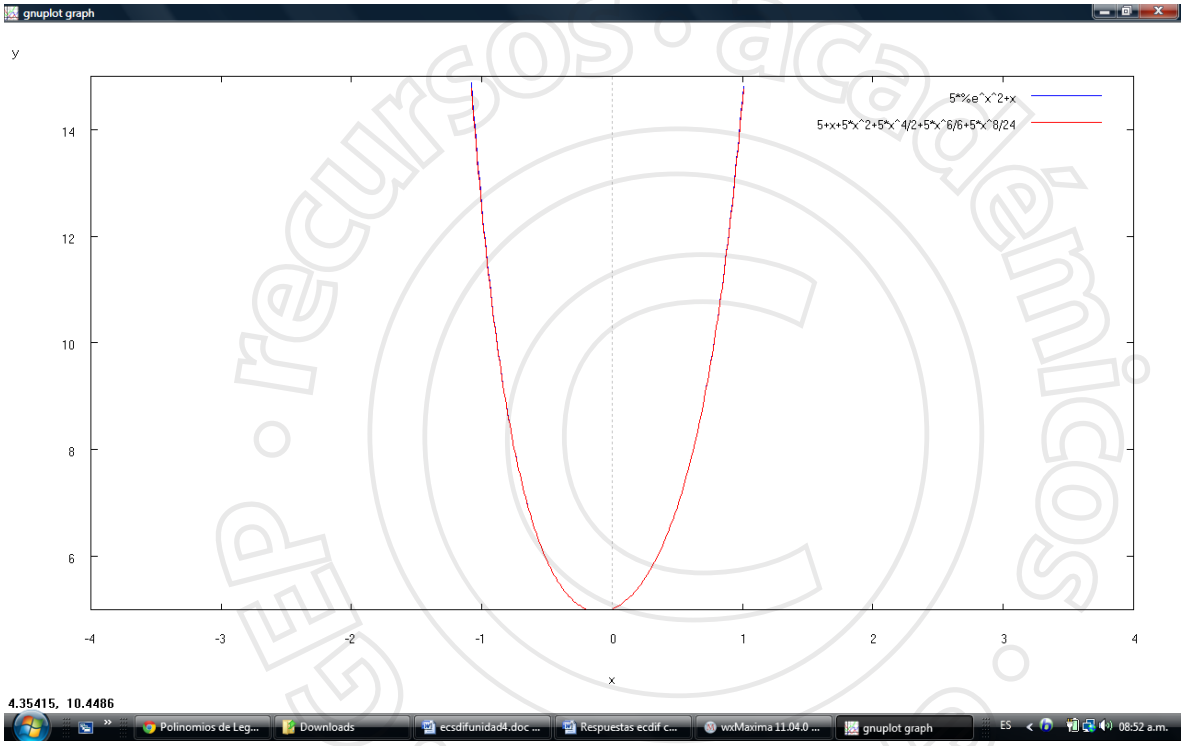
D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.35

```
(%i52) f(x):=x+5*exp(x^2);
       taylor(f(x),x,0,5);
       plot2d([f(x),taylor(f(x),x,0,8)],[x,-4,4],[y,5,15]);
```

(%o52) $f(x):=x+5\exp(x^2)$

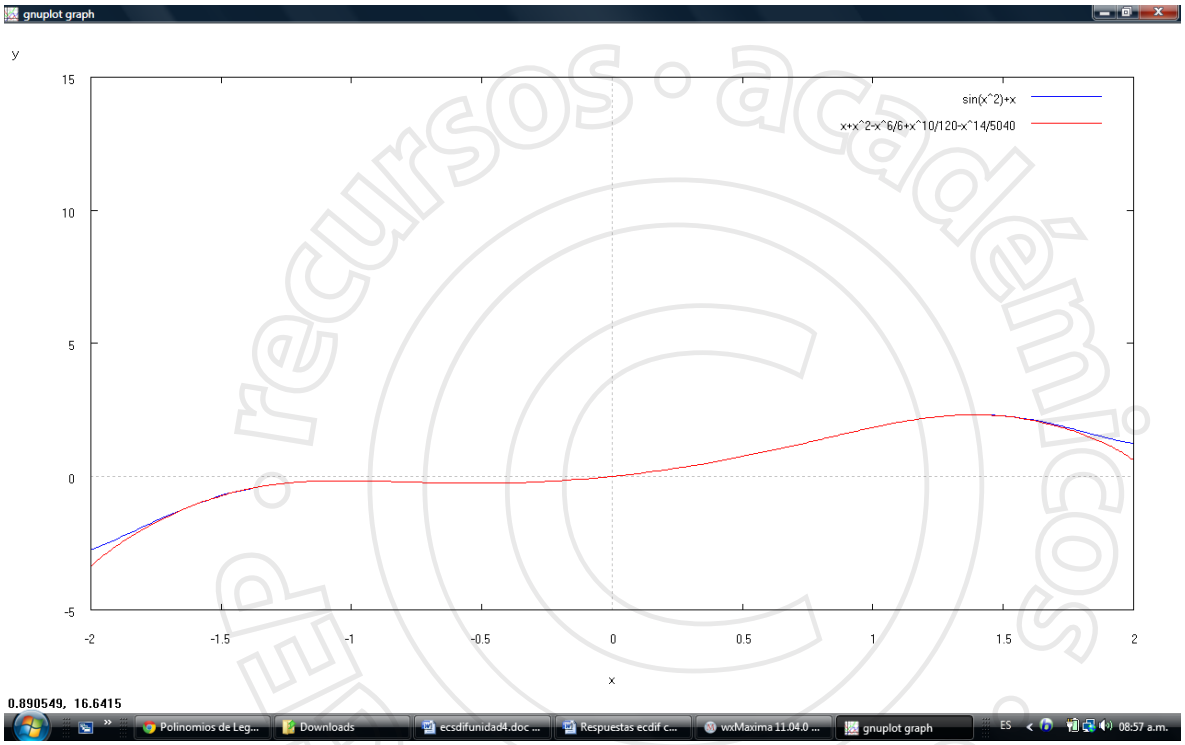
(%o53)/T/ $5+x+5x^2+\frac{5x^4}{2}+\ldots$



D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.36

```
(%i64) f(x):=x+sin(x^2);
       taylor(f(x),x,0,5);
       plot2d([f(x),taylor(f(x),x,0,15)],[x,-2,2],[y,-5,15]);
(%o64) f(x):=x+sin(x^2)
(%o65)/T/ x+x^2+...
```



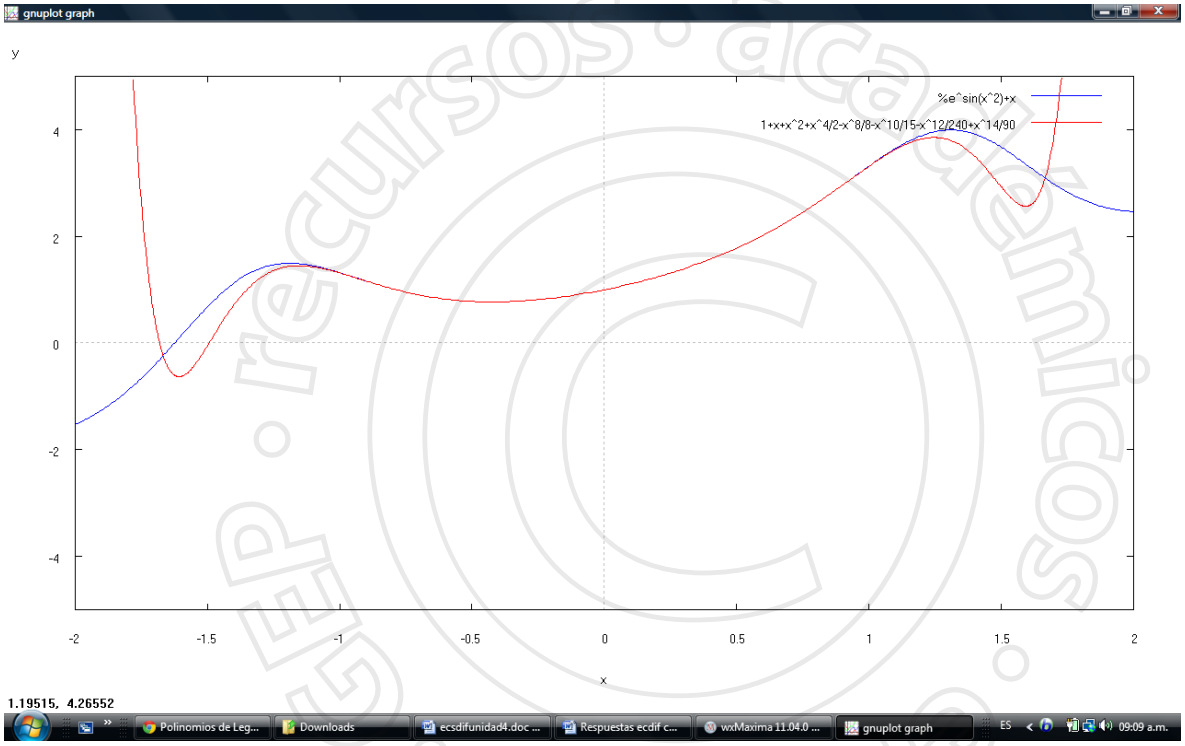
D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.37

```
(%i85) f(x):=x+exp(sin(x^2));
       taylor(f(x),x,0,15);
       plot2d([f(x),taylor(f(x),x,0,15)],[x,-2,2],[y,-5,5]);
```

(%o85) $f(x):=x+\exp\left(\sin\left(x^2\right)\right)$

(%o86)/T/ $1+x+x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^8}{8}-\frac{x^{10}}{15}-\frac{x^{12}}{240}+\frac{x^{14}}{90}+\ldots$



D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.38

```
(%i94) f(x):=6*exp(x)+exp(sin(x^2));
       taylor(f(x),x,0,30);
```

$$(\%o94)\quad f(x):=6\exp(x)+\exp\left(\sin\left(x^2\right)\right)$$

$$(\%o95)/T/\quad 7+6x+4x^2+x^3+\frac{3x^4}{4}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^6}{120}+\frac{x^7}{840}-\frac{839x^8}{6720}+\frac{x^9}{60480}-\frac{40319x^{10}}{604800}+\frac{x^{11}}{6652800}-\frac{332639x}{7983360}$$
$$+\frac{x^{13}}{1037836800}+\frac{161441281x^{14}}{14529715200}+\frac{x^{15}}{217945728000}+\frac{18767548801x^{16}}{3487131648000}+\frac{x^{17}}{59281238016000}+$$
$$\frac{188194406401x^{18}}{1067062284288000}+\frac{x^{19}}{20274183401472000}-\frac{329746005388799x^{20}}{405483668029440000}+\frac{x^{21}}{8515157028618240000}-$$
$$\frac{59470937977651199x^{22}}{187333454629601280000}+\frac{x^{23}}{4308669456480829440000}+\frac{1289466222921676801x^{24}}{10340806695553990656000000}+$$
$$\frac{x^{25}}{258520167388849766400000000}+\frac{333944334658142208000 1x^{26}}{6721524352110093926400000 0}+\frac{x^{27}}{181481157506972536012800000 0}+$$
$$\frac{721126828663792911360001x^{28}}{508147241019523100835840000 00}+\frac{x^{29}}{147362699895661699242393600000 0}-$$
$$\frac{986456255919713471692799 99x^{30}}{442088099686985097727180800000 00}+\ldots$$

4.39

a)

```
(%i15) 'sin(x) = niceindices(powerseries(sin(x), x, 0));
```

$$(\%o15)\quad \sin(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

b)

```
(%i16) 'cos(x) = niceindices(powerseries(cos(x), x, 0));
```

$$(\%o16)\quad \cos(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$$

c)

```
(%i19) 'exp(x) = niceindices(powerseries(exp(x), x, 0));
```

$$(\%o19)\quad \%e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.40

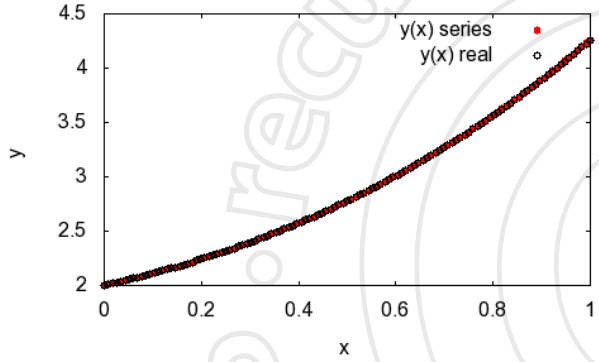
$$y = 1 + x - x^3 - \frac{1}{2}x^4$$

4.41

$$y = x - (x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 - \frac{1}{60}(x-1)^5 + \ldots$$

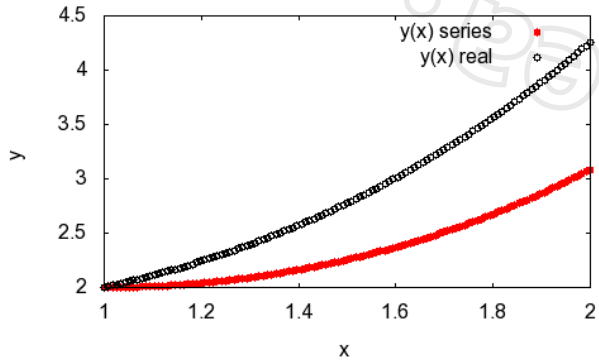
4.42

$$y = 2 + x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5$$



4.43

$$y = 1 + x + + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{6} + + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120}$$

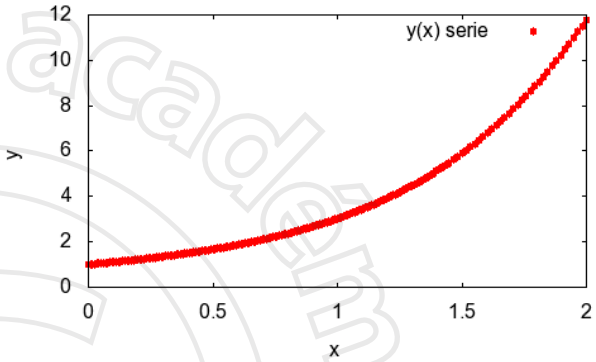


4.44

$$y = x + (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 + \frac{5}{12}(x-1)^4 + \frac{13}{60}(x-1)^5$$

4.45

$$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{15}x^5$$



D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

5.1

a) $\dfrac{1}{s-3}$

b) $\dfrac{b}{b^2+s^2}+\dfrac{s}{a^2+s^2}$

c) $\dfrac{8}{s-1}$

d) $\dfrac{25}{s-w}$

5.2

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{\infty} t^{\alpha}e^{-t}\,dt=-\alpha\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt=\alpha\Gamma(\alpha)$$

5.3

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

5.4

$$\frac{3}{2}\sqrt{\pi},\frac{15}{8}\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}$$

5.5

$$\mathcal{L}\left(t^{\alpha}\right)=\int_0^{\infty} t^{\alpha}e^{-st}\,dt=\int_0^{\infty}\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha}e^{-u}\frac{du}{s}=\frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^{\infty}u^{\alpha}e^{-u}\,du=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

5.6

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-t}\,dt=1$$

$$\Gamma(n-1)=\int_0^{\infty}t^{n}e^{-t}\,dt=\left[-t^{n}e^{-t}\right]_0^{\infty}+n\int t^{n}e^{-t}\,dt=n\int_0^{\infty}t^{n-1}e^{-t}\,dt=n\left[-e^{-t}t^{n-1}\right]_0^{\infty}+n(n+1)\int_0^{\infty}t^{n-2}e^{-t}\,dt=n(n-1)\ldots\left(n-(n-1)\right)\int_0^{\infty}e^{-t}\,dt=n!$$

5.7

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}},\ \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}},\ \frac{3}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{5}{2}}},\ \frac{15}{8}\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{7}{2}}}$$

5.8

$$\frac{1}{2}t^2,\frac{1}{8}t+\frac{1}{16}e^{-2t}-\frac{1}{8}t^2e^{-2t}-\frac{1}{16},t^2e^{-2t},-\frac{3}{4}t-\frac{1}{8}\cos 2t-\frac{3}{8}\operatorname{sen}2t-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{8}$$

5.9

$$t-2t^4,\frac{1}{6}t^3+\frac{3}{2}t^2+3t,t+e^{2t}-1,\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}$$

5.10

a) $\dfrac{1}{5}\cos 2t-\dfrac{1}{5}\cos 3t$

b) $\dfrac{2}{9}e^{2t}-\dfrac{2}{9}e^{2t}\left(\cos 3t-\dfrac{3}{2}\operatorname{sen}3t\right)$

5.11

$$L\left\{\operatorname{sen}(2t)e^{3t}\right\}=\frac{2}{s^2-6s+13}$$

5.12

$$y''-2y'=e^{t}\operatorname{sen}t\Rightarrow s^2Y(s)-2sY(s)=\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

5.13

$$\frac{1}{(s+6)^2}$$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.14

$$\frac{6}{(s+2)^4}$$

5.15

$$\frac{3658800}{(s+7)^{11}}$$

5.16

$$\frac{3}{(s-1)^2+9}$$

5.17

$$\frac{(s+2)}{(s+2)^2+16}$$

5.18

$$\frac{3}{(s-5)^2-9}$$

5.19

$$\frac{(s+1)}{(s+1)^2-9}$$

5.20

$$\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{2}{(s-3)^2}+\frac{1}{(s-4)^2}$$

5.21

$$\frac{1}{s-2}-\frac{2}{(s-2)^2}+\frac{2}{(s-2)^2}$$

5.22

$$\frac{2}{\left((s+1)^2+4\right)(s+1)}$$

5.23

$$\frac{\left(s^2-6s+11\right)}{\left((s-3)^2+4\right)(s-3)}$$

5.24

$$\frac{1}{2}t^2e^{2t}$$

5.25

$$\frac{1}{6}t^3e^t$$

5.26

$$(\operatorname{sen} t)e^{3t}$$

5.27

$$\frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$$

5.28

$$(\cos t)e^{-2t}-2(\operatorname{sen} t)e^{-2t}$$

5.29

$$2e^{-3t}\left(\cos 5t-\frac{1}{10}\operatorname{sen} 5t\right)$$

5.30

$$-e^{-t}(t-1)$$

5.31

$$5e^{2t}(2t+1)$$

5.32

$$3-3e^{-t}-t$$

5.33

$$\delta_0(t)-2e^{-2t}+te^{-2t}$$

5.34

$$\frac{1}{s^2}e^{-s}$$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.35

$$\frac{e^{-2s}}{s+1}$$

5.36

$$\frac{1}{2}(t-2)^2 u(t-2)$$

5.37

$$e^{-2t}+2e^{4-2t}u(t-2)+e^{8-2t}u(t-4)$$

5.38

$$-(\operatorname{sen} t)u(t-\pi)$$

5.39

$$-u\left(t-\frac{1}{2}\pi\right)\cos 2t$$

5.40

$$-u(t-1)\left(e^{1-t}-1\right)$$

5.41

$$\frac{s^2}{\left(s^2+4\right)^2}-\frac{1}{s^2+4}$$

5.42

$$6\frac{s}{\left(s^2-9\right)^2}$$

5.43

$$8\frac{s^2}{\left(s^2+1\right)^3}-\frac{2}{\left(s^2-1\right)^2}$$

5.44

$$8\frac{s^3}{\left(s^2+1\right)^3}-6\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

5.45

$$\frac{2s-4}{\left((s-2)^2+36\right)^2}(s-2)-\frac{1}{(s-2)^2+36}$$

5.46

$$\frac{2s+6}{\left((s+3)^2+9\right)^2}(s+3)-\frac{1}{(+3)^2+9}$$

5.47

$$\frac{1}{2}t\operatorname{sen} t$$

5.48

$$(\cos t)e^{-t}$$

5.49

Se deriva *n* veces ambos lados de la ecuación

$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$\frac{d\varphi(s)}{ds}=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=-\int_0^\infty te^{-st}f(t)dt$$

$$\frac{d^2\varphi(s)}{ds^2}=\int_0^\infty t^2e^{-st}f(t)dt$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n\varphi(s)}{ds^n}=(-)^n\int_0^\infty t^ne^{-st}f(t)dt=(-)^nL\left(t^nf(t)\right)$$

5.50

$$\frac{1}{t}\left(e^{-t}-e^{3t}\right)$$

5.51

$$-\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2t$$

5.52

$$-\frac{1}{t}\operatorname{sen} t$$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.53

$$\frac{\operatorname{sen} 2t}{t}$$

5.54

$$\frac{4}{t}\cos^3 t \operatorname{sen} t - \frac{4}{t}\cos t \operatorname{sen}^3 t + 1$$

5.55

Integramos por partes a

$L\left(\int_a^t f(x)dx\right) = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_a^t f(x)dx\right]dt$, haciendo

$$u = \int_a^t f(x)dx$$

$$dv = e^{-st}dt$$

Entonces

$$L\left(\int_a^t f(x)dx\right) = -\frac{1}{s}e^{-st}\left[\int_a^t f(x)dx\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\left[\int_a^t f(x)dx\right]_0^\infty + \frac{1}{s}L(f(t))$$

Como $\int_a^t f(x)dx$ es de orden exponencial, el primer término en esta expresión tiende a cero cuando $t \to \infty$ ya que s es suficientemente grande y por lo tanto

$$L\left(\int_a^t f(x)dx\right) = \frac{1}{s}\int_0^a f(x)dx + \frac{1}{s}L(f(t))$$

5.56

$$\frac{a}{a^2 + s^2}$$

5.57

$$\frac{s+1}{s^3 + 2s^2 + 2s}$$

5.58

$$\frac{2}{s^4 + 2s^2 + 1}$$

5.59

$$-\frac{1}{s^2 - s^3}$$

5.60

$$y(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t \operatorname{sen} t - \frac{1}{4}$$

5.61

$$y = \frac{5}{18}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{8}{9}e^{-\frac{1}{2}t}$$

5.62

$$y = \frac{13}{60}e^t + \frac{3}{130}\cos 3t - \frac{13}{20}e^{-t} + \frac{16}{39}e^{-2t} - \operatorname{sen} 3t$$

5.63

$$y = \cos t - \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t}$$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.64

```
(%i1) edo:('diff(y,x)+y*(x-1))=0;
```

$$(\%o1)\quad \frac{d}{dx}y+(x-1)y=0$$

```
(%i2) ode2(edo,y,x);
```

$$(\%o2)\quad y=\%c\,\%e^{x-\frac{x^2}{2}}$$

```
(%i3) ic1(%,x=0,y=2);
```

$$(\%o3)\quad y=2\,\%e^{x-\frac{x^2}{2}}$$

5.65

```
(%i1) edo:('diff(y,x,2)+'diff(y,x)=7);
```

$$(\%o1)\quad \frac{d^2}{dx^2}y+\frac{d}{dx}y=7$$

```
(%i2) ode2(edo,y,x);
```

$$(\%o2)\quad y=\%k2\,\%e^{-x}+7x+\%k1-7$$

```
(%i4) ic2(%,x=0,y=2,'diff(y,x)=1);
```

$$(\%o4)\quad y=6\,\%e^{-x}+7x-4$$

5.66

```
(%i3) edo:('diff(y,x,2)+'diff(y,x)-y=exp(x));
```

$$(\%o3)\quad \frac{d^2}{dx^2}y+\frac{d}{dx}y-y=\%e^{x}$$

```
(%i4) ode2(edo,y,x);
```

$$(\%o4)\quad y=\%k1\,\%e^{\frac{(\sqrt{5}-1)x}{2}}+\%k2\,\%e^{\frac{(-\sqrt{5}-1)x}{2}}+\%e^{x}$$

```
(%i5) ic2(%,x=0,y=1,'diff(y,x)=1);
```

$$(\%o5)\quad y=\%e^{x}$$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.67

```
(%i1) edo:('diff(y,x,2)+5*'diff(y,x)+2*y=exp(x));
```

$$(\%o1)\quad \frac{d^2}{dx^2}y+5\left(\frac{d}{dx}y\right)+2\,y=\%e^x$$

```
(%i2) ode2(edo,y,x);
```

$$(\%o2)\quad y=\%k1\,\%e^{\frac{(\sqrt{17}-5)\,x}{2}}+\%k2\,\%e^{\frac{(-\sqrt{17}-5)\,x}{2}}+\frac{\%e^x}{8}$$

```
(%i3) ic2(%,x=0,y=0,'diff(y,x)=3);
```

$$(\%o3)\quad y=\frac{(41\sqrt{17}-17)\,\%e^{\frac{(\sqrt{17}-5)\,x}{2}}}{272}-\frac{(41\sqrt{17}+17)\,\%e^{\frac{(-\sqrt{17}-5)\,x}{2}}}{272}+\frac{\%e^x}{8}$$

5.68

```
(%i7) edo:('diff(y,x,2)+'diff(y,x)+2*y=x);
```

$$(\%o7)\quad \frac{d^2}{dx^2}y+\frac{d}{dx}y+2\,y=x$$

```
(%i8) ode2(edo,y,x);
```

$$(\%o8)\quad y=\%e^{-\frac{x}{2}}\left(\%k1\,\sin\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)+\%k2\,\cos\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)\right)+\frac{2\,x-1}{4}$$

```
(%i9) ic2(%,x=0,y=2,'diff(y,x)=2);
```

$$(\%o9)\quad y=\%e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{3\sqrt{7}\,\sin\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)}{4}+\frac{9\,\cos\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)}{4}\right)+\frac{2\,x-1}{4}$$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.69.

```
(%i1) edo:('diff(y,x,2)+'diff(y,x)+y=cos(x));
```

$$(\%o1)\quad \frac{d^2}{dx^2}y+\frac{d}{dx}y+y=\cos(x)$$

```
(%i2) ode2(edo,y,x);
```

$$(\%o2)\quad y=\%e^{-\frac{x}{2}}\left(\%k1\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)+\%k2\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)\right)+\sin(x)$$

```
(%i3) ic2(%,x=0,y=1,'diff(y,x)=0);
```

$$(\%o3)\quad y=\%e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)-\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)+\sin(x)$$

5.70

```
(%i1) edo:('diff(y,x,2)+3*'diff(y,x)+10*y=x*cos(x));
```

$$(\%o1)\quad \frac{d^2}{dx^2}y+3\left(\frac{d}{dx}y\right)+10\,y=x\cos(x)$$

```
(%i2) ode2(edo,y,x);
```

$$(\%o2)\quad y=\%e^{-\frac{3x}{2}}\left(\%k1\sin\left(\frac{\sqrt{31}\,x}{2}\right)+\%k2\cos\left(\frac{\sqrt{31}\,x}{2}\right)\right)+\frac{(15x-1)\sin(x)+(45x-18)\cos(x)}{450}$$

```
(%i3) ic2(%,x=0,y=0,'diff(y,x)=0);
```

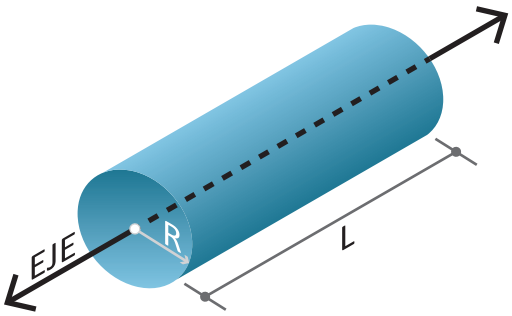
$$(\%o3)\quad y=\%e^{-\frac{3x}{2}}\left(\frac{\cos\left(\frac{\sqrt{31}\,x}{2}\right)}{25}-\frac{17\sin\left(\frac{\sqrt{31}\,x}{2}\right)}{225\sqrt{31}}\right)+\frac{(15x-1)\sin(x)+(45x-18)\cos(x)}{450}$$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Momento de inercia en algunos cuerpos rígidos

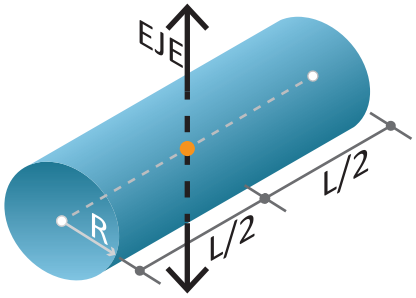
CILINDRO MACIZO

Respecto a su eje



$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

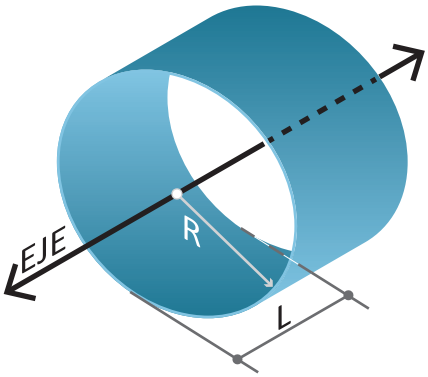
Respecto a eje por su centro



$$I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$$

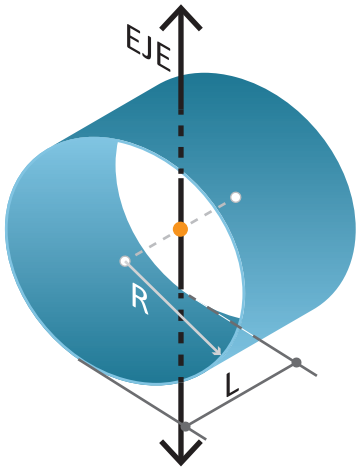
CAPA CILÍNDRICA

Respecto a su eje



$$I = MR^2$$

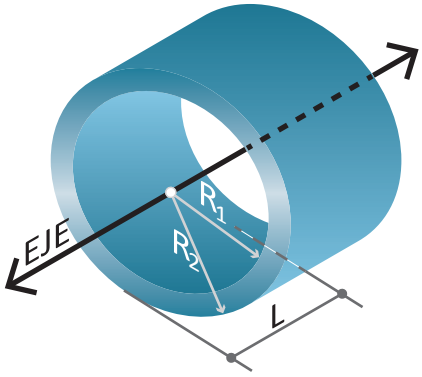
Respecto a eje por su centro



$$I = \frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$$

CILINDRO HUECO

Respecto a su eje

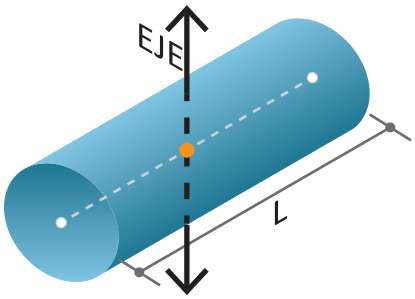


$$I = \frac{1}{2} M\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

Momento de inercia en algunos cuerpos rígidos

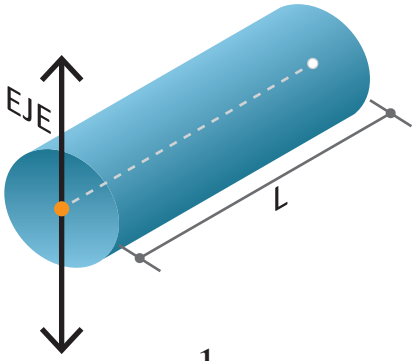
VARILLA DELGADA

Respecto a eje perendicular por centro



$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

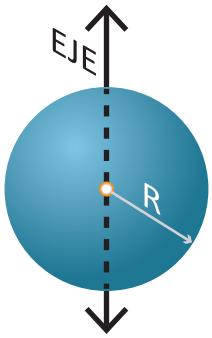
Respecto a eje por su centro



$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

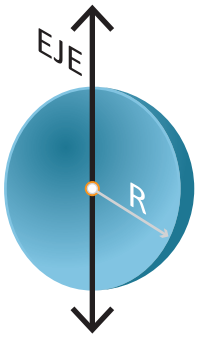
ESFERA

Maciza respecto a un diámetro



$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

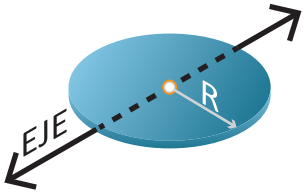
Corteza respecto a un diámetro



$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

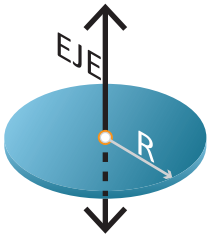
DISCO

Respecto a un diámetro



$$I = \frac{1}{4} MR^2$$

Respecto a eje perendicular en su centro

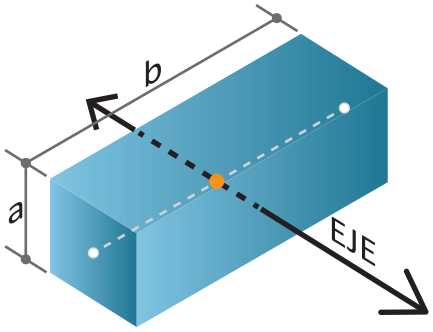


$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

Momento de inercia en algunos cuerpos rígidos

PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR MACIZO

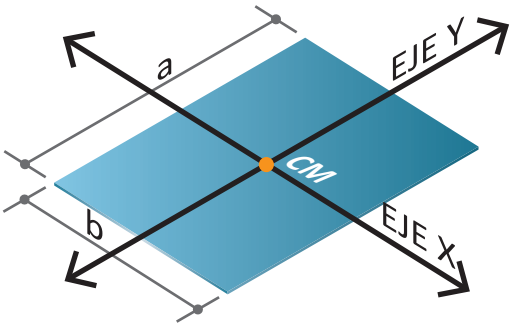
Eje por su centro y perpendicular a una cara



$$I = \frac{1}{12} M \left(a^2 + b^2 \right)$$

PLACA PLANA RECTANGULAR

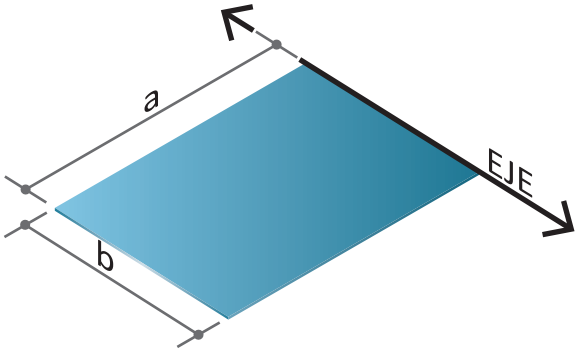
Eje por su centro de masa paralelo a un lado



$$I_y = \frac{1}{12} Mb^2$$

$$I_x = \frac{1}{12} Ma^2$$

Eje por un lado



$$I = \frac{1}{3} Ma^2$$

NORMA OFICIAL MEXICANA

NOM-008-SCFI-2002

SISTEMA GENERAL DE UNIDADES DE MEDIDA

GENERAL SYSTEM OF UNITS

P R E F A C I O

En la elaboración de esta norma oficial mexicana participaron las siguientes instituciones, organismos y empresas:

- ASOCIACIÓN DE NORMALIZACIÓN Y CERTIFICACIÓN, A.C. (ANCE)
- ASOCIACIÓN MEXICANA DE ALMACENES GENERALES DE DEPOSITO (AMAGDE)
- CÁMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA ELECTRÓNICA, TELECOMUNICACIONES E INFORMÁTICA
- CENTRO DE ESTUDIOS TECNOLÓGICOS, Industrial y de Servicios No. 26
- CENTRO NACIONAL DE METROLOGÍA (CENAM)
- COMISIÓN FEDERAL DE ELECTRICIDAD
  Laboratorio de Pruebas de Equipos y Materiales
- COMITÉ CONSULTIVO NACIONAL DE NORMALIZACIÓN DE PREVENCIÓN Y CONTROL DE ENFERMEDADES
- COMITÉ TÉCNICO DE NORMALIZACIÓN NACIONAL DE METROLOGÍA
- DIRECCIÓN GENERAL DE MARINA MERCANTE
- ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA
  Plantel No. 3 "Justo Sierra"
- INSTITUTO MEXICANO DE NORMALIZACIÓN Y CERTIFICACIÓN, A.C.
- INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIONES NUCLEARES
- INSTITUTO NACIONAL DE NORMALIZACIÓN TEXTIL, A.C.
- INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
  Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Unidad Tecamachalco
  Coordinación de Metrología, Normas y Calidad Industrial
  Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Azcapotzalco
- NORMALIZACIÓN Y CERTIFICACIÓN ELECTRÓNICA, A.C.
- PETRÓLEOS MEXICANOS
  Comité de Normalización de Petróleos Mexicanos y Organismos Subsidiarios
- PROCURADURÍA FEDERAL DEL CONSUMIDOR
- SECRETARÍA DEL MEDIO AMBIENTE Y RECURSOS NATURALES
  Subsecretaría de Recursos Naturales
  Instituto Nacional de Ecología
  Comisión Nacional del Agua
- SECRETARÍA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES
  Dirección General de Política de Telecomunicaciones
- SECRETARÍA DE AGRICULTURA, GANADERÍA Y DESARROLLO RURAL
  Dirección General de Sanidad Vegetal
  Dirección General de Sanidad Animal
- SUNBEAM MEXICANA, S.A. DE C.V.

NORMA OFICIAL MEXICANA

NOM-008-SCFI-2002

SISTEMA GENERAL DE UNIDADES DE MEDIDA

INTRODUCCIÓN

Esta norma oficial mexicana tiene como propósito, establecer un lenguaje común que responda a las exigencias actuales de las actividades científicas, tecnológicas, educativas, industriales y comerciales, al alcance de todos los sectores del país.

La elaboración de esta norma oficial mexicana se basó principalmente en las resoluciones y acuerdos que sobre el Sistema Internacional de Unidades (SI) se han tenido en la Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM), hasta su 21a. Convención realizada en el año 1999.

El "SI" es el primer sistema de unidades de medición compatible, esencialmente completo y armonizado internacionalmente, está fundamentado en 7 unidades de base, cuya materialización y reproducción objetiva de los patrones correspondientes, facilita a todas las naciones que lo adopten para la estructuración de sus sistemas metrológicos a los más altos niveles de exactitud. Además, al compararlo con otros sistemas de unidades, se manifiestan otras ventajas entre las que se encuentran la facilidad de su aprendizaje y la simplificación en la formación de las unidades derivadas.

1 OBJETIVO Y CAMPO DE APLICACIÓN

Esta norma oficial mexicana establece las definiciones, símbolos y reglas de escritura de las unidades del Sistema Internacional de Unidades (SI) y otras unidades fuera de este Sistema que acepte la CGPM, que en conjunto, constituyen el Sistema General de Unidades de Medida, utilizado en los diferentes campos de la ciencia, la tecnología, la industria, la educación y el comercio.

2 REFERENCIAS

Para la correcta aplicación de esta norma se debe consultar la siguiente norma mexicana vigente o la que la sustituya

NMX-Z-055-1997:IMNC	Metrología-Vocabulario de términos fundamentales generales, Declaratoria de vigencia publicada en el Diario Oficial de la Federación el día 17 de enero de 1997.

3 DEFINICIONES FUNDAMENTALES

Para los efectos de esta norma, se aplican las definiciones contenidas en la norma referida en el inciso 2, Referencias, y las siguientes:

3.1 Sistema Internacional de Unidades (SI)

Sistema coherente de unidades adoptado por la Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM).

Este sistema está compuesto por:

- unidades SI de base;
- unidades SI derivadas

3.2 Unidades SI de base

Unidades de medida de las magnitudes de base del Sistema Internacional de Unidades.

3.3 Magnitud

Atributo de un fenómeno, cuerpo o sustancia que es susceptible a ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente.

3.4 Sistema coherente de unidades (de medida)

Sistema de unidades compuesto por un conjunto de unidades de base y de unidades derivadas compatibles.

3.5 Magnitudes de base

Son magnitudes que dentro de un "sistema de magnitudes" se aceptan por convención, como independientes unas de otras.

3.6 Unidades SI derivadas

Son unidades que se forman combinando entre sí las unidades de base, o bien, combinando éstas con las unidades derivadas, según expresiones algebraicas que relacionan las magnitudes correspondientes de acuerdo a leyes simples de la física.

4 TABLAS DE UNIDADES

4.1 Unidades SI de base

Las unidades de base del SI son 7, correspondiendo a las siguientes magnitudes: longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura termodinámica, intensidad luminosa y cantidad de sustancia. Los nombres de las unidades son respectivamente: metro, kilogramo, segundo, ampere, kelvin, candela y mol. Las magnitudes, unidades, símbolos y definiciones se describen en la Tabla 1.

4.2 Unidades SI derivadas

Estas unidades se obtienen a partir de las unidades de base, se expresan utilizando los símbolos matemáticos de multiplicación y división. Se pueden distinguir tres clases de unidades: la primera, la forman aquellas unidades SI derivadas expresadas a partir de unidades de base de las cuales se indican algunos ejemplos en la Tablas 2 y 3; la segunda la forman las unidades SI derivadas que reciben un nombre especial y símbolo particular, la relación completa se cita en la Tabla 4; la tercera la forman las unidades SI derivadas expresadas con nombres especiales, algunos ejemplos de ellas se indican en la Tabla 5.

Existe gran cantidad de unidades derivadas que se emplean en las áreas científicas, para una mayor facilidad de consulta, se han agrupado en 10 tablas, correspondiendo a un número equivalente de campos de las más importantes de la física, de acuerdo a la relación siguiente:

Tabla 6 Principales magnitudes y unidades de espacio y tiempo.

Tabla 7 Principales magnitudes y unidades de fenómenos periódicos y conexos.

Tabla 8 Principales magnitudes y unidades de mecánica.

Tabla 9 Principales magnitudes y unidades de calor.

Tabla 10 Principales magnitudes y unidades de electricidad y magnetismo.

Tabla 11 Principales magnitudes y unidades de luz y radiaciones electromagnéticas.

Tabla 12 Principales magnitudes y unidades de acústica.

Tabla 13 Principales magnitudes y unidades de físico-química y física molecular.

Tabla 14 Principales magnitudes y unidades de física atómica y física nuclear.

Tabla 15 Principales magnitudes y unidades de reacciones nucleares y radiaciones ionizantes.

Nota sobre las unidades de dimensión 1 (uno)

La unidad coherente de cualquier magnitud adimensional es el número 1 (uno), cuando se expresa el valor de dicha magnitud, la unidad 1(uno) generalmente no se escribe en forma explícita.

No deben utilizarse prefijos para formar múltiplos o submultiplos de la unidad, en lugar de prefijos deben usarse potencias de 10

5 UNIDADES QUE NO PERTENECEN AL SI

Existen algunas unidades que no pertenecen al SI, por ser de uso común, la CGPM las ha clasificado en tres categorías:

- unidades que se conservan para usarse con el SI;
- unidades que pueden usarse temporalmente con el SI.
- unidades que no deben utilizarse con el SI.

5.1 Unidades que se conservan para usarse con el SI

Son unidades de amplio uso, por lo que se considera apropiado conservarlas; sin embargo, se recomienda no combinarlas con las unidades del SI para no perder las ventajas de la coherencia, la relación de estas unidades se establecen en la Tabla 16.

5.2 Unidades que pueden usarse temporalmente con el SI

Son unidades cuyo empleo debe evitarse, se mantienen temporalmente en virtud de su gran uso actual, pero se recomienda no emplearlas conjuntamente con las unidades SI, la relación de estas unidades se establece en la Tabla 17.

5.3 Unidades que no deben utilizarse con el SI

Existen otras unidades que no pertenecen al SI; actualmente tienen cierto uso, algunas de ellas derivadas del sistema CGS, dichas unidades no corresponden a ninguna de las categorías antes mencionadas en esta norma por lo que no deben utilizarse en virtud de que hacen perder la coherencia del SI; se recomienda utilizar en su lugar, las unidades respectivas del SI. En la tabla 18 se dan algunos ejemplos de estas unidades.

6 PREFIJOS

La Tabla 19 contiene la relación de los nombres y los símbolos de los prefijos para formar los múltiplos y submúltiplos decimales de las unidades, cubriendo un intervalo que va desde 10^{-24} a 10^{24}.

7 REGLAS GENERALES PARA LA ESCRITURA DE LOS SÍMBOLOS DE LAS UNIDADES DEL SI

Las reglas para la escritura apropiada de los símbolos de las unidades y de los prefijos, se establecen en la Tabla 20.

8 REGLAS PARA LA ESCRITURA DE LOS NÚMEROS Y SU SIGNO DECIMAL

La Tabla 21 contiene estas reglas de acuerdo con las recomendaciones de la Organización Internacional de Normalización (ISO).

Tabla 1.- Nombres, símbolos y definiciones de las unidades SI de base

Magnitud	Unidad	Símbolo	Definición
longitud	metro	m	Es la longitud de la trayectoria recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299 792 458 de segundo [17a. CGPM (1983) Resolución 1]
masa	kilogramo	kg	Es la masa igual a la del prototipo internacional del kilogramo [1a. y 3a. CGPM (1889 y 1901)]
tiempo	segundo	s	Es la duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133 [13a. CGPM (1967), Resolución 1]
corriente eléctrica	ampere	A	Es la intensidad de una corriente constante que mantenida en dos conductores paralelos rectilíneos de longitud infinita, cuya área de sección circular es despreciable, colocados a un metro de distancia entre sí, en el vacío, producirá entre estos conductores una fuerza igual a $2x10^{-7}$ newton por metro de longitud [9a. CGPM, (1948), Resolución 2]
temperatura termodinámica	kelvin	K	Es la fracción 1/273,16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua [13a. CGPM (1967) Resolución 4]
cantidad de sustancia	mol	mol	Es la cantidad de sustancia que contiene tantas entidades elementales como existan átomos en 0,012 kg de carbono 12 [14a. CGPM (1971), Resolución 3]
intensidad luminosa	candela	cd	Es la intensidad luminosa en una dirección dada de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia $540x10^{12}$ hertz y cuya intensidad energética en esa dirección es 1/683 watt por esterradián [16a. CGPM (1979), Resolución 3]

Tabla 2.- Nombres de las magnitudes, símbolos y definiciones de las unidades SI derivadas

Magnitud	Unidad	Símbolo	Definición
ángulo plano	radián	rad	Es el ángulo plano comprendido entre dos radios de un círculo, y que interceptan sobre la circunferencia de este círculo un arco de longitud igual a la del radio (ISO-31/1)
ángulo sólido	esterradián	sr	Es el ángulo sólido que tiene su vértice en el centro de una esfera, y, que intercepta sobre la superficie de esta esfera una área igual a la de un cuadrado que tiene por lado el radio de la esfera (ISO-31/1)

Tabla 3.- Ejemplo de unidades SI derivadas sin nombre especial

Magnitud	Unidades SI	
	Nombre	Símbolo
superficie	metro cuadrado	m^2
volumen	metro cúbico	m^3
velocidad	metro por segundo	m/s
aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s^2
número de ondas	metro a la menos uno	m^{-1}
masa volúmica, densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
volumen específico	metro cúbico por kilogramo	m^3/kg
densidad de corriente	ampere por metro cuadrado	A/m^2
intensidad de campo eléctrico	ampere por metro	A/m
concentración (de cantidad de sustancia)	mol por metro cúbico	mol/m^3
luminancia	candela por metro cuadrado	cd/m^2

Tabla 4.- Unidades SI derivadas que tienen nombre y símbolo especial

Magnitud	Nombre de la unidad SI derivada	Símbolo	Expresión en unidades SI de base	Expresión en otras unidades SI
frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}	
fuerza	newton	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$	
presión, tensión mecánica	pascal	Pa	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$	N/m^2
trabajo, energía, cantidad de calor	joule	J	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	$N \cdot m$
potencia, flujo energético	watt	W	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$	J/s
carga eléctrica, cantidad de electricidad	coulomb	C	$s \cdot A$	
diferencia de potencial, tensión eléctrica, potencial eléctrico, fuerza electromotriz	volt	V	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$	W/A
capacitancia	farad	F	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$	C/V
resistencia eléctrica	ohm	Ω	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$	V/A
conductancia eléctrica	siemens	S	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$	A/V
flujo magnético[1]	weber	Wb	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$	$V \cdot s$
inducción magnética[2]	tesla	T	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$	Wb/m^2
Inductancia	henry	H	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$	Wb/A
flujo luminoso	lumen	lm	$cd \cdot sr$	
luminosidad[3]	lux	lx	$m^{-2} \cdot cd \cdot sr$	lm/m^2
actividad nuclear	becquerel	Bq	s^{-1}	
dosis absorbida	gray	Gy	$m^2 \cdot s^{-2}$	J/kg
temperatura Celsius	grado Celsius	°C		K
dosis equivalente	sievert	Sv	$m^2 \cdot s^{-2}$	J/kg

[1] También llamado flujo de inducción magnética.
[2] También llamada densidad de flujo magnético.
[3] También llamada iluminanción

Tabla 5.- Ejemplos de unidades SI derivadas expresadas por medio de nombres especiales

Magnitud	Unidad SI		Expresión en unidades SI de base
	Nombre	Símbolo	
viscosidad dinámica	pascal segundo	Pa · s	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}$
momento de una fuerza	newton metro	N·m	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
tensión superficial	newton por metro	N/m	$kg \cdot s^{-2}$
densidad de flujo de calor, irradiancia	watt por metro cuadrado	W/m^2	$kg \cdot s^{-3}$
capacidad calorífica, entropía	joule por kelvin	J/K	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
capacidad calorífica específica, entropía específica	joule por kilogramo kelvin	J/(kg·K)	$m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
energía específica	joule por kilogramo	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
conductividad térmica	watt por metro kelvin	W/(m·K)	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}$
densidad energética	joule por metro cúbico	J/m^3	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
fuerza del campo eléctrico	volt por metro	V/m	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
densidad de carga eléctrica	coulomb por metro cúbico	C/m^3	$m^{-3} \cdot s \cdot A$
densidad de flujo eléctrico	coulomb por metro cuadrado	C/m^2	$m^{-2} \cdot s \cdot A$
permitividad	farad por metro	F/m	$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
permeabilidad	henry por metro	H/m	$m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
energía molar	joule por mol	J/mol	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1}$
entropía molar, capacidad calorífica molar	joule por mol kelvin	J/(mol·K)	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$
exposición (rayos x y γ)	coulomb por kilogramo	C/kg	$kg^{-1} \cdot s \cdot A$
rapidez de dosis absorbida	gray por segundo	Gy/s	$m^2 \cdot s^{-3}$

Tabla 6.- Principales magnitudes y unidades de espacio y tiempo

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
ángulo plano	α, β, γ, ϑ, φ, etc.	El ángulo comprendido entre dos semirrectas que parten del mismo punto, se define como la relación de la longitud del arco intersectado por estas rectas sobre el círculo (con centro en aquel punto), a la del radio del círculo	radián (véase Tabla 2)	rad
ángulo sólido	Ω	El ángulo sólido de un cono se define como la relación del área cortada sobre una superficie esférica (con su centro en el vértice del cono) al cuadrado de la longitud del radio de la esfera	esterradián (véase Tabla 2)	sr
longitud ancho altura espesor radio diámetro longitud de trayectoria	l, (L) b h d, δ r d, D s		metro (véase Tabla 1)	m
área o superficie	A, (S)		metro cuadrado	m^2
volumen	V		metro cúbico	m^3
tiempo, intervalo de tiempo, duración	t		segundo (Véase Tabla 1)	s
velocidad angular	ω	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	radián por segundo	rad/s
aceleración angular	α	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	radián por segundo al cuadrado	rad/s^2
velocidad	u, v, w, c	$v = \frac{ds}{dt}$	metro por segundo	m/s

Tabla 6.- Principales magnitudes y unidades de espacio y tiempo
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
aceleración	a	$a = \frac{dv}{dt}$	metro por segundo al cuadrado	m/s^2
aceleración de caída libre, aceleración debida a la gravedad	g	Nota: la aceleración normal de caída libre es: $g_n = 9{,}806\ 65\ m/s^2$ (Conferencia General de Pesas y Medidas 1901)		

Tabla 7.- Magnitudes y unidades de fenómenos periódicos y conexos

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
período, tiempo periódico	T	Tiempo de un ciclo	segundo	s
constante de tiempo de un magnitud que varía exponencialmente	τ	Tiempo después del cual la magnitud podría alcanzar su límite si se mantiene su velocidad inicial de variación	segundo	s
frecuencia	f, ν	$f = 1/T$	hertz	Hz
frecuencia de rotación[(1)]	n [(1)]	Número de revoluciones dividido por el tiempo	segundo recíproco	s^{-1}
frecuencia angular frecuencia circular, pulsatancia	ω	$\omega = 2\pi f$	radián por segundo segundo recíproco	rad/s s^{-1}
longitud de onda	λ	Distancia, en la dirección de propagación de una onda periódica, entre dos puntos en donde, en un instante dado, la diferencia de fase es 2π	metro	m
número de onda	σ	$\sigma = 1/\lambda$	metro recíproco	m^{-1}
número de onda circular	k	$k = 2\pi\sigma$	metro recíproco	m^{-1}
diferencia de nivel de amplitud, diferencia de nivel de campo	L_F	$L_F = \ln (F_1 / F_2)$ Donde F_1 y F_2 representan dos amplitudes de la misma clase	neper* decibel*	Np* dB*
diferencia de nivel de potencia	L_P	$L_P = 1/2 \ln (P_1 / P_2)$ Donde P_1 y P_2 representan dos potencias		
coeficiente de amortiguamiento	δ	Si una magnitud es una función del tiempo y está determinada por: $F(t) = Ae^{-\delta t} \cos[\omega(t - t_o)]$ Entonces δ es el coeficiente de amortiguamiento	segundo recíproco	s^{-1}

Tabla 7.- Magnitudes y unidades de fenómenos periódicos y conexos
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
decremento logarítmico	Λ	Producto del coeficiente de amortiguamiento y el período	neper*	Np*
coeficiente de atenuación	α	Si una magnitud es una función de la distancia x y está dada por: $F(x) = Ae^{-\alpha x} \cos[\beta (x - x_o)]$	metro recíproco	m^{-1}
coeficiente de fase	β	Entonces α es el coeficiente de atenuación y β es el coeficiente de fase		
coeficiente de propagación	γ	$\gamma = \alpha + j \beta$		

NOTAS:

(1) Para la frecuencia de rotación, también se usan las unidades “revoluciones por minuto” (r/min) y “revoluciones por segundo” (r/s)

***** **Estas no son unidades del SI pero se mantienen para usarse con unidades del SI**
1 Np es la diferencia de nivel de amplitud cuando ln (F_1 / F_2) = 1
1 dB es la diferencia de nivel de amplitud cuando 20 lg (F_1 / F_2) = 1

Tabla 8.- Magnitudes y unidades de mecánica

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
masa	m		kilogramo (véase Tabla 1)	kg
densidad (masa volúmica)	ρ	Masa dividida por el volumen	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
densidad relativa	d	Relación de la densidad de una sustancia con respecto a la densidad de una sustancia de referencia bajo condiciones que deben ser especificadas para ambas sustancias	uno	1
volumen específico	v	Volumen dividido por la masa	metro cúbico por kilogramo	m^3/kg
densidad lineal	ρ_l	Masa dividida por la longitud	kilogramo por metro	kg/m
densidad superficial	ρ_A, (ρ_S)	Masa dividida por el área	kilogramo por metro cuadrado	kg/m^2
cantidad de movimiento, momentum	p	Producto de la masa y la velocidad	kilogramo metro por segundo	kg•m/s
momento de momentum, momentum angular	L	El momento de momentum de una partícula con respecto a un punto es igual al producto vectorial del radio vector dirigido del punto hacia la partícula, y el momentum de la partícula	kilogramo metro cuadrado por segundo	$kg•m^2/s$
momento de inercia (momento dinámico de inercia)	I, J	El momento (dinámico) de inercia de un cuerpo con respecto a un eje, se define como la suma (la integral) de los productos de sus masas elementales, por los cuadrados de las distancias de dichas masas al eje	kilogramo metro cuadrado	$kg•m^2$
fuerza	F	La fuerza resultante aplicada sobre un cuerpo es igual a la razón de cambio del momentum del cuerpo	newton	N

Tabla 8.- Magnitudes y unidades de mecánica
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
peso	G, (P), (W)	El peso de un cuerpo en un determinado sistema de referencia se define como la fuerza que, aplicada al cuerpo, le proporciona una aceleración igual a la aceleración local de caída libre en ese sistema de referencia		
constante gravitacional	G, (f)	La fuerza gravitacional entre dos partículas es: $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ donde r es la distancia entre las partículas, m_1 y m_2 son sus masas y la constante gravitacional es: $G= (6{,}672\ 59 \pm 0{,}010) \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$	newton metro cuadrado por kilogramo cuadrado	$N \cdot m^2/kg^2$
momento de una fuerza	M	El momento de una fuerza referido a un punto es igual al producto vectorial del radio vector, dirigido desde dicho punto a cualquier otro punto situado sobre la línea de acción de la fuerza, por la fuerza	newton metro	N•m
momento torsional, momento de un par	T	Suma de los momentos de dos fuerzas de igual magnitud y dirección opuesta que no actúan a lo largo de la misma línea		
presión	P	La fuerza dividida por el área	pascal	Pa
esfuerzo normal	σ			
esfuerzo al corte	τ			
módulo de elasticidad	E	$E = \sigma/\varepsilon$	pascal	Pa
módulo de rigidez, módulo de corte	G	$G = \tau/\gamma$		
módulo de compresión	K	$K = -p/\vartheta$		

Tabla 8.- Magnitudes y unidades de mecánica
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
compresibilidad	x	$x = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}$	pascal recíproco	Pa^{-1}
momento segundo axial de área	I_a, (I)	El momento segundo axial de área de una área plana, referido a un eje en el mismo plano, es la suma (integral) de los productos de sus elementos de área y los cuadrados de sus distancias medidas desde el eje	metro a la cuarta potencia	m^4
momento segundo polar de área	I_p	El momento segundo polar de área de una área plana con respecto a un punto localizado en el mismo plano, se define como la integral de los productos de sus elementos de área y los cuadrados de las distancias del punto a dichos elementos de área		
módulo de sección	Z, W	El módulo de sección de un área plana o sección con respecto a un eje situado en el mismo plano, se define como el momento segundo axial de área dividido por la distancia desde el eje hasta el punto más lejano de la superficie plana	metro cúbico	m^3
viscosidad dinámica	η, (μ)	$\tau_{xz} = \eta(dv_x/dz)$ donde τ_{xz} es el esfuerzo cortante de un fluido en movimiento con un gradiente de velocidad dv_x/dz perpendicular plano de corte	pascal segundo	Pa•s
viscosidad cinemática	ν	$\nu = \eta/\rho$ donde ρ es la densidad	metro cuadrado por segundo	m^2/s
tensión superficial	γ, σ	Se define como la fuerza perpendicular a un elemento de línea en una superficie, dividida por la longitud de dicho elemento de línea	newton por metro	N/m

Tabla 8.- Magnitudes y unidades de mecánica
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
trabajo	W, (A)	Fuerza multiplicada por el desplazamiento en la dirección de la fuerza	joule	J
energía	E			
energía potencial	E_p, V, Φ			
energía cinética	E_k, T			
potencia	P	Tasa de transferencia de energía	watt	W
gasto masa, flujo masa	q_m	Masa de materia la cual atraviesa una superficie determinada dividida por el tiempo	kilogramo por segundo	kg/s
gasto volumétrico, flujo volumétrico	q_v	Volumen de materia el cual atraviesa una superficie determnada por el tiempo	metro cúbico por segundo	m^3/s

Tabla 9.- Magnitudes y unidades de calor

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
temperatura termodinámica	T, θ	La temperatura termodinámica se define según los principios de la termodinámica	kelvin (véase Tabla 1)	K
temperatura Celsius	t, ϑ	$t = T - T_o$ Donde T_o es fijada convencionalmente como $T_o = 273{,}15$ K	grado Celsius	°C
coeficiente de dilatación lineal	α_l	$\alpha_\ell = \frac{1}{l}\frac{dl}{dT}$	kelvin recíproco	K^{-1}
coeficiente de dilatación cúbica	α_v	$\alpha_V = \frac{1}{V}\frac{dV}{dT}$		
coeficiente de presión relativa	α_p	$\alpha_P = \frac{1}{p}\frac{dp}{dT}$		
coeficiente de presión	β	$\beta = dp/dt$	pascal por kelvin	Pa/K
compresibilidad isotérmica	κ_T	$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$	pascal recíproco	Pa^{-1}
compresibilidad isentrópica	κ_S	$\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S$		
calor, cantidad de calor	Q		joule	J
flujo térmico	Φ	Flujo de calor a través de una superficie	watt	W
densidad de flujo térmico	q, φ	Flujo térmico dividido por el área considerada	watt por metro cuadrado	W/m^2
conductividad térmica	λ, (x)	Densidad de flujo térmico dividido por el gradiente de temperatura	watt por metro kelvin	W/(m•K)

Tabla 9.- Magnitudes y unidades de calor
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
coeficiente de transferencia de calor	h, k, K, α	Densidad de flujo térmico dividido por la diferencia de temperaturas	watt por metro cuadrado kelvin	$W/(m^2 \bullet K)$
aislamiento térmico, coeficiente de aislamiento térmico	M	Diferencia de temperaturas dividida por la densidad de flujo térmico	metro cuadrado kelvin por watt	$(m^2 \bullet K)/W$
resistencia térmica	R	Diferencia de temperatura dividida por el flujo térmico	kelvin por watt	K/W
difusividad térmica	a	$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ donde: λ es la conductividad térmica; ρ es la densidad; c_p es la capacidad térmica específica a presión constante	metro cuadrado por segundo	m^2/s
capacidad térmica	C	Cuando la temperatura de un sistema se incremente una cantidad diferencial dT, como resultado de la adición de una pequeña cantidad de calor dQ, la magnitud dQ/dT es la capacidad térmica	joule por kelvin	J/K
capacidad térmica específica	c	Capacidad térmica dividida por la masa	joule por kilogramo kelvin	$J/(kg \bullet K)$
capacidad térmica específica a presión constante	c_p			
capacidad térmica específica a volumen constante	c_v			
capacidad térmica específica a saturación	c_{sat}			

Tabla 9.- Magnitudes y unidades de calor
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
entropía	S	Cuando una cantidad pequeña de calor dQ es recibida por un sistema cuya temperatura termodinámica es T, la entropía del sistema se incrementa en dQ/T, considerando que ningún cambio irreversible tiene lugar en el sistema	joule por kelvin	J/K
entropía específica	s	Entropía dividida por la masa	joule por kilogramo kelvin	J/(kg•K)
energía interna	U, (E)		joule	J
entalpía	H, (I)	H = U + pV		
energía libre Helmholtz, función Helmholtz	A, F	A = U - TS		
energía libre Gibbs, función Gibbs	G	G = U + pV -TS G = H - TS		
energía interna específica	u, (e)	Energía interna dividida por la masa	joule por kilogramo	J/kg
entalpía específica	h	Entalpía dividida por la masa		
energía libre específica Helmholtz, función específica Helmholtz	a, f	Energía libre Helmholtz dividida por la masa		
energía libre específica Gibbs, función específica Gibbs	g	Energía libre Gibbs dividida por la masa		
función Massieu	J	J = - A/T	joule por kelvin	J/K
función Planck	Y	Y = - G/T	joule por kelvin	J/K

Tabla 10. - Magnitudes y unidades de electricidad y magnetismo

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
corriente eléctrica	I		ampere (ver tabla 1)	A
carga eléctrica, cantidad de electricidad	Q	Integral de la corriente eléctrica con respecto al tiempo	coulomb	C
densidad de carga densidad volumétrica de carga	ρ, (η)	Carga dividida por el volumen	coulomb por metro cúbico	C/m^3
densidad superficial de carga	σ	Carga dividida por el área superficial	coulomb por metro cuadrado	C/m^2
intensidad de campo eléctrico	E, (K)	Fuerza ejercida por un campo eléctrico sobre una carga eléctrica puntual, dividida por el valor de la carga	volt por metro	V/m
potencial eléctrico	V, φ	Para campos electrostáticos, una magnitud escalar, en la cual el gradiente tiene signo contrario y es igual al valor de la intensidad de campo eléctrico **E** = **- grad** V	volt	V
diferencia de potencial, tensión eléctrica	U, (V)	La tensión entre dos puntos 1 y 2 es la integral de línea desde el punto 1 hasta el punto 2 de la intensidad de campo eléctrico $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_s \, ds$		
fuerza electromotriz	E	La fuerza electromotriz de una fuente es la energía suministrada por la fuente dividida por la carga eléctrica que pasa a través de la fuente		
densidad de flujo eléctrico, desplazamiento	D	La densidad de flujo eléctrico es una magnitud vectorial, cuya divergencia es igual a la densidad de la carga	coulomb por metro cuadrado	C/m^2
flujo eléctrico, (flujo de desplazamiento)	ψ	El flujo eléctrico a través de un elemento de superficie es el producto escalar del elemento de superficie y la densidad de flujo eléctrico	coulomb	C
capacitancia	C	Carga dividida por la diferencia de potencial eléctrico	farad	F

Tabla 10. - Magnitudes y unidades de electricidad y magnetismo
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
permitividad	ε	Densidad de flujo eléctrico dividido por la intensidad de campo eléctrico	farad por metro	F/m
permitividad del vacío, constante eléctrica	ε_O	$\varepsilon_0 = 1 / (\mu_0 c_0^2)$ $\varepsilon_0 = 8{,}854\ 187\ 817 \times 10^{-12}$ F/m		
permitividad relativa	ε_T	$\varepsilon_T = \varepsilon / \varepsilon_0$	uno	1
susceptibilidad eléctrica	χ , χ_e	$\chi = \varepsilon_T - 1$	uno	1
polarización eléctrica	P	$P = D - \varepsilon_0 E$	coulomb por metro cuadrado	C/m^2
momento dipolo eléctrico	p, (p_e)	El momento dipolo eléctrico es una magnitud vectorial, cuyo producto vectorial con la intensidad de campo eléctrico es igual al momento torsional	coulomb metro	C•m
densidad de corriente	J, (S)	Es una magnitud vectorial cuya integral evaluada para una superficie especificada, es igual a la corriente total que circula a través de dicha superficie	ampere por metro cuadrado	A/m^2
densidad lineal de corriente	A, (α)	Corriente dividida por el espesor de la placa conductora	ampere por metro	A/m
intensidad de campo magnético	H	La intensidad de campo magnético es una magnitud vectorial axial cuya rotacional es igual a la densidad de corriente, incluyendo a la corriente de desplazamiento	ampere por metro	A/m
diferencia de potencial magnético	U_m	La diferencia de potencial magnético entre el punto y el punto 2 es igual a la integral de línea, desde el punto 1 hasta punto 2 de la intensidad de campo magnético a lo largo de su trayectoria.	ampere	A
fuerza magnetomotriz	F, F_m	$F = \oint H \bullet dr$		
corriente totalizada	Θ	Corriente eléctrica neta de conducción neta a través de un bucle cerrado		

Tabla 10. - Magnitudes y unidades de electricidad y magnetismo
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
densidad de flujo magnético, inducción magnética	B	La densidad de flujo magnético es una magnitud vectorial axial tal que la fuerza ejercida sobre un elemento de corriente, es igual al producto vectorial de este elemento y la densidad de flujo magnético	tesla	T
flujo magnético	Φ	El flujo magnético que atraviesa un elemento de superficie es igual al producto escalar del elemento de superficie y la densidad de flujo magnético	weber	Wb
potencial vectorial magnético	A	El potencial vectorial magnético es una magnitud vectorial, cuya rotacional es igual a la densidad de flujo magnético	weber por metro	Wb/m
autoinductancia	L	En una espiral conductora, es igual al flujo magnético de la espiral, causada por la corriente que circula a través de ella, dividido por esa corriente	henry	H
inductancia mutua	M, L_{12}	En dos espirales conductoras es el flujo magnético a través de una espiral producido por la corriente circulante en la otra espiral dividido por el valor de esta corriente		
coeficiente de acoplamiento	k, (x)	$k = \lvert L_{12} \rvert / \sqrt{L_{12}}$	uno	1
coeficiente de dispersión	σ	$\sigma = 1 - k^2$		
permeabilidad	μ	Densidad de flujo magnético, dividida por la intensidad de campo magnético	henry por metro	H/m
permeabilidad del vacío, constante magnética	μ_0	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m $\mu_0 = (12{,}566\ 370\ 614) \times 10^{-7}$ H/m		
permeabilidad relativa	μ_r	$\mu_r = \mu / \mu_0$	uno	1
susceptibilidad magnética	x, (χ_m)	$x = \mu_r - 1$	uno	1

Tabla 10. - Magnitudes y unidades de electricidad y magnetismo
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
momento electromagnético (momento magnético)	m	El momento electromagnético es una magnitud vectorial, cuyo producto vectorial con la densidad del flujo magnético es igual al momento torsional	ampere metro cuadrado	$A \bullet m^2$
magnetización	M, (H_j)	$M = (B/\mu_0) - H$	ampere por metro	A/m
polarización magnética	J, (B_j)	$J = B - \mu_0 H$	tesla	T
densidad de energía electromagnética	w	Energía del campo electromagnético dividida por el volumen	joule por metro cúbico	J/m^3
vector de Poynting	S	El vector de Poynting es igual al producto vectorial de la intensidad de campo eléctrico y la intensidad de campo magnético	watt por metro cuadrado	W/m^2
velocidad de propagación de ondas electromagnéticas en el vacío	c_o	$c_o = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$ c_o = 299 792 458 m/s	metro por segundo	m/s
resistencia (a la corriente continua)	R	La diferencia de potencial eléctrico dividida por la corriente, cuando no existe fuerza electromotriz en el conductor	ohm	Ω
conductancia (a la corriente continua)	G	G = 1/R	siemens	S
potencia (a la corriente continua)	P	P = UI	watt	W
resistividad	ρ	Intensidad de campo eléctrico dividido por la densidad de corriente cuando no existe fuerza electromotriz dentro del conductor	ohm metro	Ω•m
conductividad	γ, σ	$\gamma = 1/\rho$ el símbolo κ se utiliza en electroquímica	siemens por metro	S/m
reluctancia	R, R_m	Diferencia de potencial magnético dividido por el flujo magnético	henry a la menos uno	H^{-1}
permeancia	Λ, (P)	$\Lambda = 1/ R_m$	henry	H

Tabla 10. - Magnitudes y unidades de electricidad y magnetismo
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
diferencia de fase desplazamiento de fase	φ	Cuando $u = u_m \cos \omega t$ e $i = i_m \cos (\omega t - \varphi)$ φ es el desplazamiento de fase	radian uno	rad 1
impedancia, (impedancia compleja)	Z	La representación compleja de la diferencia de potencial, dividida por la representación compleja de la corriente	ohm	Ω
módulo de impedancia (impedancia)	IZI	$\lvert Z \rvert = \sqrt{R^2 + X^2}$		
reactancia	X	Parte imaginaria de la impedancia $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$	ohm	Ω
resistencia	R	La diferencia de potencial eléctrico dividido por la corriente, cuando no haya fuerza electromotriz en el conductor (véase resistencia a la corriente continua)		
resistencia (en corriente alterna)	R	Parte real de la impedancia		
factor de calidad	Q	Para un sistema no radiante si $Z = R + jX$ entonces: $Q = \lvert X \rvert / R$	uno	1
admitancia (admitancia compleja)	Y	$Y = 1/ Z$	siemens	S
módulo de admitancia (admitancia)	IYI	$\lvert Y \rvert = \sqrt{G^2 + B^2}$		
susceptancia	B	Parte imaginaria de la admitancia		
conductancia	G	Parte real de la admitancia (véase conductancia a la corriente continua)		

Tabla 10.- Magnitudes y unidades de electricidad y magnetismo
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
potencia activa o potencia instantánea	P	Producto de la corriente y la diferencia de potencial $P = \frac{1}{T}\int_0^T uidt$ Cuando: $u = u_m \cos \omega t = \sqrt{2}\ U \cos \omega t$ e $i = i_m \cos (\omega t - \varphi) = \sqrt{2}\ I \cos (\omega t - \varphi)$ se tiene que: iu, es la potencia instantánea (símbolo p) IU cos φ, es la potencia activa (símbolo P)	watt	W
potencia aparente	S (P_S)	IU es la potencia aparente	voltampere	VA
potencia reactiva	Q (P_Q)	IU sen φ es la potencia reactiva	var	var
factor de potencia	λ	El nombre "factor de potencia" (símbolo λ) se usa para la relación P/S	uno	1

Tabla 11.- Magnitudes y unidades de luz y radiaciones electromagnéticas

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
frecuencia	f, v	Número de ciclos dividido por el tiempo	hertz	Hz
frecuencia circular	ω	$\omega = 2\pi f$	segundo recíproco	s^{-1}
longitud de onda	λ	La distancia en la dirección de propagación de una onda periódica entre dos puntos sucesivos cuya fase es la misma	metro	m
número de onda número de onda circular	σ k	$\sigma = 1/\lambda$ $k = 2\pi\sigma$	metro recíproco	m^{-1}
velocidad de propagación de ondas electromagnéticas en el vacío	c, c_0	c = 299 792 458 m/s	metro por segundo	m/s
energía radiante	Q, W (U, Q_e)	Energía emitida, transferida o recibida como radiación	joule	J
densidad de energía radiante	w, (u)	Energía radiante en un elemento de volumen, dividido por ese elemento	joule por metro cúbico	J/m^3
concentración espectral de densidad de energía radiante (en términos de longitud de onda)	w_λ	La densidad de energía radiante en un intervalo infinitesimal de longitud de onda, dividido por el alcance de ese intervalo	joule por metro a la cuarta potencia	J/m^4
potencia radiante, flujo de energía radiante	P, Φ, (Φ_e)	Potencia emitida, transferida o recibida como radiación	watt	W
densidad de flujo radiante, razón de flujo de energía radiante	φ, ψ	En un punto en el espacio, el flujo de energía radiante incidente sobre una esfera pequeña, dividida por el área de la sección transversal de esa esfera	watt por metro cuadrado	W/m^2
intensidad radiante	I, (I_e)	Para una fuente en una dirección determinada, la potencia radiante que fluye hacia el exterior de la fuente o un elemento de la fuente, en un elemento de ángulo sólido que contenga a la dirección dada, dividida por dicho elemento de ángulo sólido	watt por esterradián	W/sr
radiancia	L, (L_e)	En un punto de una superficie y en una dirección determinada, la intensidad radiante de un elemento de esa superficie, dividida por el área de la proyección ortogonal de dicho elemento sobre un plano perpendicular a la dirección dada	watt por esterradián metro cuadrado	$W/(sr \bullet m^2)$

Tabla 11.- Magnitudes y unidades de luz y radiaciones electromagnéticas
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
excitancia radiante	M, (M_e)	En un punto de una superficie, el flujo de energía radiante que fluye hacia el exterior de un elemento de esa superficie, dividido por el área de dicho elemento	watt por metro cuadrado	W/m^2
irradiancia	E, (E_e)	En un punto de una superficie, el flujo de energía radiante que incide sobre un elemento de esa superficie, dividida por el área de dicho elemento	watt por metro cuadrado	W/m^2
constante de Stefan Boltzmann	σ	La constante σ en la expresión para la excitancia radiante de un radiador total (cuerpo negro), a la temperatura termodinámica T. $M = \sigma \bullet T^4$	watt por metro cuadrado kelvin a la cuarta potencia	$W/(m^2 \bullet k^4)$
primera constante de radiación	c_1	Las constantes c_1 y c_2 en la expresión para la concentración espectral de la excitancia radiante de un radiador total a la temperatura termodinámica T: $M_\lambda = c_1 f(\lambda, T) = c_1 \frac{\lambda^{-5}}{\exp(c_2 / \lambda T) - 1}$ $c_1 = 2\pi hc^2$ $c_2 = hc / k$	watt metro cuadrado	$W \bullet m^2$
segunda constante de radiación	c_2		metro kelvin	$m \bullet K$
emisividad	ε	Relación de la excitancia radiante de un radiador térmico a la de un radiador total (cuerpo negro) a la misma temperatura	uno	1
emisividad espectral, emisividad a una longitud de onda específica	$\varepsilon(\lambda)$	Relación de la concentración espectral de la excitancia radiante de un radiador térmico a la de un radiador total (cuerpo negro) a la misma temperatura		
emisividad espectral direccional	$\varepsilon(\lambda, \vartheta, \varphi)$	Relación de la concentración espectral de radiancia en una dirección dada ϑ, φ, de un radiador térmico a la de un radiador total (cuerpo negro) a la misma temperatura		
intensidad luminosa	I, (I_V)		candela (véase Tabla 1)	cd

Tabla 11.- Magnitudes y unidades de luz y radiaciones electromagnéticas
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
flujo luminoso	ϕ, (ϕ_V)	El flujo luminoso $d\phi$ de una fuente de intensidad luminosa I dentro de un elemento de ángulo sólido $d\Omega$ es: $d\phi = I\, d\Omega$	lumen	lm
cantidad de luz	Q, (Q_V)	Integral en función del tiempo del flujo luminoso	lumen segundo	lm•s
luminancia	L, (L_V)	La luminancia un punto de una superficie y en una dirección dada, se define como la intensidad luminosa de un elemento de esa superficie, dividida por el área de la proyección ortogonal de este elemento sobre un plano perpendicular a la dirección considerada	candela por metro cuadrado	cd/m
excitancia luminosa	M, (M_V)	La excitancia luminosa en un punto de una superficie, se define como el flujo luminoso que fluye hacia el exterior de un elemento de la superficie, dividido por el área de ese elemento	lumen por metro cuadrado	lm/m^2
luminosidad (iluminancia)	E, (E_V)	La luminosidad en un punto de una superficie, se define como el flujo luminoso que incide sobre un elemento de la superficie dividido por el área de ese elemento	lux	lx
exposición de luz	H	$H = \int Edt$	lux segundo	lx•s
eficacia luminosa	K	$K = \frac{\phi_v}{\phi_e}$	lumen por watt	lm/W
eficacia espectral luminosa, eficacia luminosa a una longitud de onda específica	K(λ)	$K(\lambda) = \frac{\phi_{v\lambda}}{\phi_{e\lambda}}$		
eficacia luminosa espectral máxima	K_m	El valor máximo de K(λ)		

Tabla 11.- Magnitudes y unidades de luz y radiaciones electromagnéticas
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
eficiencia luminosa eficiencia luminosa espectral, eficiencia luminosa a una longitud de onda específicada	V $V(\lambda)$	$V = \frac{K}{K_m}$ $V(\lambda) = \frac{K(\lambda)}{K_m}$	uno	1
valores triestímulos espectrales CIE	$\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$	Valores triestímulos de las componentes espectrales de un estímulo equienergético en el sistema tricomático (XYZ). Estas funciones son aplicables a campos observación entre 1° y 4°. En este sistema: $\bar{y}(\lambda) \overset{\text{def}}{=} V(\lambda)$	uno	1
coordenadas de cromaticidad	x, y, z	Para luz cuya concentración espectral de flujo radiante sea $X = \frac{\int \varphi(\lambda)\bar{x}(\lambda)d\lambda}{\int \varphi(\lambda)\bar{x}(\lambda)d\lambda + \int \varphi(\lambda)\bar{y}(\lambda)d\lambda + \int \varphi(\lambda)\bar{z}(\lambda)d\lambda}$ Análogamente se definen expresiones para y y z. Para fuentes de luz $\varphi(\lambda) = \phi_{e\lambda}(\lambda) / \phi_{e\lambda}(\lambda_0)$ (flujo radiante espectral relativo) Para colores de objetos se calcula por uno de los tres productos $\varphi(\lambda) = \frac{\phi_{e\lambda}(\lambda)}{\phi_{e\lambda}(\lambda_o)} * \left\{ \begin{matrix} \rho(\lambda) \\ \tau(\lambda) \\ \beta(\lambda) \end{matrix} \right\}$	uno	1

Tabla 11.- Magnitudes y unidades de luz y radiaciones electromagnéticas
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
absorbancia espectral	$\alpha(\lambda)$	Relación de las concentraciones espectrales de los flujos radiantes absorbido e incidente	uno	1
reflectancia espectral	$\rho(\lambda)$	Relación de las concentraciones espectrales de los flujos radiantes reflejado e incidente		
transmitancia espectral	$\tau(\lambda)$	Relación de las concentraciones espectrales de los flujos radiantes transmitido e incidente	uno	1
coeficiente de radiancia espectral	$\beta(\lambda)$	El factor de radiancia espectral en un punto de una superficie y en una dirección dada, es el cociente entre las concentraciones espectrales de radiancia de un cuerpo no radiante por sí mismo y de un difusor perfecto, igualmente irradiados		
coeficiente de atenuación lineal, coeficiente de extinción lineal	μ	La disminución relativa en la concentración espectral del flujo luminoso o radiante de un haz colimado de radiación electromagnética al cruzar un medio laminar de espesor infinitesimal, dividida por la longitud atravesada	metro recíproco	m^{-1}
coeficiente de absorción lineal	a	La parte del coeficiente de atenuación debida a la absorción		
coeficiente de absorción molar	x	$x = a / c$ donde c es la concentración de cantidad de sustancia	metro cuadrado por mol	m^2/mol
índice de refracción	n	El índice de refracción de un medio no absorbente para una radiación electromagnética de frecuencia dada, es la relación entre la velocidad de las ondas (o de la radiación) en el vacío a la velocidad de fase en el medio	uno	1

Tabla 12.– Magnitudes y unidades de acústica

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
período, tiempo periódico	T	Tiempo de un ciclo	segundo	s
frecuencia	f, v	$f = 1 / T$	hertz	Hz
intervalo de frecuencia		El intervalo de frecuencia entre dos tonos es el logaritmo de la relación entre la frecuencia más alta y la frecuencia más baja	octava*	
frecuencia angular frecuencia circular, pulsantancia	ω	$\omega = 2\pi f$	segundo recíproco	s^{-1}
longitud de onda	λ		metro	m
número de onda circular	k	$k = 2\pi/\lambda = 2\pi\sigma$ donde $\sigma = 1/\lambda$	metro recíproco	m^{-1}
densidad	ρ	Masa dividida por el volumen	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
presión estática presión acústica	Ps p, (p_a)	Presión que existiría en ausencia de ondas sonoras La diferencia entre la presión total instantánea y la presión estática	pascal	Pa
desplazamiento de una partícula de sonido	ξ, ($\times$)	Desplazamiento instantáneo de una partícula del medio, referido a la posición que ocuparía en ausencia de ondas sonoras	metro	m
velocidad de una partícula de sonido	u, v	$u = \partial\xi / \partial t$	metro por segundo	m/s
aceleración de una partícula de sonido	a	$a = \partial u / \partial t$	metro por segundo al cuadrado	m/s^2
gasto volumétrico, velocidad del volumen	q, U	Razón instantánea de flujo de volumen debido a la onda sonora	metro cúbico por segundo	m^3/s

*** Esta unidad no es del SI pero se acepta temporalmente su uso con el SI**

Tabla 12.– Magnitudes y unidades de acústica
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
velocidad del sonido	c, (c_a)	Velocidad de una onda sonora	metro por segundo	m/s
densidad de energía del sonido	w, (w_a), (e)	La energía de sonido promedio en un volumen dado, dividida por dicho volumen	joule por metro cúbico	J/m^3
flujo de energía del sonido, potencia del sonido	P, (Pa)	Energía del sonido transferida en un cierto intervalo de tiempo, dividida por la duración de ese intervalo	watt	W
intensidad del sonido	I, J	Para flujo unidireccional de energía de sonido, el flujo de energía de sonido a través de una superficie normal a la dirección de propagación, dividido por el área de esa superficie	watt por metro cuadrado	W/m^2
impedancia característica de un medio	Z_C	Para un punto en un medio y una onda progresiva plana, la representación compleja de la presión de sonido dividida por la representación compleja de la velocidad de partícula	pascal segundo por metro	Pa•s/m
impedancia acústica específica	Z_S	En una superficie, la representación compleja de la presión de sonido dividida por la representación compleja de la velocidad de partícula		
impedancia acústica	Z_a	En una superficie, la representación compleja de la presión de sonido dividida por la representación compleja de la razón de flujo de volumen	pascal segundo por metro cúbico	$Pa•s/m^3$
impedancia mecánica	Z_m	La representación compleja de la fuerza total aplicada a una superficie (o a un punto) de un sistema mecánico, dividida por la representación compleja de la velocidad promedio de la partícula en esa superficie (o de la velocidad de la partícula en ese punto) en la dirección de la fuerza	newton segundo por metro	N•s/m
nivel de presión acústica	L_p	$L_p = \ln (p/p_0) = \ln 10 \bullet \lg (p/p_0)$ donde p es el valor cuadrático medio de la presión acústica y el valor de referencia p_0 es igual a 20 µPa	decibel	dB

Tabla 12.– Magnitudes y unidades de acústica
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
nivel de potencia acústica	L_W	$L_W = ½ \ln(P/P_0) = ½ \ln 10 \bullet \lg(P/P_0)$ donde P es el valor cuadrático de la potencia acústica y la potencia de referencia es igual a 1 pW	decibel	dB
coeficiente de amortiguamiento	δ	Si una magnitud es una función del tiempo t, dada por: $F(t) = Ae^{-\delta t} \cdot \cos [\ \omega(t - t_0)\ ]$ entonces δ es el coeficiente de amortiguamiento	segundo recíproco	s^{-1}
constante de tiempo, tiempo de relajación	τ	$\tau = 1 / \delta$ donde δ es el coeficiente de amortiguamiento	segundo	s
decrecimiento logarítmico	Λ	Producto del coeficiente de amortiguamiento por el período	néper	Np
coeficiente de atenuación	α	Si una magnitud es una función de la distancia x y está dada por: $F(\times) = Ae^{-\alpha\times} \cos[\ \beta(x - x_0)\ ]$ entonces α es el coeficiente de atenuación y β es el coeficiente de fase	metro recíproco	m^{-1}
coeficiente de fase	β		metro recíproco	m^{-1}
coeficiente de propagación	γ	$\gamma = \alpha + j\beta$		
coeficiente de disipación	δ, (ψ)	Relación entre el flujo de energía acústica disipado y el flujo de energía acústica incidente	uno	1
coeficiente de reflexión	r, ρ	Relación entre el flujo de energía acústica reflejado y el flujo de energía acústica incidente		
coeficiente de transmisión	τ	Relación entre el flujo de energía acústica transmitido y el flujo de energía acústica incidente		
coeficiente de absorción acústica	α, (α_a)	$\alpha = \delta + \tau$		

Tabla 12.– Magnitudes y unidades de acústica
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
índice de reducción acústica, pérdida de transmisión acústica	R	$R = \frac{1}{2} \ln(1/\tau) = \frac{1}{2} \ln 10 \bullet \lg(1/\tau)$ en donde τ es el coeficiente de transmisión	decibel	dB
área de absorción equivalente de una superficie u objeto	A	Es el área de una superficie que tiene un coeficiente de absorción igual a 1, y que absorbe la misma potencia en el mismo campo sonoro difuso, considerando los efectos de la difracción como despreciables	metro cuadrado	m^2
tiempo de reverberación	T	El tiempo que se requiere para que la densidad de energía de sonido promedio dentro de un recinto cerrado disminuya hasta 10^{-6} veces su valor inicial (o sea 60 dB), después de que la fuente ha dejado de producir ondas sonoras	segundo	s
nivel de sonoridad	L_N	El nivel de sonoridad, en un punto de un campo sonoro, viene definido por: $L_N = \ln\left(\frac{P_{eff}}{P_o}\right)_{1kHz} = \ln 10 \bullet \lg\left(\frac{P_{eff}}{P_o}\right)$ en donde P_{eff} es la presión acústica eficaz (valor cuadrático medio) de un tono puro normalizado de 1 kHz, que un observador normal en condiciones de escucha normalizada juzga igualmente sonoro que el campo considerado, siendo $P_0 = 20\ \mu Pa$	fon*	
sonoridad	N	La sonoridad es la estimación auditiva de un observador normal de la relación entre la intensidad del sonido considerado y el de un sonido de referencia que tiene un nivel de sonoridad de 40 fons	son*	

*** Estas no son unidades del SI pero se acepta temporalmente su uso.**

Tabla 13.– Magnitudes y unidades de físico-química y físico-moelcular

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
cantidad de sustancia	n, (v)		mol (véase tabla 1)	mol
constante de Avogadro	L, N_A	Número de moléculas dividido por la cantidad de sustancia $N_A = N/n = (6{,}022\ 141\ 99 \pm 0{,}000\ 000\ 47)\ 10^{23}\ mol^{-1}$	mol recíproco	mol^{-1}
masa molar	M	Masa dividida por la cantidad de sustancia	kilogramo por mol	kg/mol
volumen molar	V_m	Volumen dividido por la cantidad de sustancia	metro cúbico por mol	m^3/mol
energía interna molar	U_m	Energía interna dividida por la cantidad de sustancia	joule por mol	J/mol
capacidad térmica molar	C_m	Capacidad térmica dividida por la cantidad de sustancia	joule por mol kelvin	J/(mol·K)
entropía molar	S_m	Entropía dividida por la cantidad de sustancia	joule por mol kelvin	J/(mol·K)
densidad numérica de moléculas	n	El número de moléculas o partículas dividido por el volumen	metro cúbico recíproco	m^{-3}
concentración molecular de la sustancia B	C_B	El número de moléculas de la sustancia B dividido por el volumen de la mezcla		
densidad	ρ	Masa dividida por el volumen	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
concentración en masa de la sustancia B	ρ_B	Masa de la sustancia B dividida por el volumen de la mezcla		
concentración de la sustancia B, concentración de la cantidad de la sustancia del componente B	c_B	Cantidad de sustancia de componente B dividida por el volumen de la mezcla	mol por metro cúbico	mol/m^3

Tabla 13.– Magnitudes y unidades de físico-química y físico-moelcular
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
molalidad de la sustancia soluto B	b_B, m_B	La cantidad de sustancia de soluto de la sustancia B en una solución dividida por la masa del solvente	mol por kilogramo	mol/kg
potencial químico de la sustancia B	μ_B	Para una mezcla con sustancias componentes B, C, . . ., $\mu_B = (\partial G/\partial n_B)_{T, p, nC, \ldots,}$ donde n_B es la cantidad de la sustancia B; y G es la función Gibbs	joule por mol	J/mol
presión parcial de la sustancia B (en una mezcla gaseosa)	p_B	Para una mezcla gaseosa, $p_B = x_B \bullet p$ donde p es la presión	pascal	Pa
fugacidad de la sustancia B (en una mezcla gaseosa)	P_B, f_B	Para una mezcla gaseosa, f_B es proporcional a la actividad absoluta B. El factor de proporcionalidad, que es función únicamente de la temperatura queda determinado por la condición de que a temperatura y composición constantes p_B/p_B tiende a 1 para un gas infinitamente diluido	pascal	Pa
presión osmótica	Π	El exceso de presión que se requiere para mantener el equilibrio osmótico entre una solución y el disolvente puro, separados por una membrana permeable sólo para el disolvente	pascal	Pa
afinidad (de una reacción química)	A	$A = -\Sigma v_B \bullet \mu_B$	joule por mol	J/mol
masa de una molécula	m		kilogramo	kg
momento dipolo eléctrico de una molécula	ρ, μ	El momento de dipolo eléctrico de una molécula es una magnitud vectorial cuyo producto vectorial con la intensidad de campo eléctrico es igual al par	coulomb metro	C•m
polarizabilidad eléctrico de una molécula	α	Momento de dipolo eléctrico inducido dividido por la intensidad de campo eléctrico	coulomb metro cuadrado por volt	$C \bullet m^2/V$

Tabla 13.– Magnitudes y unidades de físico-química y físico-moelcular
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
constante molar de los gases	R	La constante universal de proporcionalidad en la ley de un gas ideal $pV_m = RT$ $R = (8{,}314\ 472 \pm 0{,}000\ 015)$ J/(mol•K)	joule por mol kelvin	J/mol•K
constante de Boltzmann	k	$k = R / N_A$ $k = (1{,}380\ 650\ 3 \pm 0{,}000\ 002\ 4) \times 10^{-23}$ J/K	joule por kelvin	J/K
trayectoria libre media	l , λ	Para una molécula, la distancia promedio entre dos colisiones sucesivas	metro	m
coeficiente de difusión	D	$C_B\ (v_B) = -\ D$ **grad** C_B donde C_B es la concentración molecular local del constituyente B en la mezcla y (v_B) es la velocidad media local de las moléculas de B	metro cuadrado por segundo	m^2/s
coeficiente de difusión térmica	D_T	$D_T = k_T \bullet D$	metro cuadrado por segundo	m^2/s
número atómico	Z	Número de protones contenidos en el núcleo de un elemento químico		
carga elemental	e	La carga eléctrica de un protón La carga eléctrica de un electrón es igual a "-e" $e = (1{,}602\ 176\ 462 \pm 0{,}000\ 000\ 063) \times 10^{-19}$ C	coulomb	C
número de carga de un ion, electrovalencia	z	Coeficiente entre la carga de un ion y la carga elemental	uno	1
constante de Faraday	F	$F = N_A e$ $F = (96\ 485{,}341\ 5 \pm 0{,}003\ 9)$ C/mol	coulomb por mol	C/mol

Tabla 13.– Magnitudes y unidades de físico-química y físico-moelcular
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
fuerza iónica	I	La fuerza iónica de una solución de define como $I = (1/2) \Sigma z_i^2 m_i$ donde la sumatoria incluye a todos los iones con molalidad m_i	mol por kilogramo	mol/kg
Conductividad electrolítica	x , σ	La densidad de corriente electrolítica dividida por la intensidad de campo eléctrico	siemens por metro	S/m
conductividad molar	Λ_m	Conductividad dividida por la concentración	siemens metro cuadrado por mol	$S \bullet m^2/mol$

Anexo A

Nombres y símbolos de los elementos químicos

Número atómico	Nombre	Símbolo
1	hidrógeno	H
2	helio	He
3	litio	Li
4	berilio	Be
5	boro	B
6	carbono	C
7	nitrógeno	N
8	oxígeno	O
9	flúor	F
10	neón	Ne
11	sodio	Na
12	magnesio	Mg
13	aluminio	Al
14	silicio	Si
15	fósforo	P
16	azufre	S
17	cloro	Cl
18	argón	Ar
19	potasio	K
20	calcio	Ca
21	escandio	Sc
22	titanio	Ti
23	vanadio	V
24	cromo	Cr
25	manganeso	Mn
26	hierro	Fe
27	cobalto	Co
28	níquel	Ni
29	cobre	Cu
30	zinc, cinc	Zn
31	galio	Ga

Número atómico	Nombre	Símbolo
32	germanio	Ge
33	arsénico	As
34	selenio	Se
35	bromo	Br
36	criptón	Kr
37	rubidio	Rb
38	estroncio	Sr
39	ytrio	Y
40	circonio	Zr
41	niobio	Nb
42	molibdeno	Mo
43	tecnecio	Tc
44	rutenio	Ru
45	rodio	Rh
46	paladio	Pd
47	plata	Ag
48	cadmio	Cd
49	indio	In
50	estaño	Sn
51	antimonio	Sb
52	teluro, telurio	Te
53	yodo	I
54	xenón	Xe
55	cesio	Cs
56	bario	Ba
57	lantano	La
58	cerio	Ce
59	praseodimio	Pr
60	neodimio	Nd
61	prometio	Pm
62	samario	Sm
63	europio	Eu

Anexo A

Nombres y símbolos de los elementos químicos
(continuación)

Número atómico	Nombre	Símbolo
64	gadolinio	Gd
65	terbio	Tb
66	disprosio	Dy
67	holmio	Ho
68	erbio	Er
69	tulio	Tm
70	iterbio	Yb
71	lutecio	Lu
72	hafnio	Hf
73	tántalo, tantalio	Ta
74	volframio, wolframio	W
75	renio	Re
76	osmio	Os
77	iridio	Ir
78	platino	Pt
79	oro	Au
80	mercurio	Hg
81	talio	Tl
82	plomo	Pb
83	bismuto	Bi
84	polonio	Po
85	ástato	At
86	radón	Rn
87	francio	Fr

Número atómico	Nombre	Símbolo
88	radio	Ra
89	actinio	Ac
90	torio	Th
91	protactinio	Pa
92	uranio	U
93	neptunio	Np
94	plutonio	Pu
95	americio	Am
96	curio	Cm
97	berquelio	Bk
98	californio	Cf
99	einstenio	Es
100	fermio	Fm
101	mendelevio	Md
102	nobelio	No
103	lawrencio	Lr
104	unilquadio	Unq
105	unilpentio	Unp
106	unilexhio	Unh
107	unilseptio	Uns
108	uniloctio	Uno
109	unilenio	Une
110	ununilio	Uun
111	unununio	Uuu

Anexo B

Símbolo de los elementos químicos y de los nuclidos

Los símbolos de los elementos químicos deben escribirse en caracteres rectos. El símbolo no va seguido de punto.

Ejemplos: H He C Ca

Los subíndices o superíndices que afectan al símbolo de los nuclidos o moléculas, deben tener los siguientes significados y posiciones:

El número másico de un nuclido se coloca como superíndice izquierdo; por ejemplo:

^{14}N

El número de átomos de un nuclido en una molécula se coloca en la posición del subíndice derecho; por ejemplo:

$^{14}N_2$

El número atómico puede colocarse en la posición de subíndice izquierdo; por ejemplo:

$_{64}Gd$

Cuando sea necesario, un estado de ionización o un estado excitado puede indicarse mediante un superíndice derecho.

Ejemplos:

Estado de ionización:	Na^+ , PO_4^{3-} o $(PO_4)^{3-}$
Estado electrónico excitado.	He* , NO*
Estado nuclear excitado:	$^{110}Ag^*$ o bien $^{110}Ag^m$

Anexo C

pH

El pH se define operacionalmente. Para una disolución X, se mide la fuerza electromotriz E_X de la pila galvánica.

electrodo de referencia | disolución concentrada de KCl | disolución X | H_2 | Pt

y, análogamente, se mide la fuerza electromotriz de una pila galvánica que difiere de la anterior únicamente en la sustitución de la disolución X de pH desconocido, designado por pH(X), por una disolución patrón S, cuyo pH es pH(S). En estas condiciones,

$$pH(X) = pH(S) + (E_S - E_X)F / (RT \ln 10).$$

El pH así definido carece de dimensiones.

El Manual de la IUPAC sobre los símbolos y la terminología para las magnitudes y unidades de química física (1997) da los valores de pH(S) para varias disoluciones patrón.

El pH no tiene un significado fundamental; su definición es una definición práctica. Sin embargo, en el intervalo restringido de disoluciones acuosas diluidas que tienen concentraciones en cantidad de sustancia inferiores a 0,1 mol/dm^3 y no son ni fuertemente ácidas ni fuertemente alcalinas ($2 < pH < 12$), la definición es tal que,

$$pH = -lg[c(H^+)y_1 / (mol.dm^{-3})] \pm 0,02$$

donde $c(H^+)$ indica la concentración en cantidad de sustancia del ion hidrógeno H^+ e y_1 indica el coeficiente de actividad de un electrólito monovalente típico en la disolución.

Tabla 14.– Magnitudes y unidades de física atómica y física nuclear

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
número atómico, número protónico	Z	Número de protones contenidos en el núcleo de un elemento químico	uno	1
número neutrónico	N	Número de neutrones contenidos en el núcleo de un nuclido	uno	1
número nucleónico número másico	A	Número de nucleones contenidos en el núcleo de un nuclido	uno	1
masa del átomo, masa nuclídica	m_a, m(X)	Masa en reposo de un átomo en estado fundamental Para el ^1H $m(^1H) = (1,673\ 534\ 0 \pm 0,000\ 001\ 0) \times 10^{-27}$ kg $= (1,007\ 825\ 048 \pm 0,000\ 000\ 012)$ u*	kilogramo unidad de masa atómica (unificada)	kg u*
constante de masa atómica (unificada)	m_u	1/12 de la masa en reposo de un átomo neutro del nuclido ^{12}C en el estado fundamental $m_u = (1,660\ 540\ 2 \pm 0,000\ 001\ 0) \times 10^{-27}$ kg $= 1$ u* m_a / m_u = se llama masa nuclídica relativa		
masa (en reposo) del electrón	m_e	$m_e = (9,109\ 381\ 88 \pm 0,000\ 000\ 72) \times 10^{-31}$ kg	kilogramo	kg
masa (en reposo) del protón	m_p	$m_p = (1,672\ 621\ 58 \pm 0,000\ 000\ 13) \times 10^{-27}$ kg		
masa (en reposo) del neutrón	m_n	$m_n = (1,674\ 927\ 16 \pm 0,000\ 000\ 13) \times 10^{-27}$ kg		
carga elemental	e	La carga eléctrica de un protón es: $e = (1,602\ 176\ 462 \pm 0,000\ 000\ 49) \times 10^{-19}$ C	coulomb	C

*** Esta unidad no es del SI pero se permite su uso temporalmente.**

Tabla 14.– Magnitudes y unidades de física atómica y física nuclear
(continuación)

Magnitud	**Símbolo de la magnitud**	**Definición de la magnitud**	**Unidad SI**	**Símbolo de la unidad SI**
constante de Plank	h	Cuanto elemental de acción $h = (6{,}626\ 068\ 76 \pm 0{,}000\ 000\ 52) \times 10^{-34}$ J•s $h = h/2\pi$	joule segundo	J•s
radio de Bohr	a_0	$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ $a_0 = (0{,}529\ 177\ 2083 \pm 0{,}000\ 000\ 001924) \times 10^{-10}$ m	metro	m
constante de Rydberg	R_∞	$R_\infty = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0 hc}$ $= (10\ 973\ 731,568\ 549 \pm 0{,}000\ 083)\ m^{-1}$	metro recíproco	m^{-1}
energía de Hartree	E_h	$E_h = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0} = 2R_\infty \bullet hc$ $= (4{,}359\ 743\ 81 \pm 0{,}000\ 000\ 34) \times 10^{-18}$ J	joule	J
momento magnético de una partícula o núcleo	μ	Valor medio del componente electromagnético en la dirección del campo magnético en el estado cuántico correspondiente al número cuántico magnético máximo	ampere metro cuadrado	$A \bullet m^2$
magnetón de Bohr	μ_B	$\mu_B = eh/2m_e$ $= (9{,}274\ 015\ 4 \pm 0{,}000\ 003\ 1) \times 10^{-24}\ A \bullet m^2$		
magnetón nuclear	μ_N	$\mu_N = eh/2m_p = (m_e / m_p)\mu_B$ $= (5{,}050\ 786\ 6 \pm 0{,}000\ 0001\ 7) \times 10^{-27}\ A \bullet m^2$		
coeficiente giromagnético (razón giromagnética)	γ	$\gamma = \frac{\mu}{Jh}$ en donde J es el número cuántico del momento angular	ampere metro cuadrado por joule segundo	$A \bullet m^2/(J \bullet s)$

Tabla 14.– Magnitudes y unidades de física atómica y física nuclear
(continuación)

Magnitud	**Símbolo de la magnitud**	**Definición de la magnitud**	**Unidad SI**	**Símbolo de la unidad SI**
factor g del átomo o del electrón	g	$\gamma = -g \frac{\mu_B}{h} = -g \frac{e}{2 m_e}$	uno	1
factor g del núcleo o de la partícula nuclear	g	$\gamma = g \frac{\mu_N}{h} = g \frac{e}{2 m_p}$		
frecuencia angular de Larmor (frecuencia circular de Larmor)	ω_L	$\omega_L = \frac{e}{2m_e} B$ donde B es la densidad de flujo magnético	radian por segundo	rad/s
frecuencia angular de precesión nuclear	ω_N	$\omega_N = \gamma B$	segundo recíproco	s^{-1}
frecuencia angular ciclotrónica (frecuencia circular ciclotrónica)	ω_C	$\omega_c = \frac{q}{m} B$ donde: q/m es la razón de carga a la masa de la partícula B es la densidad de flujo magnético	segundo recíproco	s^{-1}
momento cuadrupolar nuclear	Q	Valor esperado de la magnitud $(1/e)\int \left(3z^2 - r^2\right) \bullet \rho(x, y, z) dV$ en el estado cuántico con el espín nuclear en la dirección (z) del campo; $\rho(x, y, z)$ es la densidad de carga nuclear y "e" es la carga elemental	metro cuadrado	m^2
radio nuclear	R	El radio promedio del volumen en el que la materia nuclear es incluida	metro	m

Tabla 14.– Magnitudes y unidades de física atómica y física nuclear
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
número cuántico de momento angular orbital, número cuántico secundario, número cuántico acimutal	l_i, L		uno	1
número cuántico de espín	s_i, S		uno	1
número cuántico de espín total	j_i, J		uno	
número cuántico de espín nuclear	I		uno	1
número cuántico de estructura hiperfina	F		uno	1
número cuántico principal	n		uno	1
número cuántico magnético	m_i, M		uno	1
radio del electrón	r_e	$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o m_e c^2}$ $= 2{,}817\,940\,92 \pm 0{,}000\,000\,38\,1 \times 10^{-15}$ m	metro	m
longitud de onda de Comptón	λ_C	$\lambda_C = 2\pi h / mc = h/mc$ donde m es la masa en reposo de la partícula	metro	m
exceso de masa defecto de masa	Δ B	$\Delta = m_a - Am_u$ $B = Zm(^1H) + Nm_n - m_a$	kilogramo	kg
exceso relativo de masa defecto relativo de masa	Δ_r B_r	$\Delta_r = \Delta/m_u$ $B_r = B/m_u$	uno	1

Tabla 14.– Magnitudes y unidades de física atómica y física nuclear
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
fracción de empaquetamiento fracción de enlace, energía de enlace por nucleón	f b	$f = \Delta_r / A$ $b = B_r / A$	uno	1
vida promedio	τ	Para decaimiento exponencial, el tiempo promedio requerido para reducir el número N de átomos o núcleos de un estado específico hasta N/e	segundo	s
ancho de nivel	Γ	$\Gamma = \frac{h}{\tau}$	joule	J
actividad (radiactividad)	A	El número promedio de transiciones nucleares espontáneas ocurridas en una cierta cantidad de un radionuclido dentro de un corto intervalo de tiempo, dividido por el valor de ese intervalo	becquerel	Bq
actividad específica en una muestra	a	La actividad de un nuclido radioactivo presente en una muestra, dividida por la masa total de la muestra	becquerel por kilogramo	Bq/kg
constante de desintegración, constante de decaimiento	λ	La constante de decaimiento es la probabilidad de decaimiento en un pequeño intervalo de tiempo dividido por este intervalo. $dN/dt = - \lambda N$ donde: N es el número de átomos radiactivos en el tiempo t $\lambda = 1/\tau$	segundo recíproco	s^{-1}
vida media	$T_{1/2}$	Para declinación exponencial, el tiempo promedio requerido para la desintegración de la mitad de los átomos de una muestra de un nuclido radiactivo	segundo	s
energía de desintegración alfa	Q_α	La suma de la energía cinética de la partícula α producida en el proceso de desintegración y la energía residual del átomo producido en el marco de referencia en que el núcleo emisor está en reposo antes de su desintegración	joule	J

Tabla 14.– Magnitudes y unidades de física atómica y física nuclear
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
energía máxima de partícula beta	E_β	La energía máxima del espectro de energía en un proceso de desintegración beta	joule	J
energía de desintegración beta	Q_β	La suma de la energía máxima de partícula beta E_β y la energía residual del átomo producido en el marco de referencia en que el núcleo emisor se encuentra en reposo antes de su desintegración	joule	J

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
energía de reacción	Q	En una reacción nuclear, la suma de las energías cinética y radiante de los productos de la reacción, menos la suma de las energías cinética y radiante de los reactivos.	joule	J
energía de resonancia	E_r , E_{res}	La energía cinética de una partícula incidente, en el marco de la referencia del objetivo, correspondiente a una resonancia en una reacción nuclear	joule	J
sección transversal	σ	Para una entidad objetivo especificada y para una reacción o proceso especificado por partículas incidentes cargadas o descargadas de energía y tipo especificado, la sección transversal es el cociente de la probabilidad de esta reacción o proceso para esta entidad objetivo y la fluencia de partícula de las partículas incidentes	metro cuadrado	m^2
sección transversal total	σ_{tot} , σ_T	La suma de todas las secciones transversales correspondientes a las diversas reacciones o procesos ocurridos entre la partícula incidente y la partícula objetivo		
sección transversal angular	σ_Ω	Sección transversal necesaria para disparar o dispersar una partícula dentro de un elemento de ángulo sólido, dividido por dicho elemento $\sigma = \int \sigma_\Omega d\Omega$	metro cuadrado por esterradián	m^2/sr
sección transversal espectral	σ_E	Sección transversal para un proceso en el que la energía de la partícula disparada o dispersada está en un elemento de energía, dividida por ese elemento $\sigma = \int \sigma_E dE$	metro cuadrado por joule	m^2/J
sección transversal angular espectral	$\sigma_{\Omega,E}$	Sección transversal necesaria para disparar o dispersar una partícula dentro de un elemento de ángulo sólido, con energía en un elemento de energía, dividida por el producto de estos dos elementos $\sigma = \iint \sigma_{\Omega,E}\, d\Omega\, dE$	metro cuadrado por esterradián joule	$m^2/(sr \bullet J)$

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
sección transversal macroscópica, densidad de sección transversal	Σ	La suma de las secciones transversales de una reacción o proceso de un tipo específico, para todos los átomos de un volumen dado, dividida por ese volumen	metro recíproco	m^{-1}
sección transversal macroscópica total, densidad de sección transversal total	Σ_{tot}, Σ_T	La suma total de las secciones transversales para todos los átomos en un volumen dado, dividido por ese volumen		
fluencia de partícula	Φ	En un punto dado del espacio, el número de partículas incidentes sobre una pequeña esfera en un intervalo de tiempo, dividido por el área de la sección transversal de esa esfera	metro cuadrado recíproco	m^{-2}
tasa de fluencia de partículas, densidad de flujo de partículas	φ	$\varphi = \frac{d\phi}{dt}$	metro cuadrado recíproco por segundo	m^{-2}/s
fluencia de energía	ψ	En un punto dado en el espacio, la suma de las energías, excluyendo la energía en reposo, de todas las partículas incidentes sobre una pequeña esfera en un intervalo de tiempo, dividida por el área seccional transversal de esa esfera	joule por metro cuadrado	J/m^2
tasa de fluencia de energía, densidad de flujo de energía	ψ	$\psi = \frac{d\psi}{dt}$	watt por metro cuadrado	W/m^2
densidad de corriente de partículas	J, (S)	La integral de una magnitud vectorial cuya componente normal sobre cualquier superficie, es igual al número "neto" de partículas pasando a través de esa superficie en un pequeño intervalo de tiempo, dividido por ese intervalo	metro cuadrado recíproco por segundo	m^{-2}/s
coeficiente de atenuación lineal	μ, μ_l	$\mu = -(\frac{1}{J})\frac{dJ}{dx}$ donde J es la densidad de corriente de un haz de partículas paralelo a la dirección x	metro recíproco	m^{-1}
coeficiente de atenuación másica	μ_m	El coeficiente de atenuación lineal dividido por la densidad de masa de la sustancia	metro cuadrado por kilogramo	m^2/kg

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
coeficiente de atenuación molar	μ_c	$\mu_c = \mu/c$ donde c es la concentración de cantidad de sustancia	metro cuadrado por mol	m^2/mol
coeficiente de atenuación atómica	μ_a, μ_{at}	$\mu_a = \mu/n$ donde n es la densidad numérica de átomos en la sustancia	metro cuadrado	m^2
espesor medio, valor medio de espesor, capa hemirreductora	$d_{1/2}$	El espesor de la capa atenuadora que reduce la densidad de corriente de un haz unidireccional a la mitad de su valor inicial	metro	m
potencia de detención lineal total, poder de frenado lineal total	S , S_1	Para una partícula cargada ionizante de energía E, moviéndose en la dirección x $S = - dE/dx$	joule por metro	J/m
potencia de detención atómica total, poder de frenado atómico total	S_a	$S_a = S/n$ donde n es la densidad numérica de átomos en la sustancia	joule metro cuadrado	$J \bullet m^2$
potencia de detención másica total, poder frenado másico total	S_m	La potencia de detención lineal total dividida por la densidad de masa de la sustancia	joule metro cuadrado por kilogramo	$J \bullet m^2/kg$
alcance lineal medio	R , R_l	La distancia que una partícula penetra en una sustancia dada, bajo condiciones específicas promediadas de un grupo de partículas que tiene la misma energía	metro	m
alcance másico medio	R_ρ, (R_m)	El alcance lineal medio multiplicado por la densidad de masa de la sustancia	kilogramo por metro cuadrado	kg/m^2
ionización lineal por una partícula	N_{il}	El número de cargas elementales del mismo signo, producidas en un elemento de la longitud de la trayectoria de una partícula cargada ionizante dividido por ese elemento	metro recíproco	m^{-1}
pérdida promedio de energía por par de iones formados	W_j	La energía cinética inicial de una partícula cargada ionizante, dividida por la ionización total de esa partícula	joule	J
movilidad	μ	La velocidad de arrastre promedio impartida por un campo eléctrico o una partícula cargada en un medio, dividido por la intensidad del campo	metro cuadrado por volt segundo	$m^2/(V \bullet s)$

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes
(continuación)

Magnitud	**Símbolo de la magnitud**	**Definición de la magnitud**	**Unidad SI**	**Símbolo de la unidad SI**
densidad numérica de iones, densidad de iones	n^+, n^-	El número de iones positivos o negativos de un elemento de volumen, dividido por ese elemento	metro cúbico recíproco	m^{-3}
coeficiente de recombinación	α	Coeficiente en la Ley de recombinación $-\frac{dn^+}{dx} = -\frac{dn^-}{dt} = \alpha n^+ n^-$	metro cúbico por segundo	m^3/s
densidad numérica de neutrones	n	El número de neutrones libres en un elemento de volumen, dividido por ese elemento	metro cúbico recíproco	m^{-3}
rapidez del neutrón	v	La magnitud de la velocidad neutrónica	metro por segundo	m/s
densidad de flujo de neutrones, rapidez de flujo de neutrones	φ	En un punto dado en el espacio, el número de neutrones incidentes sobre una pequeña esfera, en un pequeño intervalo de tiempo, dividido por el área de sección transversal de esa esfera y por el intervalo de tiempo	metro cuadrado recíproco por segundo	m^{-2}/s
coeficiente de difusión, coeficiente de difusión para la densidad numérica de neutrones	D, D_n	$J_x = -D_n \partial n/\partial x$ donde: J_x es la componente x de la densidad de corriente de neutrones n es la densidad numérica de neutrones	metro cuadrado por segundo	m^2/s
coeficiente de difusión para la densidad de flujo de neutrones, coeficiente de difusión para rapidez de fluencia de neutrones	D_φ, (D)	$J_x = -D_\phi \partial\phi/\partial x$ donde: J_x es la componente x de la densidad de corriente neutrónica ϕ es la densidad de flujo neutrónico	metro	m
densidad total de una fuente de neutrones	S	Razón de la producción de neutrones en un elemento de volumen, dividido por ese elemento	segundo recíproco metro cúbico recíproco	$s^{-1} \bullet m^{-3}$
densidad de frenado	q	La densidad numérica de neutrones retardados, pasando un valor de energía dado, durante un corto intervalo de tiempo, dividida por dicho intervalo	metro cúbico recíproco por segundo	m^{-3}/s

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
probabilidad de escape a la resonancia	p	En medio infinito, probabilidad de que un neutrón, al frenarse a través de una zona energética donde existen resonancias, la rebase sin ser absorbido	uno	1
letargía	u	En el frenado de neutrones, logaritmo neperiano del cociente entre una energía de referencia E_0, normalmente la máxima del neutrón, y la que este posee, E	uno	1
decaimiento logarítmico medio	ξ	Valor medio de la disminución del logaritmo neperiano de la energía de los neutrones en sus condisiones elásticas con núcleos cuya energía cinética es despreciable comparada con la de los neutrones	uno	1
trayectoria libre promedio	l, λ	La distancia promedio que viaja una partícula entre dos reacciones o procesos específicos sucesivos	metro	m
área de retardamiento	L^2_s, L^2_{sl}	En un medio homogéneo infinito, la sexta parte de la distancia cuadrática media entre la fuente de un neutrón y el punto donde el neutrón alcanza una energía determinada	metro cuadrado	m^2
área de difusión	L^2	En un medio homogéneo infinito, la sexta parte de la distancia cuadrática media entre el punto donde el neutrón entra a una clase especificada y el punto donde abandona esta clase		
área de migración	M^2	La suma del área de retardamiento de energía de fisión a energía térmica y el área de difusión para neutrones térmicos		
longitud de retardamiento	L_s, L_{sl}	La raíz cuadrada del área de retardamiento	metro	m
longitud de difusión	L	La raíz cuadrada del área de difusión		
longitud de migración	M	La raíz cuadrada del área de migración		
rendimiento neutrónico de la fisión	v	En la fisión de un núclido determinado, promedio del número de neutrones, lo mismo inmediatos que diferidos, emitidos en cada fisión	uno	1
rendimiento neutrónico de la absorción	η	Promedio del número de neutrones de fisión, lo mismo inmediatos que diferidos, emitido por cada neutrón que se absorbe en un nuclido fisionable o en un combustible nuclear, según se especifique		

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
factor de fisión rápida	ε	Para un medio infinito, razón entre el número medio de neutrones producidos por todas las fisiones y el de neutrones producidos exclusivamente por las fisiones térmicas	uno	1
factor de utilización térmica	f	Para un medio infinito, razón entre el número de neutrones térmicos absorbidos en un combustible nuclear, según se especifique, y el número total de neutrones térmicos absorbidos	uno	1
probabilidad de permanencia	Λ	Probabilidad de que un neutrón no escape del núcleo de un reactor durante el proceso de moderación o el de difusión en la zona térmica	uno	1
factor de multiplicación	k	Para un medio multiplicativo, razón entre el número total de neutrones producidos durante un intervalo de tiempo y el número total de neutrones perdidos por absorción y escape durante el mismo intervalo	uno	1
factor de multiplicación infinito, factor de multiplicación de un medio infinito	k_∞	Factor de multiplicación de un medio sin fugas neutrónicas		
factor de multiplicación efectivo	k_{eff}	Factor de multiplicación correspondiente a un medio finito		
reactividad	ρ	En un medio multiplicativo, medida de la desviación entre el estado del medio y su estado crítico $\rho = \frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}}$	uno	1
constante de tiempo del reactor	T	El tiempo requerido para que la densidad de flujo neutrónico de un reactor cambie en un factor "e" cuando la densidad de flujo aumenta o disminuye exponencialmente	segundo	s
actividad	A	El número promedio de transacciones nucleares espontáneas ocurridas en una cierta cantidad de un radionuclido, dentro de un corto intervalo de tiempo, dividido por el valor de ese intervalo	becquerel	Bq

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
energía impartida	ε	La energía impartida por radiación ionizante a la materia en un volumen, es, la diferencia entre la suma de las energías de todas las partículas directamente ionizantes (cargadas) e indirectamente ionizantes (sin carga) que han ocupado el volumen y la suma de las energías de todas aquellas que han salido de él, menos la energía equivalente de cualquier incremento de la masa en reposo que tenga lugar en reacciones de partículas elementales o nucleares	joule	J
energía impartida media	$\bar{\varepsilon}$	El promedio de la energía impartida	joule	J
energía específica impartida	z	Para cualquier radiación ionizante la energía impartida a un elemento de materia irradiada, dividida por la masa de ese elemento	gray	Gy
dosis absorbida	D	Para cualquier radiación ionizante, la energía media impartida a un elemento de materia irradiada, dividida por la masa de este elemento		
equivalente de dosis	H	El equivalente de dosis es el producto de D, Q, y N en el punto de interés, donde D es la dosis absorbida, Q es el factor de calidad y la N es el producto de otros factores determinantes cualesquiera $H = D \bullet Q \bullet N$	sievert	Sv
rapidez de dosis absorbida	$\dot{D}$	Dosis absorbida en un pequeño intervalo de tiempo, dividida por este intervalo	gray por segundo	Gy/s
transferencia lineal de energía	L	Para una partícula cargada ionizante, la energía local impartida a una masa, a través de una pequeña distancia, dividida por esa distancia	Joule por metro	J/m
kerma	K	Para partículas indirectamente ionizantes (sin carga), la suma de las energías cinéticas iniciales de todas las partículas cargadas liberadas en un elemento de materia, dividida por la masa de ese elemento kerma en un pequeño intervalo de tiempo, dividido por ese intervalo	gray	Gy

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes
(continuación)

Magnitud	**Símbolo de la magnitud**	**Definición de la magnitud**	**Unidad SI**	**Símbolo de la unidad SI**
rapidez de kerma	$\dot{K}$	$\dot{K} = \frac{dK}{dt}$	gray por segundo	Gy/s
coeficiente de transferencia de energía másica	μ_{tr}/ρ	Para un haz de partículas indirectamente ionizante (sin cargas) $\mu_{tr} / \rho = \frac{\dot{K}}{\psi}$ donde ψ es la densidad de flujo de energía	metro cuadrado por kilogramo	m^2/kg
exposición	X	Para radiación X o gamma, la carga eléctrica total de los iones del mismo signo producidos cuando todos los electrones liberados (negativos y positivos) por fotones en un elemento de aire son detenidos en el aire, dividida por la masa de ese elemento	coulomb por kilogramo	C/kg
rapidez de exposición	$\dot{X}$	Exposición en un pequeño intervalo de tiempo, dividida entre ese intervalo	coulomb por kilogramo segundo	C/(kg•s)

TABLA 16.- Unidades que no pertenecen al SI, que se conservan para usarse con el SI

Magnitud	Unidad	Símbolo	Equivalente
tiempo	minuto	min	1 min = 60 s
	hora	h	1 h = 60 min = 3 600 s
	día	d	1 d =24 h = 86 400 s
	año	a	1 a = 365,242 20 d = 31 556 926 s
tiempo	grado	°	1° = (π/180) rad
	minuto	'	1' = (π/10 800) rad
	segundo	"	1" = (π/648 000) rad
volumen	litro	l, L	1 L = 10^{-3} m^3
masa	tonelada	t	1 t = 10^3 kg
trabajo, energía	electronvolt	eV	1 eV = 1,602 177 x 10^{-19} J
masa	unidad de masa atómica	u	1 u = 1,660 540 x 10^{-27} kg

Tabla 17.- Unidades que no pertenecen al SI que pueden usarse temporalmente con el SI

Magnitud	Unidad	Símbolo	Equivalencia
superficie	área	a	1 a = 10^2 m^2
	hectárea	ha	1 ha = 10^4 m^2
	barn	b	1 b = 10^{-28} m^2
longitud	angström	Å	1 Å = x 10^{-10} m
longitud	milla náutica		1 milla náutica = 1852 m
presión	bar	bar	1 bar = 100 kPa
velocidad	nudo		1 nudo = (0,514 44) m/s
dosis de radiación	röntgen	R	1 R =2,58 x 10^{-4} C/kg
dosis absorbida	rad*	rad (rd)	1 rad = 10^{-2} Gy
radiactividad	curie	Ci	1 Ci = 3,7 x 10^{10} Bq
aceleración	gal	Gal	1 gal = 10^{-2} m/s^2
dosis equivalente	rem	rem	1 rem = 10^{-2} Sv

*** El rad es una unidad especial empleada para expresar dosis absorbida de radiaciones ionizantes. Cuando haya riesgo de confusión con el símbolo del radián, se puede emplear rd como símbolo del rad.**

Tabla 18.- Ejemplos de unidades que no deben utilizarse

Magnitud	**Unidad**	**Símbolo**	**Equivalencia**
longitud	fermi	fm	10^{-15} m
longitud	unidad X	unidad X	1,002 x 10^{-4} nm
volumen	stere	st	1 m^3
masa	quilate métrico	CM	2 x 10^{-4} kg
fuerza	kilogramo-fuerza	kgf	9,806 65 N
presión	torr	Torr	133,322 Pa
energía	caloría	cal	4,186 8 J
fuerza	dina	dyn	10^{-5} N
energía	erg	erg	10^{-7} J
luminancia	stilb	sb	10^4 cd/m^2
viscosidad dinámica	poise	P	0,1 Pa•s
viscosidad cinemática	stokes	St	10^{-4} m^2/s
luminosidad	phot	ph	10^4 lx
inducción	gauss	Gs, G	10^{-4} T
intensidad campo magnético	oersted	Oe	(1000 / 4π) A/m
flujo magnético	maxwell	Mx	10^{-8} Wb
inducción	gamma		10^{-9} T
masa	gamma		10^{-9} kg
volumen	lambda		10^{-9} m^3

Tabla 19 - Prefijos para formar múltiplos y submúltiplos

Nombre	Símbolo	Valor
yotta	Y	10^{24} = 1 000 000 000 000 000 000 000 000
zetta	Z	10^{21} = 1 000 000 000 000 000 000 000
exa	E	10^{18} = 1 000 000 000 000 000 000
peta	P	10^{15} = 1 000 000 000 000 000
tera	T	10^{12} = 1 000 000 000 000
giga	G	10^{9} = 1 000 000 000
mega	M	10^{6} = 1 000 000
kilo	k	10^{3} = 1 000
hecto	h	10^{2} = 100
deca	da	10^{1} = 10
deci	d	10^{-1} = 0,1
centi	c	10^{-2} = 0,01
mili	m	10^{-3} = 0,001
micro	μ	10^{-6} = 0,000 001
nano	n	10^{-9} = 0,000 000 001
pico	p	10^{-12} = 0,000 000 000 001
femto	f	10^{-15} = 0,000 000 000 000 001
atto	a	10^{-18} = 0,000 000 000 000 000 001
zepto	z	10^{-21} = 0,000 000 000 000 000 000 001
yocto	y	10^{-24} = 0,000 000 000 000 000 000 000 001

Tabla 20.- Reglas generales para la escritura de los símbolos de las unidades del SI

1	Los símbolos de las unidades deben ser expresados en caracteres romanos, en general, minúsculas, con excepción de los símbolos que se derivan de nombres propios, en los cuales se utilizan caracteres romanos en mayúsculas Ejemplos: m, cd, K, A
2	No se debe colocar punto después del símbolo de la unidad
3	Los símbolos de las unidades no deben pluralizarse Ejemplos: 8 kg, 50 kg, 9 m, 5 m
4	El signo de multiplicación para indicar el producto de dos ó más unidades debe ser de preferencia un punto. Este punto puede suprimirse cuando la falta de separación de los símbolos de las unidades que intervengan en el producto, no se preste a confusión. Ejemplo: N•m o Nm, también m•N pero no: mN que se confunde con milinewton, submúltiplo de la unidad de fuerza, con la unidad de momento de una fuerza o de un par (newton metro)
5	Cuando una unidad derivada se forma por el cociente de dos unidades, se puede utilizar una línea inclinada, una línea horizontal o bien potencias negativas. Ejemplo: m/s o ms^{-1} para designar la unidad de velocidad: metro por segundo
6	No debe utilizarse más de una línea inclinada a menos que se agreguen paréntesis. En los casos complicados, deben utilizarse potencias negativas o paréntesis Ejemplos: m/s^2 o $m•s^{-2}$, pero no: m/s/s $m•kg / (s^3•A)$ o $m•kg•s^{-3}•A^{-1}$, pero no: $m•kg/s^3/A$
7	Los múltiplos y submúltiplos de las unidades se forman anteponiendo al nombre de éstas, los prefijos correspondientes con excepción de los nombres de los múltiplos y submúltiplos de la unidad de masa en los cuales los prefijos se anteponen a la palabra "gramo" Ejemplo: dag, Mg (decagramo; megagramo) ks, dm (kilosegundo; decímetro)
8	Los símbolos de los prefijos deben ser impresos en caracteres romanos (rectos), sin espacio entre el símbolo del prefijo y el símbolo de la unidad Ejemplo: mN (milinewton) y no: m N
9	Si un símbolo que contiene a un prefijo está afectado de un exponente, indica que el múltiplo de la unidad está elevado a la potencia expresada por el exponente Ejemplo: $1\ cm^3 = (10^{-2}\ m)^3 = 10^{-6}\ m^3$ $1\ cm^{-1} = (10^{-2}\ m)^{-1} = 10^2\ m^{-1}$
10	Los prefijos compuestos deben evitarse Ejemplo: 1 nm (un nanómetro) pero no: 1 mμm (un milimicrómetro)

Tabla 21 - Reglas para la escritura de los números y su signo decimal

Números	Los números deben ser generalmente impresos en tipo romano. Para facilitar la lectura de números con varios dígitos, estos deben ser separados en grupos apropiados preferentemente de tres, contando del signo decimal a la derecha y a la izquierda, los grupos deben ser separados por un pequeño espacio, nunca con una coma, un punto, o por otro medio.
Signo decimal	El signo decimal debe ser una coma sobre la línea (,). Si la magnitud de un número es menor que la unidad, el signo decimal debe ser precedido por un cero.

9 VIGILANCIA

La vigilancia de la presente norma oficial mexicana estará a cargo de la Secretaría de Economía, por conducto de la Dirección General de Normas y de la Procuraduría Federal del Consumidor, conforme a sus respectivas atribuciones.

10 BIBLIOGRAFÍA

- Ley Federal sobre Metrología y Normaliación, publicada en el Diario Oficial de la Federación el 1 de julio de 1992

- Reglamento de la Ley Federal sobre Metrología y Normalización, publicado en el Diario Oficial de la Federación el 14 de enero de 1999.

- Le Systeme International d'Unités (SI)
  Bureau International des Poids et Mesures.

- Recueil de Travaux du Bureau International des Poids et Mesures
  Volumen 2, 1968-1970.
  Bureau International des Poids et Mesures.

- ISO 1000 (1992) SI units and recommendations for the use of their multiples and of certain other units.

- ISO 31-0 (1992) Quantities and units-Part 0: General principles.

- ISO 31-1 (1992) Quantities and units - Part 1: Space and time.

- ISO 31-2 (1992) Quantities and units - Part 2: Periodic and related phenomens.

- ISO 31-3 (1992) Quantities and units - Part 3: Mechanics.

- ISO 31-4 (1978) Quantities and units - Part 4: Heat.

- ISO 31-5 (1992) Quantities and units - Part 5: Electricity and magnetism.

- ISO 31-6 (1992) Quantities and units - Part 6: Light and related electromagnetic radiations.

- ISO 31-7 (1992) Quantities and units - Part 7: Acoustics.

- ISO 31-8 (1992) Quantities and units - Part 8: Physical chemistry and and molecular physics.

- ISO 31-9 (1992) Quantities and units - Part 9: Atomic and nuclear physics.

- ISO 31-10-1992 Quantities and units - Part 10: Nuclear reactions and and ionizing radiations.

- NFXO2-201-1985 Grandeurs, unites et symboles d'espace et de temps.

- NFXO2-202-1985 Grandeurs, unités et symboles de phénoménes phénoménes periodiques et connexes.

- NFXO2-203-1993 Grandeurs, unités et symboles de mécanique.

- NFXO2-204-1993 Grandeurs, unités et symboles de thermique.

- NFXO2-205-1994 Grandeurs, unités et symboles d'electicité et de magnétisme.

- NFXO2-206-1993 Grandeurs, unités et symboles des rayonnements electro magnétiques et d'optique.

- NFXO2-207-1985 Grandeurs, unités et symboles d'acoustique.

- NFXO2-208-1985 Grandeurs, unités et symboles de chimie physique et de physique moléculaire.

- NFXO2-209-1993 Grandeurs, unités et symboles de phyusique atomique et nucleaire.

- Atomic Weigths of the Elements 1997
  IUPAC Pure Appl. Chem., 51, 381-384 (1997)

11 CONCORDANCIA CON NORMAS INTERNACIONALES

Esta norma concuerda con lo establecido en los documentos del Bureau International des Poids et Mesures y las normas ISO mencionadas en la Bibliografía. Las tablas se han estructurado eligiendo las unidades más usuales.

TRANSITORIOS

PRIMERO.- Esta norma oficial mexicana entrará en vigor 60 días después de su publicación en el Diario Oficial de la Federación

SEGUNDO.- Esta norma oficial mexicana cancela a la NOM-008-SCFI-1993 Sistema General de Unidades de Medida

México, D.F

EL DIRECTOR GENERAL DE NORMAS

MIGUEL AGUILAR ROMO

Unidad 1

1.1 2%

1.2

a) 2%

b) 0,5%

c) 0,25%

d) 0,11%

1.3 $A = (100 \pm 2)$ cm^2, 2%

1.4

Línea *A*: 3,99%

Línea *B*: 3,33%

Línea *C*: 9,77%

1.5

2,8 cm ± 0,3

1.6

a) 5

d) 5

i) 30,48, con 4 cifras significativas

1.7 $4{,}27 \times 10^3$ cm^3

1.8 $3{,}37 \times 10^3$

1.9 50 mexicanos/km^2

1.10 10 800 m^2. Tiene 5 cifras significativas

1.11

a) 5

b) 4

c) 3

d) 7

1.12 1 nudo

1.13 5 184 km/h^2

1.14 13 600 kg/m^3

1.15 1.134 rad

1.16 $3{,}8 \times 10^3$ cm^3, $7{,}5 \times 10^3$ cm^3; sí

1.17 $1{,}17 \times 10^{10}$ átomos de C

1.18 37,13 N

1.19 $5{,}1 \times 10^{12}$ M/año

1.20 $1{,}58 \times 10^{18}$ t

1.21 $5{,}2 \times 10^{16}$ t

1.22 $5{,}1 \times 10^{15}$ t

1.23 0,115 m^2

1.24 16,35 L

1.25 Hombres: 657 000 horas; Mujeres: 700 800 horas

1.26 No puede hacerlo, ya que sólo puede cargar 1,5 toneladas

1.27 21,21 horas a la semana

1.28 Sí es posible, ya que el volumen del barril es de 808,19 galones

1.29

Ciudad de México: 21,11 °C (templado)

Monterrey: 28,33 °C (calor)

Querétaro: 16,11 °C (frio)

1.30 8,1 g/cm^3

1.31 449 lb/ft^3

1.32

a) −53 °C

b) 225 °C

1.33

a) 357 °C

b) −38,9 °C

1.28

a) 32000 mg

b) 0,032 kg

c) 0,0705 lb

1.35 2 270 g

1.36 T^{-2}

1.37

Variable	Símbolo	Dimensión
Potencia	P	$ML^2\theta^{-3}$
Flujo volumétrico	Q	$L^3\theta^{-1}$
Densidad del fluido	ρ	ML^{-3}
Velocidad angular de un rotor	ω	θ^{-1}

Unidad 2

2.1 33 106 N y $\theta = 335°$

2.2 $a_R = 226{,}46$ m/s^2, $\theta = 300{,}76°$

2.3 $F_E = (-i - 7j + 3k)$N

2.4 $F_E = 7{,}68$ N, $F_R = 7{,}68$ N

2.5 $\theta = 71{,}56°$

2.6 30 km/h

2.7 21,2 nudos. ¡¡¡Llevan rumbos de colisión!!!

2.8

a) $\theta = 11{,}31°$

b) tiempo adicional = 1 s

2.9

$A \cdot B = 547{,}9$

$A \times B = 1\,123{,}5$

2.10

a) -30

b) -14

c) $(2i - 11j - 6k)$

2.11 $\theta = 147{,}86°$

2.12 $-51\ \text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

2.13 $\tau = [-36k]\text{Nm}$

2.14 $\tau = -i - 5j - 9k$

2.15

a) 52

b) 30

2.16 7,8 metros, 38° al noreste.

2.17

Magnitud	Escalar/Vectorial	Análisis dimensional
Volumen	Escalar	$[L^3]$
Fuerza	Vectorial	$[M]\,[L]\,[T^{-2}]$
Trabajo	Escalar	$[M]\,[L^2]\,[T^{-2}]$
Densidad	Escalar	$[M]\,[L^{-3}]$
Superficie	Escalar	$[L^2]$
Presión	Escalar	$[M]\,[L^{-1}]\,[T^2]$

2.18 5,06 km, 20,2° al noroeste. La dirección aproximada es la esquina de Benito Juárez y San Juanito Itzícuaro.

2.19

a) 10 m

b) 15,7 m

c) 0

2.20 70 m

2.21 47,2 mm, 122°

2.23 9,48 µm a 26,6°

2.25 31, 269 con un ángulo de 14, 88°

2.26

b) $7{,}5\,i + j$

c) $4{,}5\,i - 5\,j$

2.27 $G(-1, 3, 6)$

2.28 $P(8, -5)$

2.29

a) Si la ecuación de la recta es $y = x - 1$

b) No están sobre una misma recta.

2.31

a) No

b) No

c) No

2.32 11, 402

2.33 (4,11/4)

2.34 7, 7421 con un ángulo de 35,538°

2.35 $c_y = (4/3)$, $b_x = 10/3$, $b_z = -35/4$

2.36

a) 4,4721

b) 10,441

c) 2,6667

Unidad 3

3.1 225 m, 30 m/s

3.2 15 km/h

3.3 35 km

3.4 Motocicleta 840 km y bicicleta 160 km

3.5 El sonido directo a 1,5 s, y el del eco a 3 s

3.6 30 minutos

3.7 180 metros

3.8 Tardan en encontrarse 1,5 horas desde que salió el de Morelia; a 117 km de Morelia

3.9 1,67 m/s^2; 83,17 m

3.10 14 s

3.11 11,03 s

3.12 0,25 m/s^2, 50 m

3.13 162 m

3.14 3 s, 12 m/s

3.15 1 975,3 m/s^2, 2 469,1 m/s^2

3.16 0,55556 m/s^2, 60 s, 33,05 m

3.17 68,33 m/s; −23,33 m/s^2.

3.18

a) 137,5 s

b) 0,5316 m/s^2

c) 44 m/s; 73,01 m/s

3.19 41,67 m

3.20 2,6833 m/s; 8,9443 s

3.21 15 s

3.22

a) 86,4 s

b) 261,7 m

3.23 1,2742 s

3.24 (3/4)h

3.25 −49,25 m/s; 123,63 m hacia abajo

3.26

a) 4,4627 s

b) 48,779 m/s

3.27

a) 482,33 m

b) −97,280 m/s

3.28 31,321 m/s; 3,1928 s

3.29 49,05 m/s; 122,63 m

3.30

a) 4,3757 s

b) 46,593s

c) 3 185,5 m

3.31

a) 3,6210 s

b) 116,8 m

c) 14,514 m/s y 64,114 m/s

3.32 875 m

3.33 75,96°

3.34 3 188,8 m

3.35

a) 3,0605 s

b) 45,897 m

c) $v_x = 40{,}005$ m/s

d) 244,87 m

3.36

a) 3 911 m

b) 2,4564 s

c) 39,236 m

d) 15,973 m/s; 2,236 m/s

3.37

a) 89,992 m; 28,848 m

b) 22,498 m/s; −16,702 m/s.

3.38

a) 7,2154 s

b) 63,774 m

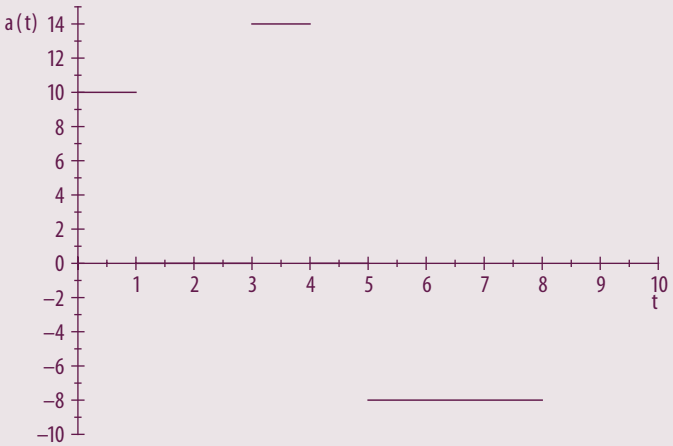
c) 255,1 m

3.39 Pega en el quinto escalón

3.40 2 626,4 m

3.41

a)



b) 102 m

c) *AB* 10 t; *CD* 24 t

3.42

a) 0,5 m/s^2

b) 0

c) 0,5 m/s^2

d) 2 m/s.

3.43

a) 8 s

b) 96 m; 128 m

3.44

a) 5 m/s

b) una recta $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

3.45

a) 1 022,9 m/s

b) $2{,}7248 \times 10^{-}3$ m/s^2

3.46 3,4872 rad/s; 1,8241 m/s

3.47 509,05 m/s

3.48 0,2 Hz

3.49 80,83 rad/s

3.50

a) 7,96

b) 5 m/s

c) $-2{,}094$ rad/s^2

3.51

a) $-20{,}944$ rad/s^2

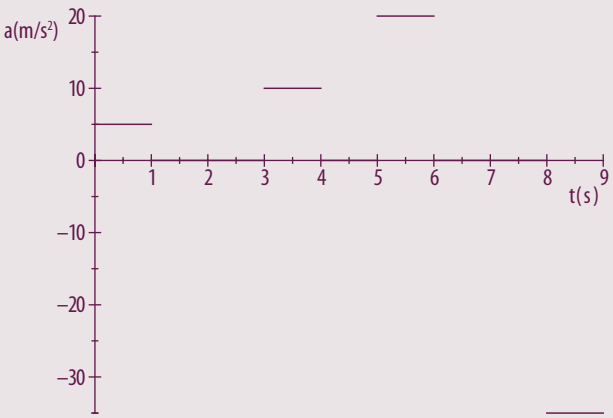
b) 125

c) $-4{,}1888$ m/s^2

3.52 100 m

3.53

a)



b) 17, 5 m

c) 0

d) 150 m,

e) $(5/2)x^2$, $0 \leq x < 1$

$5x$ $1 \leq x < 3$

$5x(x-5)$ $3 \leq x < 4$

$15x$ $4 \leq x < 5$

$5x(2x-17)$, $5 \leq x < 6$

$35x$, $6 \leq x < 8$

$-((35)/2)\,x\,(x-18)$, $8 \leq x < 9$

3.54 0,022 m/s, 0,3811 m/s^2

3.55

a) $-8{,}508$ rad/s^2

b) 8 s

3.56 29,4 km

3.57 95,88 m/s

3.58 2,66 m/s, 5,33m/s, 1,77 m/s, 7 200m

3.59 33,33 s

3.60 0,74636 s

3.61 1, 6638 s

3.62 0,50979 m/s^2, 0,29 de vuelta, 27, 652 m, 0,75593 s, 9,8 m/s^2, 825,01 m

Unidad 4

4.1 0

4.2 10 N

4.3 100 N

4.4 4 N

4.5 10 m/s

4.6 1/5

4.7 48 N

4.8 30 N

4.9 $1{,}3811 \times 10^5$ N

4.10 0,392 m/s^2

4.11 120 kg, 192 N

4.13 $6{,}4 \times 10^5$ N

4.14 $m = 0{,}4054$ kg

4.15 1,43 m/s^2, a 65,22 del E

4.16 $-90\,278$ N

4.17 Hay dos fuerzas: el peso (P) y la fuerza de contacto (F_c); $F_c = 210{,}2$ N y $P = 200$ N

4.18 868,2 N

4.19

a) $F_x = 1{,}88$ N

b) $F_y = 0{,}68$ N

c) $1{,}88i + 0{,}68\,j$

4.20

a) $-45\text{ N}i - 25{,}981\text{ N}j$

b) 210°

4.21 $0{,}747i - 0{,}405\,j$ m/s^2

4.22

b) a = 4,29 m/s²

c) T= 28,57 N

4.23 503,28 N

4.25

b) 8,495 m/s²

c) 1,19 s

d) 10,09 m/s

4.26 0,833 m/s

4.27 33,98 N, 39,23 N

4.28 32 N

4.29 7,848 m/s²

4.30 $\frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$

4.31 3,27 m/s²

4.32 P/2

4.33

a) 864,8 N

b) 704,8 N

4.34 T = 111,34 N

4.35

a) 342,3 N

b) 294,3 N

4.36

b) 1,96 m

4.37 0,66 m/s²

4.38 784,8 N

4.39

a) 1,77 m/s²

b) 0,37

c) 25,48 N

d) 9,43 N

e) 2,66 m/s

4.40

a) 1,286 m/s²

b) 1,286 m/s² 27,204 N

4.41 24,81 N

4.42 5 N

4.43

a) 0,654 m/s²

b) 0,361 m/s

c) 11,445 N

4.44 20 kg

4.45 0,72 N

4.46 0,96 N

4.47 21,39 N

4.48 20 m/s

4.49 12,25 m/s

4.50 22,20°

4.52

a) 41, 62

b) 38. 66°

c) −41,62

4.53

a) 53,9 N

b) 41,649 N

c) 288,91°

4.54 3, 4731 kg

4.55 2,20 N

4.56

a) 0,00149 m/s²

b) 17,15 N

c) 49 N; 17,15745 N

4.57

a) 54,9 N

b) F_x = 50,9 N; F_y = 20,57

4.58 70 N; 56 N

4.59 7,35 m/s²

4.60

a) 7497 N

b) 2,142 m/s²

c) 7497 N

4.61

a) 9,06 N; 2,7 N

b) 37,06 N

c) 49,25 N

4.62 33,13 N; 39,19 N

4.63 2,94 m/s^2

4.64

a) 4,1587 m/s

b) 8,3012 N

4.65 a = 1,973 m/s^2

4.66 160,8 N

4.67 10 rad/s

4.68 4 408 N

Unidad 5

5.1 W = 1 471,5 J

5.2 Ep= 9,81 J

5.3 W= 1 716,22 J

5.4 1 732,05 J

5.5 0,19865 J

5.6 17 658 J

5.7

a) W = 7,5 J

b) W= 15 J

c) W = 7,5 J

d) 30 J

5.8 W = 200 J

5.9 W = 2 J

5.10

a) 34,7 J

b) 41,1 J

c) La fuerza no es conservativa

5.11 h = 44,145 m, W = 176,58 J

5.12 El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es: W = −48 J

Sólo realiza trabajo la componente F_X de la fuerza aplicada sobre la caja: W = 433 J

5.13 Em = 446,2 J

5.14 Ec = 397,30 J

5.15

a) P = 2079,72 W

b) r = 74,27%

5.16

a) 813,5 J

b) 31 191 J

5.17 $Ec = 1{,}929 \times 10^5$ J

5.18

a) v_f = 16 m/s

b) W = 2646 J

5.19

a) Ec_i = 203125 J

b) Ec_f =62793,3 J

c) W = 140331 J

5.20 E_p = 48461 J

5.21 h = 2,5 m

5.22 h = 31,7 m

5.23 v = 435,9 m/s

5.24

a) W = 2 000 J υ = 44,7 m/s

b) W = −2 500 J υ = 0 m/s

c) W = 8 000 J υ = 161,25 m/s

5.25 214,76 W

5.26 v= 1,25 m/s

5.27

a) 44,29 m/s (no hay fricción)

b) 34,3 m/s

c) 19,01 m/s

5.28

W = 386420 J

P = 48303,5 W

P = 65,7 CV

5.29 E_p = 5 886 J

5.30 E_p = 0,5 J

5.31 v = 14 m/s

5.32

a) WF_e = 31,9 N

b) WF_n = 0 N

c) WF_g = 0; es cero porque el ángulo entre la fuerza de gravedad y el desplazamiento es de 90°.

d) W_T = 31,9 N

5.33 h= 20,4 m

5.34 W_g = 0,33 J y el valor de la energía disipada es de 0,33 J ya que la energía cinética permanece constante, durante la caída todo el trabajo se convierte en calor.

5.35 x = 26 cm

5.36

a) $v = 9{,}89$ m/s

b) $v = 9{,}1$ m/s

5.37 W por una sola levantada = 294,3 J; por 20 levantadas el trabajo es de 5 886 J.

5.38 Ec = 173 611 J

5.39 $h = 58{,}3$ m

5.40 $m = 4$ kg

5.41

a) 5 000 J

b) 510 m

c) −5 000 J y 5 000 J

5.42

a) $W = 294300$ J

b) $E_p = 294300$ J

5.43 $P = 13{,}72$ W

5.44

a) $T = 79{,}49$ N

b) $W = 1\,493{,}9$ J

c) La energía perdida es de 1 493,9 J

5.45

a) $Ep = 78\,480$J

b) $E_c = 78\,400$ J

c) $v = 15{,}9$ m/s

d) 7 848 N.

5.46 v=0,52 m/s

5.47 W= 63890,84 J

5.48

a) k= F/D

b) W= 1/2kD^2

5.49 208,7 kJ

5.50 $T = 1{,}4715$ N

5.51

a) 1 200 J

b) −200 J

c) −590,37 J

d) 4 m/s

e) $Ec_i = 9$ J $Ec_f = 400{,}63$ J

5.52 0,0886 m

5.53

a) $Ep_i = 0$ J $Ep_f = 22{,}07$ J

b) $Ec_i = 33{,}06$ J $Ec_f = 0$ J

c) $v = 7{,}67$ m/s

5.54 14,161 m

5.55

a) 16 J

b) $\alpha_{máx} = 35{,}4°$

c) −0,0245 J

5.56

a) $v_{David} = 2{,}414$ m/s

b) $v_{Jonathan} = 4{,}828$ m/s

5.57 El niño deja de tener contacto cuando $\theta = 48{,}19°$

5.58 $W = 3{,}5358$ N

5.59 $W = -2{,}25$ J

5.60 v= 0 m/s

5.61

a) 11,29 W

b) 1 286,25 J

c) 8,46W

d) 874,65 J

5.62

a) 14 161 J

b) 14 161 J

c) 833N

d) 833 N

e) 0,354 m/s

5.63 11,804 J

5.64

a) 242, 84 N

b) 0,77778 m/s

5.65 W = 93,1 J

5.66

a) 2 610 W

b) $7{,}8299 \times 10^5$ J

c) $3{,}6281 \times 10^{-8}$ J

5.67

a) 3 528 J

b) 1 896,3 J

W $= -\Delta E_p = 2\,712{,}2$ J

5.68 18 620 J, 2 051 942 760 J

5.69 485,1 J; 1 034,9 J

Unidad 6

6.1 30 000 kg · m/s

6.2 144 km/h

6.3 $F = -2433{,}4$ N

6.4 $a = 4$ m/s^2 y 0,4 kg · m/s

6.5 2,41 m/s

6.6 $v = 2{,}86$ m/s

6.7

a) $-2{,}7$ kg · m/s

b) 2,4 kg · m/s

c) 5,1 kg · m/s

6.8 16,48 m/s

6.9

a) 6 kg · m/s

b) 300 N

6.10

a) 4,8 m/s, 6,8 m/s

b) 0 m/s, 10 m/s

6.11

a) 1,25 m/s

b) $-0{,}54$ m/s

c) 0,68302 m/s

d) 0,026 m

6.12

a) 5 m/s

b) 0,083 m/s

6.13

a) $V_{2f} = 3{,}5$ m/s

b) $\Delta EC = -10{,}5$ J (el sistema pierde 10,5 J)

c) $e = 0{,}75$

6.14

$V_{1f} = -1{,}2$ m/s

$V_{2f} = 0{,}8$ m/s

6.15

a) $V_{1i} = 9{,}63$ m/s

b) $\Delta EC = -31{,}4$ J

6.16

$V_{1f} = 12{,}6886$ m/s

$V_{2f} = 5{,}9162$ m/s

6.17

$h = 0{,}5556$ m

6.18 v = 14,042 m/s

6.19

a) $m = 0{,}110$ kg

b) $v_{2f} = 1{,}876$ m/s

6.20 24,281 m/s

6.21

$v_{1f} = 0{,}997$ m/s

$v_{2f} = 4{,}897$ m/s

6.22 $\theta = 26{,}6°$

6.23 -10 m/s

6.24 8,8 m/s

6.25

a) 9 m/s

b) 15 J

6.26

a) -1 m/s

b) 60 J

c) se perdió el 11,11%

6.27 $E_f / E_i = 8{,}9451 \times 10^{-2}$

6.28

a) $-12{,}87$ N s

b) $-514{,}8$ N

6.29

a) 22,5 kg m/s

b) 22,5 kg m/s

c) 6,7499 m/s, $-6{,}2501$ m/s

6.30 $v_{bala} = 262{,}60$ m/s; $P_f = 11{,}029$ kg m/s

6.31 625 N

6.32 $-5{,}05$ m/s

6.33 (0, 4,3636 m, 0)

6.34

a) 0,5 m

b) 0,571 m

6.35 $x = 0{,}56$ m, $y = z = 0$

6.36 86,803 m/s

6.37 (−1,66, −1,4)

6.38 3,83 m

6.39 $P_1 = 102\,000$ kg km/h; $P_2 = 150\,000$ kg km/h; $x_{cm} = 18{,}11$ km; $v_{cm} = 136{,}22$ km/h

6.40 Es la misma velocidad del problema anterior

6.41 0,8833 m

6.42 −0,56604 m/s

6.43 $5{,}4486 \times 10^{-4}$

6.44 (0,0)

6.46 (0, 1,2732) cm

6.47 (−1,2732, 1,2732) cm

6.48 (1,2732, −1,2732) cm

6.49 (0, 0) cm

6.50 (0, 0) cm

6.51 37,55 millas/hora

6.52 $v_0 = 2{,}214$ m/s; $v_f = 0{,}4077$ m/s

6.53 $v_1 = 2{,}711$ m/s; $v_2 = 2{,}4897$ m/s; $v_{2f} = 5{,}4222$ m/s

6.54 $v_i = 40{,}125$ m/s

Unidad 7

7.1 48 N, 64 N

7.2 170,13 N, 137,64 N,100 N

7.3 250 N m

7.4 280 N m

7.5 0

7.6 207,85 N m

7.7 $\vec{\tau} = -220\ \text{Nm}\hat{i} + 200\ \text{Nm}\hat{j} + 48\ \text{Nm}\hat{k}$

7.8 10 Nm

7.10 105 N, 495 N

7.11 $A = B = 144{,}5$ N

7.12 $x = 0{,}66$ m

7.13 14,7 N

7.14 $F = 20$ N, $\tau = -0{,}8$ Nm

7.15 0,67 m

7.16 12 Nm

7.17 $I = \dfrac{1}{12}Mb^2$

7.18 $I_x = 3{,}2$ kg m^2, $I_y = 1{,}6$ kg m^2

7.19 $I_x = 0{,}026$ kgm^2, $I_y = 0{,}011$ kgm^2

7.20 −6,5 rad/s^2, 112,2 rev

7.21 $v_{CM} = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + I/MR^2}}$

7.22 $h = 7{,}65$ m

7.23 $h = 10{,}20$ m

7.25 $h = 7{,}1429$ m

7.26 194,16 rad/s

7.27 7,5385 m/s^2

7.28 347,87 Nm

7.29

a) −418,88 N m

b) 872,6 N m

c) 456,91 W

7.30

a) 3,5 m/s^2

b) 23,33 rad/s^2

c) 0,7 N

d) 4,18 m/s, 27,88 rad/s

7.31 20,25 J

7.32 3,08 m/s

7.33 2,98 m/s

7.34 0,993 rad/s

7.35

a) 9 kg m^2

b) $-4t/9$

c) $100 - 4t^2/9$

d) 28 rad/s

e) $100t - 4t^3/27$

f) 900 kg m^2/s

g) 252 kg m^2/s

7.36 Aro: 15,65 m/s; disco: 18,07 m/s; esfera: 18,70 m/s

7.38 418,8 kg m^2/s

7.41 25 kg m^2

7.42 11,304 N

7.43 1000,2 m/s

7.44 29 días

7.45 0,907 g

7.46 El periodo de rotación del planeta Beta es de 3,3 años

7.47

a) 5 600 m/s

b) 3,97 h

c) 740 N

7.48 $1{,}99 \times 10^{30}$ kg

7.49 1 kg

7.50 $P_T = 278{,}85\ P_O$, la masa es la misma.

Clasificación periódica

Problema resuelto

En la fabricación de materiales para la electrónica se utiliza la combinación de un elemento del grupo 13 con un elemento de la familia 15, ¿cuál opción menciona estos elementos?

a) Y y As
b) Ga y As
c) Sc y V
d) Al y Ga

Respuesta

b) El galio pertenece a la familia 13 y el arsénico a la 15.

Problema resuelto

La combinación del aluminio y el oxígeno forma el óxido Al_2O_3. ¿Cuál de los siguientes elementos formaría un compuesto con el mismo tipo general de fórmula X_2O_3?

a) C
b) Ar
c) B
d) Zn

Respuesta

c) El boro (B) pertenece a la misma familia que el aluminio, por lo que su comportamiento es similar.

Problema resuelto

Escribe el símbolo del elemento que corresponda a la descripción. El de mayor número atómico y el de menor número atómico.

Descripción	Mayor número atómico	Menor número atómico
Metal alcalino		
Halógeno		
Metal alcalinotérreo		
Lantánido		
Elemento del grupo 14		
Elemento de transición del 4° periodo		
Gas noble		

Respuesta

Descripción	Mayor número atómico	Menor número atómico
Metal alcalino	Fr (Z = 87)	Litio (Z = 3)
Halógeno	At (Z = 85)	F (Z = 9)
Metal alcalinotérreo	Ra (Z = 88)	Be (Z = 4)
Lantánido	Lu (Z = 71)	La (Z = 57)
Elemento del grupo 14	Pb (Z = 82)	C (Z = 6)
Elemento de transición del 4° periodo	Zn (Z = 30)	Sc (Z = 21)
Gas noble	Rn (Z = 86)	He (Z = 2)

Problema resuelto

¿Cuál de las siguientes opciones presenta menor número de protones que de electrones?

a) $^{33}_{13}D^{+}$
b) $^{26}_{13}D$
c) $^{30}_{13}D^{2+}$
d) $^{26}_{13}D^{3-}$

Respuesta

La opción correcta es d) porque tiene 13 protones (número atómico) y 16 electrones, el superíndice 3− indica que ganó tres electrones, por tanto el resultado es 16 electrones.

Problema resuelto

Completa la información que falta en el siguiente cuadro:

Partícula*	Número atómico	Número de masa	Número de protones	Número de neutrones	Número de electrones
$^{14}_{7}N^{3+}$		14	7		
$^{19}_{9}F^{-}$			9	10	
$^{28}_{14}Si$	14			14	
$^{32}_{16}S^{2-}$	16	32			
$^{52}_{24}Cr^{3+}$		52	24		

*El término partícula se utiliza en este problema para designar diferentes entidades elementales: átomos, moléculas, iones, etcétera.

Respuesta

Partícula*	Número atómico	Número de masa	Número de protones	Número de neutrones	Número de electrones
$^{14}_{7}N^{3+}$	7	14	7	7	4
$^{19}_{9}F^{-}$	9	19	9	10	10
$^{28}_{14}Si$	14	28	14	14	14
$^{32}_{16}S^{2-}$	16	32	16	16	18
$^{52}_{24}Cr^{3+}$	24	52	24	28	21

Problema resuelto

Identifica las partículas que pertenecen a los isótopos que se presentan en la tabla siguiente:

Isótopo	Protones	Neutrones	Electrones	Partícula
Q	9	10	10	
W	16	14	18	
X	13	14	10	

Respuesta

Isótopo	Protones	Neutrones	Electrones	Partícula
Q	9	10	10	F^{-}
W	16	14	18	S^{2-}
X	13	14	10	Al^{3+}

Problema resuelto

El cloro está formado por dos isótopos: 75.5% de ^{35}Cl y 24.5% de ^{37}Cl. Las masas de los núclidos son 34.969 uma y 36.966 uma, respectivamente. ¿Cuál es la masa relativa del cloro?

Respuesta

Se multiplica la masa de cada isótopo por el % de abundancia y se suman los resultados:

$$(34.969 \text{ uma})\,(75.5/100) + (36.966 \text{ uma})\,(24.5/100) = 35.46 \text{ uma}.$$

Alerta

No olvides las diferencias que existen entre átomo neutro, anión y catión.

Problema resuelto

Observa los datos de la tabla y con base en ellos responde: ¿cuáles núcleos son isótopos de un elemento químico? y, ¿cuáles núcleos tienen la misma masa?

Núcleo	Protones	Neutrones
O	11	13
P	12	12
Q	12	13

Respuesta

P y Q son isótopos del magnesio y O y P tienen la misma masa.

Problema resuelto

Selecciona las configuraciones electrónicas que representen a los elementos que pertenecen a la misma familia química.

a) [He] $2s^1$
b) He] $2s^2\ 2p^4$
c) [He] $2s^2\ 2p^2$
d) [Ne] $3s^2\ 3p^4$
e) [Ne] $3s^1$
f) [Ne] $3s^2\ 3p^6\ 4s^2$
g) [Ne] $3s^2\ 3p^6\ 4s^1$
h) [Ne] $3s^2\ 3p^6\ 4s^2\ 3d^1$

Respuesta

Son las configuraciones que presentan los incisos b y d, ya que ambas poseen cuatro electrones en el orbital *p*, así como las configuraciones de los incisos a y e, pues ambos tienen un electrón en el orbital *s*.

Problema resuelto

Escribe la configuración electrónica de los iones que forman la familia de los metales alcalinotérreos utilizando el kernel.

Respuesta

Elemento	Número atómico (Z)	Configuración con kernel
Be^{2+}	4	[He]
Mg^{2+}	12	[Ne]
Ca^{2+}	20	[Ar]
Sr^{2+}	38	[Kr]
Ba^{2+}	56	[Xe]
Ra^{2+}	88	[Rn]

Problema resuelto

Escribe la configuración electrónica de los iones que forman la familia de los halógenos utilizando el kernel.

Respuesta

Elemento	Número atómico (Z)	Configuración con kernel
F^-	9	[He] $2s^2\ 2p^6$ o [Ne]
Cl^-	17	[Ne] $3s^2 3p^6$ o [Ar]
Br^-	35	[Ar] $4s^2\ 3d^{10} 4p^6$ o [Kr]
I^-	53	[Kr] $5s^2\ 4d^{10}\ 5p^6$ o [Xe]
At^-	85	[Xe] $6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^6$ o [Rn]

Los halógenos tienden a ganar un electrón para alcanzar la configuración del gas noble que termina el periodo en el que se encuentran y lograr mayor estabilidad.

Problema resuelto

Al cobre, plata y oro se les llama elementos de acuñar debido a que se les utiliza en la fabricación de monedas. Indica a qué familia pertenecen, en cuál periodo se encuentran y qué bloque ocupan.

Respuesta

Cu pertenece a la familia 11, periodo 4, bloque *d*.
Ag pertenece a la familia 11, periodo 5, bloque *d*.
Au pertenece a la familia 11, periodo 6, bloque *d*.

Problema resuelto

En el grupo de los no metales varios elementos se encuentran en estado sólido, otros se presentan en estado gaseoso y uno en estado líquido a temperatura ambiente. Consulta las propiedades periódicas y completa la tabla con dicha información.

No metales	Elementos
Estado sólido	
Estado líquido	
Estado gaseoso	

Respuesta

No metales	Elementos
Estado sólido	Carbono, fósforo, azufre, cloro
Estado líquido	Bromo
Estado gaseoso	Nitrógeno, oxígeno, flúor, yodo

Problema resuelto

¿Cuál de las siguientes configuraciones electrónicas representa al elemento con la mayor energía de ionización?

a) [Ar] $4s^2\,4p^2$
b) [Ar] $4s^2\,3d^{10}\,4p^3$
c) [Ar] $4s^2\,3d^{10}\,4p^5$
d) [Ar] $4s^2\,3d^{10}\,4p^6$

Respuesta

El c) corresponde al Br con un valor de 1140 kJ/mol y el d) corresponde al Kr con un valor de 1352 kJ/mol; por lo tanto, debe aparecer la opción d), independientemente de la estabilidad de sus compuestos, puesto que sólo se refiere a comparar los valores de la energía de ionización. Es conveniente aclarar que los únicos dos gases nobles que se han logrado hacer reaccionar son el kriptón y el xenón. No obstante, los pocos compuestos obtenidos son sumamente inestables.

Problema resuelto

La energía necesaria para "arrancar" el electrón más externo a cada una de las siguientes partículas B, B^+ y B^{2+} presenta los siguientes valores: EI_1 = 800 kJ/mol; EI_2 = 2430 kJ/mol y EI_3 = 3660 kJ/mol. ¿A qué se debe este aumento de energía?

Respuesta

Cada vez se requiere más energía para eliminar el siguiente electrón porque el primer electrón se elimina del átomo neutro (B = [He] $2s^2\,2p^1$). Para eliminar el segundo electrón la energía requerida es más alta porque es un ion positivo, con los electrones más fuertemente unidos al núcleo (B^+ = [He] $2s^2$). Y la tercera energía es mucho más alta porque la atracción de los protones por el último electrón es mucho mayor (B^{2+} = [He] $2s^1$).

$$B\,(g) + \text{energía} \rightarrow B^+\,(g) + 1e^- \qquad EI_1 = 800\ \text{kJ/mol}$$

$$B^+\,(g) + \text{energía} \rightarrow B^{2+}\,(g) + 1e^- \qquad EI_2 = 2430\ \text{kJ/mol}$$

$$B^{2+}\,(g) + \text{energía} \rightarrow B^{3+}\,(g) + 1e^- \qquad EI_3 = 3660\ \text{kJ/mol}$$

Problema resuelto

¿Cuál de los siguientes átomos tiene el mayor radio?

a) P
b) S
c) O
d) Mg

Respuesta

El magnesio (Mg). Recordemos que el radio disminuye de metales a no metales al aumentar la carga nuclear en el mismo periodo.

El lenguaje científico

Características del lenguaje científico

Podemos comunicarnos y aprender gracias al lenguaje que crea el conocimiento escrito que necesitamos para desenvolvernos en cada momento de nuestra vida. El lenguaje hace que el conocimiento, que es consecuencia de haber obtenido determinados datos e información, se puedan discutir y difundir, contribuyendo a la construcción de nuevo conocimiento.

Por eso podemos decir que el lenguaje es fundamental también en ciencias, no sólo como un medio para llegar a expresarse "adecuadamente", sino también, como un instrumento para construir y expresar las ideas científicas.

Todo tipo de actividad humana especializada, toda materia y campo de estudio, tiene su propio lenguaje. El lenguaje de la ciencia es especial, no sólo por su contenido temático sino por su particular "estilo" especial. El lenguaje es un instrumento útil para crear tanto conocimiento científico como literario. La enseñanza de la química universitaria, dirigida tanto a los futuros estudiantes de química como a aquellos que no van a serlo, debe mostrar que tiene una dimensión lingüística, porque la ciencia ha de poderse comunicar para poder enseñarse (Izquierdo, 2006).

El lenguaje químico es específico, ya que cada símbolo encierra un número elevado de significados, no sólo da nombres a las transformaciones de la materia a nivel macro y microscópico, sino que los registra, codifica y convierte en elementos de pensamiento y comunicación. Es necesario aceptar que hay muchas maneras de "hablar química", ya que lo importante es hacernos comprender.

Algo para recordar: la alquimia

La terminología que emplean los químicos en la actualidad contiene referencias a diversos momentos de la historia de la ciencia.

El estudio de los orígenes del vocabulario químico ha permitido identificar las principales razones por las que la terminología química presenta problemas como la sinonimia[1] o la polisemia, y aquí hay que destacar el papel fundamental que desempeñó la alquimia, cuyo inicio formal se sitúa a principios del siglo IV d. C., y que se considera dio origen a la química.

En términos generales puede decirse que la finalidad de la alquimia era el perfeccionamiento de la materia, un proceso que se creía, ocurría en la Naturaleza, razón por la cual los alquimistas vieron su tarea como la imitación de la naturaleza dentro de las paredes del laboratorio. El conocimiento de la alquimia no estaba destinado al lector eventual u ordinario, es más, el objetivo era desalentarlo mediante "el principio de dispersión", para ocultar con un velo de misterio el conocimiento.

Antes de que se introdujera la moderna notación química, fueron empleados un gran número de signos para representar las sustancias y los procesos experimentales, muchos de ellos procedentes de la alquimia. El simbolismo alquímico era fundamentalmente alegórico e incluía relaciones que no siempre eran fáciles de adivinar incluso los propios adeptos podían efectuar diferentes interpretaciones de un mismo símbolo. La existencia de diversos criterios para nombrar las sustancias provocó la aparición de diferentes nombres para designar una misma sustancia.

[1] Sinonimia: fenómeno lingüístico en que dos o más términos tienen igual significado. Polisemia: Pluralidad de significados de una palabra o de cualquier signo lingüístico.

El lenguaje científico

A medida que la química se consolidaba como disciplina y la comunicación científica se hacía más intensa, fue necesario alcanzar diversos consensos con respecto al uso de la terminología química para eliminar las confusiones ocasionadas por el lenguaje oscuro heredado de los alquimistas. En 1787 un grupo de químicos franceses, encabezados por Lavoisier, dieron un gran paso adelante al publicar el Méthode de nomenclatura chimique y mostrar que era posible nombrar a los compuestos en forma sistemática de acuerdo a sus constituyentes. Se dejó claro que "en la ciencia se espera que el lenguaje se use de manera precisa y no figurativa".

El número de compuestos químicos –y por lo tanto, de términos empleados para nombrarlos– ha pasado de varias decenas de miles a mediados del siglo pasado a algo más de una decena de millones en la actualidad. Tal proliferación de sustancias ha ido acompañada de la aparición de numerosos métodos y reglas de nomenclatura, en especial, adaptados a los diferentes tipos de compuestos, hasta llegar en 1921 al diseño de un nuevo esquema que al final fue aprobado por la Comisión de Nomenclatura Inorgánica dependiente del organismo internacional denominado Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (IUPAC), que está encargada de los aspectos de la normalización de los nombres, símbolos y nomenclatura de los compuestos químicos y cuya publicación en ediciones es periódica (IUPAC, 1971). Es importante señalar que el objetivo de la IUPAC no es didáctico sino hacer posible la comunicación entre autores, uniformar la designación de compuestos y dar normas claras para nombrar los compuesto nuevos (Casassas, 1998).

Principales gases contaminantes en el Valle de México

La contaminación del aire es un problema que a todos nos concierne. Una persona en reposo respira aproximadamente 22 mil veces al día, lo que corresponde a un consumo diario casi 11 mil litros de aire. Cuando se realiza ejercicio el consumo puede aumentar hasta 25 o 30 veces.

Al respirar se inhala aire pero también los contaminantes que contiene. A continuación abordaremos los principales contaminantes gaseosos de las áreas urbanas.

Los gases contaminantes son, por lo general, más pesados que el aire y tienden a acumularse al nivel del suelo. En las zonas urbanas se encuentran con mayor frecuencia los siguientes gases:

Hidrocarburos (H_XC_X).

Monóxido de carbono (CO).

Óxidos de nitrógeno (NO_X).

Dióxido de azufre (SO_2).

Estos contaminantes son clasificados como primarios. En la atmósfera reaccionan entre sí y con ayuda del efecto de la luz solar forman los contaminantes secundarios que, por lo general, son más nocivos. Uno de éstos es el ozono (O3).

¿Qué propiedades tienen? y ¿cuáles son los efectos nocivos que ocasionan esos gases?

Los **hidrocarburos (H_XC_X),** que constituyen los derivados del petróleo como las gasolinas, diesel, combustóleo y el gas licuado son consumidos, en gran parte por diversos medios de transporte quienes contribuyen a la contaminación del aire.

Los hidrocarburos son gases incoloros, en general más pesados que el aire. Provienen de la evaporación directa y de la combustión incompleta de los motores de combustión interna. Algunos de esos compuestos son cancerígenos.

El **monóxido de carbono (CO)** también es emitido por los motores de combustión interna. Es un gas incoloro, prácticamente sin olor y es un poco más ligero que el aire. Es muy tóxico si se inhala y disminuye la capacidad de oxigenación de la sangre. La intoxicación con este gas varía desde dolor de cabeza, mareos o desmayos y puede ocasionar, en altas concentraciones, la muerte.

Los **óxidos de nitrógeno (NO y NO_2)** son más pesados que el aire y se producen cuando la combustión se lleva a cabo a altas temperaturas. Se emiten en centrales termoeléctricas, refinerías y otras industrias.

El monóxido **(NO)** es un gas incoloro que reacciona rápidamente con el oxígeno del aire y forma el dióxido **(NO_2),** el monóxido provoca irritación de la piel y de las membranas mucosas.

El dióxido de nitrógeno es un gas de color café rojizo. Provoca, dependiendo de su concentración, fatiga, tos, dificultad para respirar, bronquitis y neumonía.

El **dióxido de azufre (SO_2)** es un gas incoloro, más pesado que el aire y de olor sofocante que se emite en la combustión de combustibles fósiles. En presencia de humedad y aire, forma los ácidos sulfuroso y sulfúrico componentes de la lluvia ácida (agua de lluvia que tiene un pH menor a 5.6). Ocasiona irritación de los ojos y aparato respiratorio, dificultad para respirar y edema pulmonar.

El **ozono (O_3)** es un gas más pesado que el aire, de color ligeramente azul. Causa irritación severa en los ojos y en el aparato respiratorio.

Inversión térmica

La concentración de los contaminantes en la atmósfera depende de la velocidad con que los vientos los dispersen, ésta se dificulta en invierno. La inversión térmica es un fenómeno natural que se genera donde el cielo está despejado durante el día con gran radiación solar y las noches son claras. La Tierra, que acumula en el día calor, emite durante la noche, una radiación térmica que se puede considerar como un indicador en el espacio. Parte de esa radiación es absorbida por la atmósfera y los contaminantes presentes, elevando su temperatura.

En una situación normal, la temperatura de la atmósfera disminuye con el aumento de altura sobre el suelo. En el caso de la inversión térmica la temperatura aumenta.

Durante dicho suceso no hay convección de aire y se disminuye considerablemente la dispersión de los contaminantes. Si durante este fenómeno se siguen emitiendo contaminantes su concentración podrá aumentar peligrosamente.

La inversión desaparece cuando recibe radiación solar, sin embargo, a partir de ese momento se empiezan a producir las reacciones fotoquímicas y con ello la generación de ozono.

Para mejorar esta situación se recomienda modificar las condiciones de humedad en el Valle de México; en las regiones lacustres no se presenta el fenómeno de inversión térmica porque el vapor de agua es más ligero que el aire y tiende a ascender, lo que genera la convección. La recuperación de lagos, espejos de agua y la reforestación ayudarían en este sentido. Con respecto a los vehículos automotores se debe insistir en mejorar los combustibles.

Termodinámica

Problema resuelto

Se tiene un sistema hipotético de 10 partículas cuyas velocidades son 1 m/s, 2 m/s, 3 m/s y así sucesivamente. ¿Cuál será la distribución de velocidades? y ¿cómo se esperaría que fuera la velocidad promedio del gas?

Respuesta

Se sustituyen todos los valores en la ecuación 7.22 del libro y se resuelve para cada caso. Los diez resultados se colocan en una gráfica de probabilidad ante velocidad y se obtiene el siguiente perfil:

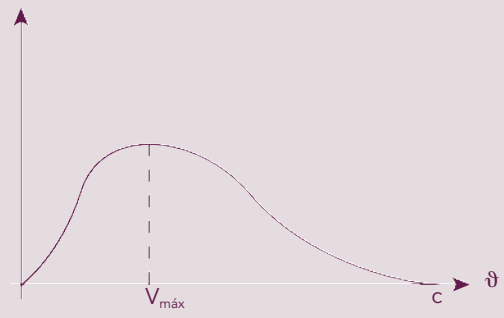


Figura 7.A

El valor que se esperaría para la velocidad promedio sería el del máximo en la curva de distribución.

Problema resuelto

Encuentra la trayectoria libre media de los electrones que pasan por un alambre de cobre si τ (tiempo promedio entre dos choques) es 2.5×10^{-14} y la velocidad de los electrones es 1.6×10^{6} m/s.

Respuesta

Considerando que los electrones dentro del alambre tienen un patrón de movimiento similar al del modelo de gases de Maxwell, la trayectoria libre media se define como la distancia promedio recorrida entre dos colisiones.

$$\lambda = r/Z \qquad (7.1)$$

donde r es la distancia recorrida y Z es el número de colisiones. Sin embargo, según la física clásica $r = v/t$, al sustituir este valor en la ecuación anterior y considerando que $Z = 1$.

$$\lambda = 4 \times 10^{-8} \text{ m}$$

Problema resuelto

Un gas se encuentra confinado en un contenedor de 15 L a una presión de 5 atm. Esta misma muestra de gas se comprime hasta alcanzar 0.5 L. ¿Cuál es la presión final de la muestra de gas?

Respuesta

La ecuación 7.24 (ver libro) nos sugiere que la relación entre volumen y presión de un gas siempre es la misma constante, de este modo para la misma muestra en dos estados diferentes:

$$P_iV_i = k$$

$$P_fV_f = k$$

Al igualar ambas expresiones.

$$P_iV_i = P_fV_f$$

Y al despejar P_f

$$P_iV_i/V_f = P_f$$

Al sustituir datos:

$$P_f = 150 \text{ atm}$$

Problema resuelto

Se tiene un gas cuyas condiciones iniciales son P_1=15 atm, T_1 = 300 K, V_1 = 25 L. El gas disminuye su presión a P_2 = 1 atm y T_2 = 273 K, ¿cuál será su nuevo volumen?

Respuesta

Al sustituir los datos anteriores en la ecuación 7.29 del texto se tiene:

$$V_2 = 341 \text{ L}$$

Problema resuelto

Calcula la densidad de una muestra de kriptón que se encuentra a 200 K, y sometida a 1.5 atm de presión.

Respuesta

En primer lugar se debe involucrar el término de densidad en la ley de los gases ideales. Para ello se recurre a la definición de número de moles n = m/M, o sea que el número de moles es igual a la masa de la muestra entre su peso molecular. Sustituyendo este cociente en vez de n en la ecuación 7.15 (ver libro) se obtiene.

$$PV = (m/M)RT \qquad (7.2)$$

Al considerar la definición de densidad como $r = m/V$, entonces:

$$r = PM/RT \qquad (7.3)$$

y al sustituir los datos:

$$r = 7.66 \text{ g/L}$$

Problema resuelto

175.0 g de un gas confinados en un recipiente de 7 L ejercen una presión de 3.5 atm a una temperatura de 300 K. ¿Cuál es el peso molecular de dicho gas?

Respuesta

Al despejar la ecuación 7.31 del texto para M se obtiene:

$$M = m(RT/PV)$$

y al sustituir datos:

$$M = 175.7 \text{ uma (unidad de masa atómica)}$$

Problema resuelto

A 0 °C y presión de 100 atm el factor de compresibilidad del O_2 es de 0.927. Calcula la masa de O_2 necesaria para llenar un cilindro de gas de 100 L bajo estas condiciones.

Respuesta

$$z = \frac{PV}{nRT} = \frac{PVM}{mRT} \qquad (7.4)$$

Donde m y M representan la masa y la masa molecular del gas, respectivamente.
Se tienen los siguientes valores para las variables:

a) $T = 0\ °C = 273$ K
b) $Z = 0.927$
c) $M = 32$ g/mol

$P = 100$ atm
$V = 100$ L
$R = 0.082$ (atm·L)/(K·mol)

Se desea la masa de gas necesaria para llenar el cilindro, por tanto se despeja m de la ecuación 7.4.

$$m = \frac{PVM}{ZRT}$$

Al sustituir los valores anteriores en esta ecuación:

$$m = 15\,420 \text{ g}$$

07_PROBLEMARIO QUIMICA_CH07 CD.indd 3 10/27/10 12:35:06 PM

Problema resuelto

Calcula los coeficientes de la ecuación virial para un mol de gas utilizando la ecuación de van der Waals.

Respuesta

La ecuación 7.34 (ver texto) es una ecuación cúbica que se puede expresar de la siguiente manera:

$$PV = (RT + bP) - \frac{a}{V} + (ab)\left(\frac{1}{V^2}\right) \tag{7.5}$$

Vamos a considerar que el término bP tiene un comportamiento cuasi ideal, entonces se puede reemplazar por:

$$b\left(\frac{RT}{V}\right) \tag{7.6}$$

y al sustituir en 7.5 se obtiene:

$$PV = (RT) + (bRT - a)\left(\frac{1}{V}\right) + (ab)\left(\frac{1}{V^2}\right) \tag{7.7}$$

Y por analogía con 7.38 (ver texto) nos da:

$$A = RT \quad B = (bRT - a) \quad C = (ab)$$

Sin embargo el problema de la particularización para cada gas persiste. La investigación sobre la naturaleza íntima de la materia ha obligado a buscar diversas alternativas, esto nos lleva al estado crítico.
La ecuación 7.35 del libro es el polinomio de tercer grado que surge de la definición de volumen de van der Waals. Para un solo mol, la ecuación se puede representar como:

$$V^3 - \left(b + \frac{RT}{P}\right)V^2 + \frac{a}{P}V - \frac{ab}{P} = 0 \tag{7.8}$$

Al factorizar esta ecuación se debe llegar a un producto notable del tipo:

$$(V\text{-}V_1)(V\text{-}V_2)(V\text{-}V_3) = 0 \tag{7.9}$$

Donde V_1, V_2 y V_3 son las raíces de la ecuación de tercer grado. Sin embargo, analizando la gráfica en la figura 7.4 del texto, se puede ver que las tres raíces corresponderían a un mismo valor al que se denomina volumen crítico V_c. Entonces la ecuación 7.8 se simplifica y únicamente será $(V\text{-}V_c)^3 = 0$. Ésta se puede desarrollar y se obtiene:

$$V^3 - 3V_cV^2 + 3V_c^2V - V_c^3 = 0 \tag{7.10}$$

Entonces al aplicar la ecuación 7.8 específicamente al punto crítico y comparando término a término con la ecuación 7.9 se obtienen las tres igualdades siguientes:

$$3V_c = b + \frac{RT_c}{P_c}$$

$$3V_c^2 = \frac{a}{P_c}$$

$$V_c^3 = \frac{ab}{P_c} \tag{7.11}$$

Y a partir de ellas se pueden encontrar *Pc*, *Tc*, *Vc*, *a* y *b* por despejes normales.

Problema resuelto

Encuentra los valores de *a*, *b* y *R* considerando el estado crítico.

Respuesta

Despejando de las ecuaciones 7.11 se obtiene:

$$a = 3P_c V_c^2$$

$$b = \frac{ZRT}{P}\frac{V_c}{3}$$

$$R = \frac{8P_c V_c}{3T_c} \qquad (7.12)$$

Problema resuelto

Según la definición de energía de Maxwell (ecuación 7.12 del libro), ¿cuál será la forma más simple de estimar el valor del *Cv*?

Respuesta

Al multiplicar la ecuación 7.12 del texto en ambos miembros por el número de Avogadro se obtiene:

$$U = \frac{3}{2}RT \qquad (7.13)$$

Según la definición de *Cv*, éste es la derivada de la energía respecto a la temperatura a *V* constante, entonces derivando 7.13 respecto a la temperatura obtenemos:

$$Cv = \frac{3}{2}R \qquad (7.14)$$

Éste sería el valor de este coeficiente para un gas formado por masas puntuales y es el valor más simple que se puede obtener.

Problema resuelto

¿Cuál será el valor más simple que puede adquirir el *Cp*?

Respuesta

Como se vio en el problema anterior el valor más simple que tiene el *Cv* para un gas formado por masas puntuales es $\frac{3}{2}R$. Al sustituir este valor en la ecuación 7.74 del libro y despejar *Cp*, se obtiene:

$$Cp = \frac{3}{2}R + R$$

$$Cp = \frac{5}{2}R \qquad (7.15)$$

Problema resuelto

30 kg de CO_2 a la temperatura inicial de 298 K se comprimen adiabáticamente desde 1.00 bar hasta 10.0 bars. Calcula el trabajo de compresión, las variaciones de energía interna, de entalpía y la temperatura final para el CO_2. Considera $\gamma = 1.28$.

Respuesta

Al aplicar las ecuaciones 7.82:

$$P\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) = cte \ldots\ldots T_1 P_1\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) = T_2 P_2\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)$$

$$T_2 = 298K x\left(\frac{1}{10}\right)^{\left(\frac{1-1,28}{1.28}\right)} = 493.1K \ldots \Delta T = 195\ \text{K}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v} \therefore C_v = \frac{R}{\gamma - 1} = 29.7\ \text{J} \bullet \text{mol}$$

$$W = \Delta U = \frac{3 \times 10^4}{44} \times 29.7 \times 195\ \text{J} = 3948,75\ \text{KJ}$$

$$H = U + PV \ldots\ldots \Delta H = \Delta U + \Delta(PV) = \Delta U + nR\Delta T = (3948.75 + 11054.5)\ \text{KJ} = 15003.25\ \text{KJ}$$

Problema resuelto

Una rueda de un automóvil contiene aire a una presión de 320 kPa. Se retira la válvula y se permite que el gas se expanda adiabáticamente contra la presión externa constante de 100 kPa hasta que la presión dentro y fuera de la rueda es la misma. La capacidad calorífica molar del aire es $Cv = 5/2R$. El aire puede considerarse como un gas ideal. Calcula la temperatura final del gas en la rueda, Q, W, ΔU, ΔH por mol de gas en la rueda a 20 °C.

Respuesta

Datos:
$P_i = 320$ kPa
$P_f = 100$ kPa = 0.99 atm
$C_V = 5/2R$
$R = 8.314$ J/kmol
$T_1 = 20$ °C = 293 K
$n = 1$mol (como base de cálculo)

$$320kPa\left|\frac{1000\ \text{Pa}}{1\,\text{kPa}}\right|\left|\frac{9.869\times10^{-6}\,\text{atm}}{1\,\text{Pa}}\right| = 3.15\ \text{atm}$$

$Cp - Cv = R$

$Cp = R + Cv$

$Cp = 8.314 + 20.785$

$Cv = 20.785$

$Cp = 29.099$

$$\alpha = \frac{Cp}{Cv} = 1.4$$

$T_1^{\alpha} P_1^{1-\alpha} = T_2^{\alpha} P_2^{1-\alpha}$

$$T_2^{\alpha} = \frac{T_1^{\alpha} P_1^{1-\alpha}}{P_2^{1-\alpha 1}}$$

$$T_2 = \sqrt[\alpha]{\frac{293^{1.4}(3.15\ \text{atm})^{-0.4}}{0.99^{-0.4}}}$$

$$T_2 = \sqrt[\alpha]{\frac{2841.94(0.995987)}{1.582}}$$

$$T_2 = \sqrt[\alpha]{1789.213}$$

$T_2 = 210.53\ K$

$\Delta V = -W$

$\Delta V = 1714.13\ J$

$Q = 0$

$\Delta H = Cp\Delta T$

$\Delta H = 29.099(210.53 - 293)$

$\Delta H = 29.099(-82.47)$

$\Delta H = -2399.79\ J$

$dV = Cvdt$

$dV = 20.785(-82.47)$

$dV = 1714.13\ J$

Problema resuelto

Una masa de 30 g de N_2 se encuentra a una presión de 4 atm y a una temperatura de 315 K y va a pasar a una presión final de 0.2 atm. Calcula el trabajo si:

a) Se efectúa una expansión isotérmica en una etapa cuando la presión final alcanza el valor de la presión de oposición.

b) El proceso se efectúa en 2 etapas a temperatura constante a una presión intermedia de 2 atm.

c) El proceso se efectúa de manera reversible y cuasi estáticamente a temperatura constante.

Supón que el comportamiento de N_2 es ideal. Realiza un bosquejo de diagrama de presión contra volumen para cada uno de estos tres casos.

Respuesta

a)

m = 30 g de N_2

P_1 = 4 atm

T = 315 K

P_2 = 0.2 atm

$$n_{N_2} = 30\ \text{g}\ N_2 \times \frac{\text{mol}}{28\ \text{g}\ N_2} = 1.07\ \text{moles}$$

proceso de expansión isotérmica W en etapa 1

$$P_2 = P_{op}$$

$$W = -P_{op}\left(V_2 - V_1\right)$$

$$V_1 = \frac{nRT}{P_1}$$

$$V_1 = \frac{(1.07\ \text{moles})\left(0.082\frac{\text{Latm}}{\text{molK}}\right)(315\ \text{K})}{4\ \text{atm}}$$

$$V_1 = 6.91L$$

$$V_2 = \frac{nRT}{P_2}$$

$$V_2 = \frac{(1.07\ \text{moles})\left(0.082\frac{\text{Latm}}{\text{molK}}\right)(315K)}{0.2\ \text{atm}}$$

$$V_2 = 138.2\ \text{L}$$

$$W = -P_{op}\left(V_2 - V_1\right)$$

$$W = -(0.2\ \text{atm})(138.2 - 6.91)\ \text{L}$$

$$W = 26.26\ \text{Latm}$$

$$-26.26\ \text{Latm}\left(\frac{101\ \text{J}}{1\ \text{Latm}}\right) = -2652.26\ \text{J}$$

Respuesta (*continuación*)

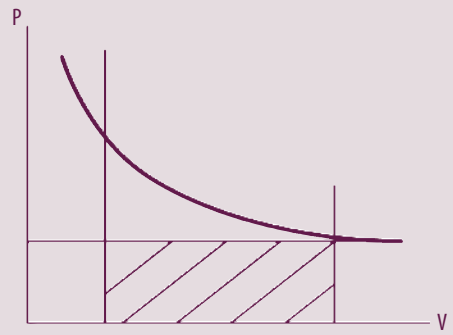


Figura 7.B
Trabajo en una etapa.

b)

W en dos etapas.

n,T = ctes.

T = 315 K

P = 2 atm (presión intermedia)

$$W_1 = -P^1\left(V^1 - V_1\right)$$

$$V^1 = \frac{(1.07 \text{ moles})\left(0.082 \frac{\text{Latm}}{\text{molK}}\right)(315 \text{ K})}{2 \text{ atm}}$$

$$V^1 = 13.81 \text{ L}$$

$$W_1 = -(2 \text{ atm})(13.81 - 6.91) \text{ L}$$

$$W_1 = -13.8 \text{ Latm}$$

$$-13.8 \text{ Latm}\left(\frac{101 \text{ J}}{\text{Latm}}\right) = -1393.8 \text{ J}$$

$$W_2 = -P_2\left(V_2 - V^1\right)$$

$$W_2 = -(0.2 \text{ atm})(138.3 - 13.81) \text{ L}$$

$$W_2 = -24.898 \text{ Latm}$$

$$-24.898 \text{ Latm}\left(\frac{101 \text{ J}}{\text{Latm}}\right) = -2514.7 \text{ J}$$

$$W = \left(-1393.8 + (-2514.7)\right) \text{ J}$$

$$W = -3908.5 \text{ J}$$

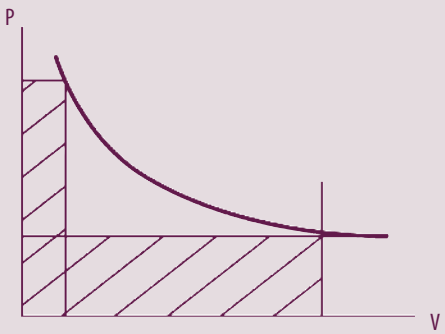


Figura 7.C
Trabajo en dos etapas.

Respuesta (*continuación*)

c) W expansión cuasiestática

$$W = -nRTLn\frac{V_2}{V_1}$$

$n, T = ctes$

$T = 315\ K$

$$W = -(1.07\ moles)(8.314\ J/molK)(315\ K)Ln\left(\frac{138.3\ L}{6.91\ L}\right)$$

$$W = -8396.77\ J$$

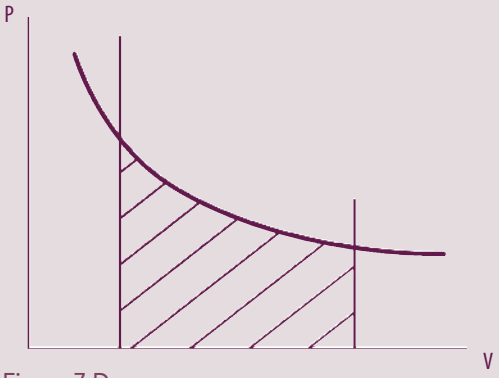


Figura 7.D
Trabajo máximo en proceso reversible.

Problema resuelto

Una masa de 160 g de CH_4 se comprime adiabáticamente desde 0.8 MPa y 800 K hasta 0.1 MPa. Con esa información determina la temperatura final Q, W, ΔU, ΔH si:

a) El proceso se lleva a cabo reversiblemente.
b) El proceso se lleva a cabo de manera no reversible, la presión final es igual a la presión de oposición.

Respuesta

a)

$m = 160 g CH_4$

$n = 10$ moles

$P_1 = 7.89$ atm

$T_1 = 444.82$ K

$P_2 = 0.987$ atm

$T_2 = 280.27$ K

$$\gamma = \frac{9}{7}$$

$$C_{pm} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

Respuesta (*continuación*)

$$0.8\ \text{MPa}\left(\frac{\text{atm}}{0.101325\ \text{MPa}}\right)=7.89\ \text{atm}$$

$$0.1\ \text{MPa}\left(\frac{\text{atm}}{0.101325\ \text{MPa}}\right)=0.987\ \text{atm}$$

$$K=\frac{TR-491}{180}\times 100+273.15$$

$$K=\frac{800-491}{180}\times 100+273.15$$

$$K=444.82$$

$$T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}=T_1^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\left(\frac{P_1}{P_2}\right);T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}=\left(444.82\ \text{K}\right)^{\frac{\frac{9}{7}}{1-\frac{9}{7}}}\left(\frac{7.89\ \text{atm}}{0.987\ \text{atm}}\right)$$

$$T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}=9.6813\left(10^{-12}\right)\text{K}$$

$$T_2^{\frac{\frac{9}{7}}{1-\frac{9}{7}}}=9.6813\left(10^{-12}\right)\text{K}$$

$$T_2^{-\frac{9}{2}}=9.6813\left(10^{-12}\right)\text{K}$$

$$T_2=\sqrt[9]{\frac{1}{\left(9.6813\times 10^{-12}\text{K}\right)^2}}$$

$$T_2=280.27\ \text{K}$$

$$W=\frac{nR\left(T_2-T_1\right)}{\gamma-1}$$

$$W=\frac{\left(10\ \text{moles}\right)\left(8.314\ {}^{\text{J}}\!/_{\text{molK}}\right)\left(280.27-444.82\right)\text{K}}{\frac{9}{7}-1}$$

$$W=-47882.40\ \text{J}$$

$$Q=O$$

$$\Delta U=Q+W$$

$$\Delta U=O+\left(-47882.40\ \text{J}\right)$$

$$\Delta U=-47882.40\ \text{J}$$

$$\Delta H=nCp,m\left(T_2-T_1\right)$$

$$\Delta H=\left(10\ \text{moles}\right)\left(\frac{9}{2}\right)\left(8.314\ {}^{\text{J}}\!/_{\text{molK}}\right)\left(280.27-444.82\right)\text{K}$$

$$\Delta H=61563.1\ \text{J}$$

Respuesta (*continuación*)

b)

$Q = O$

$\Delta U = W$

$\Delta H = ?$

$$T_2 = \frac{\left[T_1\left(nC_V mnR\frac{P_{op}}{P_1}\right)\right]}{\left[nC_V m + nR\left(\frac{P_{op}}{P_2}\right)\right]}$$

$$T_2 = \frac{\left(444.82\text{ K}\right)\left(10\text{ moles}\right)\left(\frac{9}{2}\right)\left(8.314\ {}^{\text{J}}/_{\text{molK}}\right)\left(\frac{0.987\text{ atm}}{7.89\text{ atm}}\right)}{\left(10\text{ moles}\right)\left(\frac{9}{2}\right)\left(8.314\ {}^{\text{J}}/_{\text{molK}}\right)+\left(10\text{ moles}\right)\left(8.314\ {}^{\text{J}}/_{\text{molK}}\right)\left(\frac{0.987\text{ atm}}{7.89\text{ atm}}\right)}$$

$T_2 = 358.34\text{ K}$

$W = nR\left(T_2 - T_1\right)$

$W = \left(10\text{ moles}\right)\left(8.314\ {}^{\text{J}}/_{\text{molK}}\right)\left(358.34 - 444.82\right)\text{ K}$

$W = -7189.95\text{ J}$

$Q = O$

$\Delta U = Q + W$

$\Delta U = O + \left(-7189.95\text{ J}\right)$

$\Delta U = -7189.95\text{ J}$

$\Delta H = nC_p m\left(T_2 - T_1\right)$

$\Delta H = \left(10\text{ moles}\right)\left(\frac{9}{2}\right)\left(8.314\ {}^{\text{J}}/_{\text{molK}}\right)\left(358.34 - 444.82\right)\text{ K}$

$\Delta H = -32354.76\text{ J}$

Problema resuelto

La capacidad calorífica molar del oxígeno a presión constante para temperaturas en el intervalo comprendido entre 300 y 400 K y para bajas o moderadas presiones se puede aproximar como $Cpm = a + bT$, donde $a = 6.15$ cal mol $^{-1}$ K $^{-1}$ y $b = 0.00310$ cal mol $^{-1}$ K $^{-2}$. Calcula Q, W, ΔU, ΔH cuando 2.00 moles de O_2 se calientan reversiblemente de 58 a 158 °C a una presión constante de 100 atm. Supón que el gas se comporta como un gas ideal.

Respuesta

$$dQ_p = C_p dT \cdots \int_1^2 C_p\, dT = \int_1^2 n(a+b)\,dt = n\left[a(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}b(T_2^2 T_1^2)\right]$$

$$\therefore Q = (2.00\text{ mol})\left(6.15\ {}^{\text{cal}}/_{\text{molK}}\right)(100\text{ K}) + \frac{1}{2}\left(0.00310\ {}^{\text{cal}}/_{\text{molK}^2}\right)(400^2 - 300^2)\text{ K}^2$$

$Q = 1447\text{ cal}$

$W = \int_1^2 P\,dv = -P\Delta V = -nR\Delta T = -(2.00\text{ mol})(1987\ {}^{\text{cal}}/_{\text{molK}})(100) = -397\text{ cal}$

$\Delta U = Q - W = 1447\text{ cal} - 397\text{ cal} = 1050\text{ cal}$

$\Delta H = Q_f = -1447\text{ cal}$

Problema resuelto

Un cilindro provisto de pistón contiene 1 m^3 de un fluido a la presión de 2 atm y a una temperatura de 294 K. La presión se aumenta reversiblemente a 105 atm y la temperatura se mantiene constante. Calcula en atm · L el trabajo, suponiendo que el fluido es:

a) Un gas ideal.

b) Un líquido con un coeficiente de compresibilidad $k_T = 50 \times 10^{-12}\,(N/m^2) - 1$. Halla la variación de volumen de cada fluido.

Respuesta

a) $W = -\int_{v_1}^{v_2} PdV = nRT\int_{P_1}^{P_2}\frac{dP}{P} = P_1V_1\ln\frac{P_2}{P_1} = 7921{,}6 \text{ atm} \bullet \text{L}$

b) $dV = -k_T VdP \therefore W = k_T VPdP$

$$W = \frac{k_T V_1}{2}(P_2^2 - P_1^2) = \frac{5{,}066\times10^{-6}\,\text{atm}^{-1}}{2}(11025-4) = 2.533(11021) = 27.91 \text{ atm} \bullet \text{L}$$

$$dV = k_T dP \cdots\cdots V = V_1 I$$

$$W = k_T V_1 I^{kTP_1}\int_{P_1}^{P_2} I^{kTP}PdP \cdots\cdots W = -V_1 I^{kTP_1}\left[I^{-kTP_2}\left(P_2 + \frac{T}{\kappa T}\right) - I^{-kTP_1}\left(P_1 + \frac{1}{kT}\right)\right]$$

$$W = -1\,\text{m}^3 I^{1.0132\times10^{-5}}\left[I^{-5.3193\times10^{-4}}\left(105 + \frac{1}{5.066\times10^{-6}}\right) - I^{-1.01132\times10^{-5}}(\ldots)\left(2 + \frac{1}{5.066\times10^{-6}}\right)\right]$$

$$= -1(1)\left[.999\left(105 + 197394.39\right) - .999\left(2 + 197394.39\right)\right]$$

$$= -1\left[.999\left(197499.39\right) - .999\left(197396.39\right)\right]$$

$$= -197301.8906 + 197198.9936 = -102.897 \text{ atm} \bullet \text{L}$$

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

$$2 \text{ atm}\left(1\,\text{m}^3\right) = 105 \text{ atm} V_2 = 0.01904 \text{ m}^3 \cdots\cdots 990l = \Delta V$$

$$V_2 = V_1 I^{-kT(P_2 - P_1)} = 1l^{-5.066\times10^{-6}(103atm)} = I^{-5.21798\times10-4} = 999.47l = .53l = \Delta V$$

Problema resuelto

¿Cuál es el valor de la entalpía de formación del agua líquida a 298 K? ¿Cambia si es vapor de agua?

Respuesta

Usando tablas internacionales se obtiene:

$$\Delta H_{f H_2O}(l) 298 \text{ K} = -285.83 \text{ kJ/mol}$$

$$\Delta H_{f H_2O}(g) 298 \text{ K} = -241.81 \text{ kJ/mol}$$

La diferencia de ~44 kJ/mol representa la energía de cohesión que mantiene la sustancia en estado líquido.

Problema resuelto

¿Por qué un individuo bosteza? ¿En qué circunstancias lo hace?

Respuesta

El bostezo es un mecanismo al que recurre la naturaleza para introducir una fuerte cantidad de oxígeno dentro de un sistema vivo. En ese sistema se encuentran diversas sustancias que son susceptibles de pasar por un proceso de combustión (carbohidratos, lípidos, etc.), entonces el oxígeno en exceso que se adquiere de un bostezo reacciona con alguna de esas sustancias y produce calor.
Un individuo bosteza principalmente en tres circunstancias:

a) Cuando tiene sueño, pues entonces requiere de calor para entrar en sopor (como los osos).
b) Cuando tiene frío y obviamente necesita cualquier fuente de calor.
c) Cuando tiene hambre y necesita energía extra para llevar a cabo la digestión.

Las reacciones de combustión acompañan a muchos procesos globales, constantemente nos referiremos a ellas.

Problema resuelto

En un proceso multietapas se obtiene que la eficiencia es de 2006/4013. Si los trabajos obtenidos en las diferentes etapas son $1 + 3 + 5 + \ldots (2n - 1)$ y a su vez los calores obtenidos son $2 + 4 + 6 + \ldots (2n)$, respectivamente para un número n de etapas. ¿Cuál es el cambio de energía total? A este proceso se le atribuye trabajo y calor producido, en unidades de Joule.

Respuesta

$$\frac{W}{\Delta U}=\frac{W}{W+Q}=\frac{2006}{4013}\rightarrow\frac{W}{Q}=\frac{2006}{2007}$$

Se tiene que

$$\frac{1+3+5+\ldots(2n-1)}{2+4+6+\ldots(2n)}=\frac{2006}{2007}$$

$$1+3+5+\ldots(2n-3)+(2n-1)$$

$$\overbrace{3+5+\ldots(2n-3)}^{2n}\quad\underbrace{1+3+5+\ldots(2n-3)+(2n-1)}_{2n}$$

y asi sucesivamente hasta $2n\ \frac{n}{2}\ veces\ \left(\frac{n}{2}\right)\ 2n=W=n^2$

$$2+4+6+\ldots(2n-2)+(2n)$$

$$\overbrace{4+6+\ldots(2n-2)}^{2n+2}\underbrace{2+4+6+\ldots(2n-2)+(2n)}_{2n+2}$$

y asi sucesivamente hasta $(2n+2)\frac{n}{2}veces=\left(\frac{n}{2}\right)(2n+2)=n(n+1)$

por tanto

$$\frac{n^2}{n(n+1)}=\frac{2006}{2007}=\frac{n}{(n+1)}\longrightarrow^{n=2006}_{(n+1)=2007}$$

por tanto tenemos que usando la suma de gauss como fue usada anteriormente tenemos

$$\Delta U=Q+W=(1+2+3+\ldots4012)\ J$$

$$\frac{(4012)(4013)}{2}=8050078\ J$$

Problema resuelto*

El *Cp* para el aluminio en J/mol K es de $20.67 + 12.38 \times 10^{-3}\ T$.

a) Calcula la variación de entropía que sufre un mol de aluminio cuando se calienta de 25 °C a 200 °C.

b) Encontramos el valor de entropía absoluta $\Delta S_{298.15\ k} = 28.35$ J/mol K. ¿Cuál es la entropía absoluta de aluminio a 200 °C?

Respuesta

a) $$\int ds = \int_{T_1}^{T_2} \frac{Cp}{T} dT = \int_{T_1}^{T_2} \frac{20.67 + 12.38 \times 10^{-3} T}{T} dT$$

$$= \int_{T_1}^{T_2} \frac{20.67}{T} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{12 - 38 \times 10^{-3} T}{T} dT$$

$$\Delta S = 20.67 \ln \frac{T_2}{T_1} + 12.38 \times 10^{-3} (T^2 - T^1), \text{ sustituyendo}$$

$$\Delta S = 20.67 \ln \frac{473\ \text{K}}{298\ \text{K}} + 12.38 \times 10^{-3} (473\ \text{K} - 298\ \text{K}) = 11.71\ {}^{\text{J}}\!/\!_{\text{molK}}$$

b) $$S_{473} = S_{298.15} + (S_{473} - S_{298.15}) = S_{298.15} + \Delta S = 28.35\ {}^{\text{J}}\!/\!_{\text{molK}} + 11.71\ {}^{\text{J}}\!/\!_{\text{molK}} = 40.06\ {}^{\text{J}}\!/\!_{\text{molK}}$$

Problema resuelto

Calcula ΔS en la mezcla de 10.0 g de He a 1200 °C y 1.50 bar con 10.0 g de O_2 a 120.0 °C y 1.50 bar.

Respuesta

$$\Delta S = nR \ln \left(\frac{na + nb}{na} \right) + nR \ln \left(\frac{na + nb}{nb} \right)$$

$P = \text{cte.}$

10 g He

10 g O_2

$$na = nHe = \frac{10\ \text{g}}{4\ {}^{\text{g}}\!/\!_{\text{mol}}} = 2.5\ \text{mol}$$

$$nb = nO_2 = \frac{10\ \text{g}}{32\ {}^{\text{g}}\!/\!_{\text{mol}}} = 0.3125\ \text{mol}$$

$$\Delta S = R \left(na \ln \left(\frac{na + nb}{na} \right) + nb \ln \left(\frac{na + nb}{nb} \right) \right)$$

$$\Delta S = 8.314\ {}^{\text{J}}\!/\!_{\text{molK}} \left(2.5\ \text{mol} \ln \left(\frac{2.5\ \text{mol} + 0.3125\ \text{mol}}{2.5\ \text{mol}} \right) + 0.3125\ \text{mol} \ln \left(\frac{2.5\ \text{mol} + 0.3125\ \text{mol}}{0.3125\ \text{mol}} \right) \right)$$

$$\Delta S = 8.15\ {}^{\text{J}}\!/\!_{\text{K}}$$

Problema resuelto

Encuentra ΔS cuando 2.0 moles de O_2 se calientan de 27 °C a 127 °C a una presión constante de 1.00 atm. Use $Cpm = a + bT$, donde $a = 6.15$ cal/mol K y $b = 0.00310$ cal/mol K^2.

Respuesta

$\Delta S = ?$

$n = 2$ moles de O_2

$T_1 = 27\ °C = 300\ K$
$T_2 = 127\ °C = 400\ K$
$P = cte$
$a = 6.15$ cal/mol K
$b = 0.0031$ cal/mol K^2

$$\Delta S = \frac{Cp}{T}dT - V\alpha dP \rightarrow P^{\circ} = cte$$

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{Cp}{T}dT$$

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} n\left(\frac{a}{T} + b\right)dT$$

$$\Delta S = na\ln\frac{T_2}{T_1} + nb\left(T_2 - T_1\right)$$

$$\Delta S = n\left[a\ln\frac{T_2}{T_1} + b\left(T_2 - T_1\right)\right]$$

$$\Delta S = 2\ \text{moles}\left[6.15\frac{\text{cal}}{\text{molK}}\left(\ln\frac{400\ \text{K}}{300\ \text{K}}\right) + 0.00310\frac{\text{cal}}{\text{molK}^2}\left(400\ \text{K} - 300\ \text{K}\right)\right]$$

$$\Delta S = 4.16\ \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

Equilibrio fisicoquímico

Problema resuelto

Calcula el cambio de entropía del sistema cuando un mol de glicerina líquida a temperatura ambiente de 25 °C, se congela a −25 °C a presión atmosférica constante. En el punto normal de fusión de la glicerina que es a 15 °C, el calor de la glicerina es de 2688 cal/mol y las capacidades caloríficas molares son de 33.8 cal/mol K para la glicerina líquida y 20.1 cal/mol K para la glicerina sólida.

Respuesta

Datos:

$n = 1\ \text{mol}$

$T_1 = 25\ ^\circ\text{C}$

$T_2 = -25\ ^\circ\text{C}$

$T_{fus} = -15\ ^\circ\text{C}$

$\Delta H_{fus} = 2688\ {}^{\text{cal}}/_{\text{molK}}$

$\text{Cpm(l)} = 33.8\ {}^{\text{cal}}/_{\text{molK}}$

$\text{glicerina} - \text{líquida}$

$\text{Cpm(s)} = 20.1\ {}^{\text{cal}}/_{\text{molK}}$

$\text{glicerina} - \text{sólida}$

$A(e) \rightarrow \Delta S_1 \quad A(e) \rightarrow \Delta S_2 \quad A(s) \rightarrow \Delta S_3 \ A(s)$

$T_i - - - -\ \text{fusión} - - -\ \text{fusión} - - - T_f$

$\Delta S_T = {}^{\Delta S_1} + {}^{\Delta S_2} + {}^{\Delta S_3}$

$$\Delta S_T = (1\ \text{mol})\left(33.8\ {}^{\text{cal}}/_{\text{molK}}\right)\ln\left(\frac{288.15\ \text{K}}{298.15\ \text{K}}\right) + (1\ \text{mol})\left(\frac{2688\ \text{cal/mol}}{288.15\ \text{K}}\right) + (1\ \text{mol})\left(20.1\ {}^{\text{cal}}/_{\text{molK}}\right)\ln\left(\frac{258.15\ \text{K}}{288.15\ \text{K}}\right)$$

$\Delta S_T = 5.963\ {}^{\text{cal}}/_{\text{K}}$

Problema resuelto

2 moles de un gas ideal se comprimen isotérmica y reversiblemente a 100 °C desde 10 atm hasta 25 atm. Calcula los valores de ΔG correspondiente al proceso.
100 °C = 373.15 K
P_1 = 10 atm
P_2 = 25 atm

Respuesta

$\Delta G = nRT \ln (P_2/P_1)$
ΔG = (2 moles) (8.314 J/molK) (373.15 K) ln (25 atm/10 atm)
ΔG = 5685.34 J

Problema resuelto

La presión del tetracloruro de carbono vapor es de 10 539 Pa a 290 K y 74 518 Pa a 340 K. La presión de vapor sólido es de 270 Pa a 232 K y 10.92 Pa a 250 K.

a) Calcula ΔH_{vap}, ΔH_{sub}, ΔH_{fus}.
b) Calcula la temperatura de ebullición normal (P = 101 325 Pa).
d) Encuentra la presión y temperatura del a triple.

Respuesta

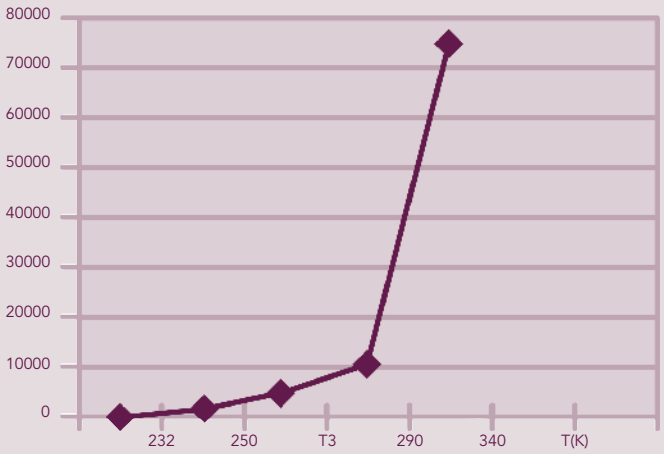


Figura 8.A

$$\ln\left|\frac{P_f}{P_i}\right| = \frac{\Delta H}{R}\left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_f}\right)$$

$$a)\ln\left[\frac{P_5}{P_4}\right] = \frac{\Delta H_{vap}}{R}\left(\frac{1}{T_4} - \frac{1}{T_5}\right)$$

$$\Delta H_{vap} = \frac{R\ln\left|\frac{P_5}{P_4}\right|}{\left(\frac{1}{T_4} - \frac{1}{T_5}\right)} = \frac{\left(8.314\frac{J}{molK}\right)\ln\left|\frac{74.518}{10.539}\right|}{\frac{1}{290\ K} - \frac{1}{340\ K}} = 32068.34\ J/molK$$

$$\Delta H_{sub} = \frac{R\ln\left|\frac{P_2}{P_1}\right|}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = \frac{8.314\frac{J}{molK}\ln\left|\frac{1095}{270}\right|}{\frac{1}{232\ K} - \frac{1}{250\ K}} = 37507.73\ J/molK$$

$$\Delta H_{sub} = \Delta H_f + \Delta H_{vap} \Rightarrow \Delta H_f = \Delta H_{sub} - \Delta H_{vap} = 37507.73 - 32069.34 = 5439.39\ J/molK$$

Respuesta (*continuación*)

b) $\ln\left[\frac{P_{eb}}{P_S}\right]=\frac{\Delta H_{vap}}{R}\left(\frac{1}{T_S}-\frac{1}{T_{eb}}\right)$

$$\ln\left[\frac{P_{eb}}{P_S}\right]=\frac{\Delta H_{vap}}{RT_5}-\frac{\Delta H_{vap}}{RT_{eb}}\Rightarrow\frac{\Delta H_{vap}}{RT_{eb}}=\frac{\Delta H_{vap}}{RT_5}-\ln\left(\frac{P_{eb}}{P_S}\right)$$

$$T_{eb}=\frac{\Delta H_{vap}}{R\left(\frac{\Delta H_{vap}}{RT_5}-\ln\left(\frac{P_{eb}}{P_5}\right)\right)}=\frac{32068.34\ \text{J/molK}}{\frac{32068.34\ \text{J/molK}}{340\ \text{K}}-8.314\ \text{J/molK}\ln\left[\frac{101325Pa}{74518Pa}\right]}$$

$$T_{eb}=\frac{32068.34\ \text{J/molK}}{91.7638175\ \text{J/molK}}=349.47\ \text{K}$$

c)

$$\ln\left[\frac{P_3}{P_2}\right]=\frac{\Delta H_{sub}}{R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_3}\right)\Rightarrow\ln|P_3|\ln|P_2|+\frac{\Delta H_{sub}}{R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_3}\right)$$

$$\ln\left[\frac{P_3}{P_4}\right]=\frac{\Delta H_{sub}}{R}\left(\frac{1}{T_4}-\frac{1}{T_3}\right)\Rightarrow\ln|P_3|\ln|P_4|+\frac{\Delta H_{vap}}{R}\left(\frac{1}{T_4}-\frac{1}{T_3}\right)$$

igualamos:

$$\ln[P_2]+\frac{\Delta H_{sub}}{R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_3}\right)\Rightarrow\ln|P_4|+\frac{\Delta H_{vap}}{R}\left(\frac{1}{T_4}-\frac{1}{T_3}\right)$$

$$\frac{\Delta H_{vap}}{RT_3}-\frac{\Delta H_{sub}}{RT_3}\Rightarrow\ln\left|\frac{P_4}{P_2}\right|+\frac{\Delta H_{vap}}{RT_4}-\frac{\Delta H_{sub}}{RT_2}$$

$$\frac{1}{T_3}\left(\frac{\Delta H_{vap}-\Delta H_{sub}}{R}\right)=\ln\left|\frac{P_4}{P_2}\right|+\frac{\Delta H_{vap}}{RT_4}-\frac{\Delta H_{sub}}{RT_2}$$

$$T_3=\frac{\frac{\Delta H_{vap}-\Delta H_{sub}}{R}}{\ln\left|\frac{P_4}{P_2}\right|+\frac{\Delta H_{vap}}{RT_4}-\frac{\Delta H_{sub}}{RT_2}}$$

$$T_3=\frac{\frac{32068.34\ \text{J/mol}-37507.73\ \text{J/mol}}{8.314\ \text{J/molK}}}{\ln\left|\frac{10539}{1095}\right|+\frac{32068.34\ \text{J/mol}}{8.314\ \text{J/molK(290 K)}}-\frac{37507.73\ \text{J/mol}}{8.314\ \text{J/molK(250 K)}}}=\frac{-654.24464\ \text{K}}{-2.480732712}$$

$$T_3=263.73\ \text{K}$$

$$P_3=\ _e\left[\ln|P_2|+\frac{\Delta H_{sub}}{R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_3}\right)\right]=\ _e7.937977=2801.69\ Pa$$

Problema resuelto

Busca y discute el diagrama de fases del CO_2.

Respuesta

En la figura 8.2 se muestra el diagrama. Éste es uno de los diagramas más sencillos que existen, la única peculiaridad que se debe indicar es que el CO_2 líquido prácticamente no existe en el mundo cotidiano. Como se puede observar el gas pasa a sólido (hielo seco) en condiciones estándar y para poder ver el líquido se debe entrar a condiciones de presión que no se pueden encontrar en la vida normal.

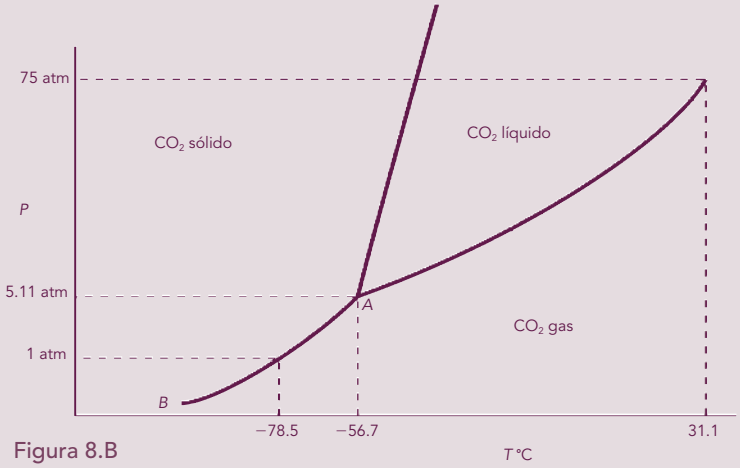


Figura 8.B
Diagrama de fases del CO_2.

Problema resuelto

Muestra y discute el diagrama de fases del H_2O completo (incluidos todos los alótropos del hielo).

Respuesta

Éste es un sistema muy conocido, el del agua, en la figura 8.C se muestra el diagrama completo, es decir incluyendo todas las formas alotrópicas del hielo (debemos recordar que la alotropía se presenta cuando se tiene una misma sustancia, pero sus átomos se acomodan en arreglos diferentes y macroscópicamente da la impresión de tener dos sustancias diferentes aunque sea la misma). Además se debe hacer notar la pendiente negativa de la línea de coexistencia del sólido y el líquido debido a que el volumen del hielo es mayor que el del líquido (por fortuna sucede este fenómeno porque una consecuencia es que el hielo es menos denso que el agua y entonces flota, si fuera al revés el hielo se hundiría en el agua y nuestros océanos serían grandes acumulaciones de témpanos).

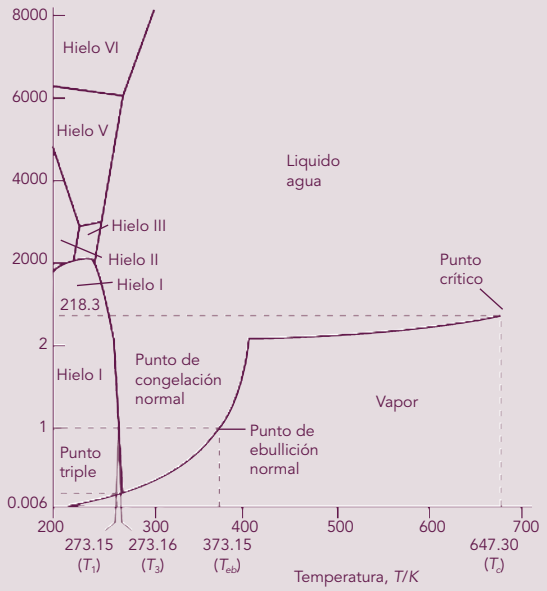


Figura 8.C
Diagrama de fases del agua.

El hielo I es el hielo común que todos conocemos (y disfrutamos en época de calor) los otros son formas diferentes de cristalización que se encuentran a altas presiones (el hielo IV no existe, ya que hubo un informe de su existencia pero resultó falso, al tratar de corregir el error ya se había descubierto el hielo V que sí existe, pero ya no se cambió la numeración).

Problema resuelto

Calcula el punto de ebullición de una disolución acuosa de glicerina que se congela a −1.50 °C.

Respuesta

$$\Delta T = K_{fm} \Rightarrow m = \frac{\Delta T}{Kf} = \frac{1.50\ K}{1.86\frac{KKg}{mol}} = 0.8065\ mol/Kg$$

$$\Delta T = K_{eb} m \Rightarrow \left(0.512\frac{KKg}{mol}\right)\left(0.8065\frac{mol}{Kg}\right) = 0.4129\ K$$

$$\therefore T_{ebullición} = 100\ °C + 0.4129\ °C = 100.4129\ °C$$

Problema resuelto

El $NO_2(g)$ es una mezcla de $NO_2(g)$ y $N_2O_4(g)$. Si la densidad de esta mezcla es de 2.3 g/L a 74 °C y 1.3 atm, calcula la presión parcial de los gases, la constante de equilibrio, *Kp* y el valor de ΔGr.

Respuesta

$$74\ ^\circ C = 347.15\ K$$

$$N_2O_4(g) \rightleftarrows 2NO_2(g)$$

Si se considera esta mezcla como un gas ideal:

$$PV = nRT \Rightarrow PV = \frac{m}{V}RT \Rightarrow \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \Rightarrow C = \frac{PM}{RT}$$

$$M = \frac{eRT}{P} = \frac{\left(2.3\ {}^{g}\!/\!_{L}\right)(347.15\ K)\left(0.082\ \frac{Latm}{molK}\right)}{1.3\ atm} = 50.36\ {}^{g}\!/\!_{mol}$$

Pero en una mezcla la masa molar promedio se expresa:

$$M_{T(masa-molar-de-la-mezcla)} = Y_A M_A + Y_B M_{B(fracción-mol)}$$

$$M_{Mezcla} = Y_{N_2O_4} M_{N_2O_4} + Y_{NO_2} M_{NO_2}$$

$$Y_{N_2O_4} + Y_{NO_2} = 1$$

$$50.36\ {}^{g}\!/\!_{mol} = Y_{N_2O_4}\left(92\ {}^{g}\!/\!_{mol}\right) + Y_{NO_2}\left(46\ {}^{g}\!/\!_{mol}\right)$$

$$50.36\ {}^{g}\!/\!_{mol} = Y_{N_2O_4}\left(92\ {}^{g}\!/\!_{mol}\right) + \left(1 - Y_{N_2O_4}\right)\left(46\ {}^{g}\!/\!_{mol}\right)$$

$$50.36\ {}^{g}\!/\!_{mol} = Y_{N_2O_4}\left(92\ {}^{g}\!/\!_{mol}\right) + 46\ {}^{g}\!/\!_{mol} - YN_2O_4\left(46\ {}^{g}\!/\!_{mol}\right)$$

$$Y_{N_2O_4}\left(46\ {}^{g}\!/\!_{mol}\right) = 4.36$$

$$Y_{N_2O_4} = 0.095$$

$$Y_{NO_2} = 1 - Y_{N_2O_4} = 0.905$$

$$Presión - parcial = Y_A P - mezcla$$

$$P_{N_2O_4} = (0.095)(1.3\ atm) = 0.1235\ atm$$

$$P_{NO_2} = (0.095)(1.3\ atm) = 1.1765\ atm$$

$$K_p = \frac{\left(P_{NO_2}\right)^2}{\left(P_{N_2O_4}\right)} = \frac{(1.1765\ atm)^2}{(0.1235\ atm)} = 11.21$$

$$\Delta G = -RT\ln|Kp| = -\left(8.314\ \frac{J}{molK}\right)(347.15\ K)\ln|11.21|$$

$$= -6975.4\ \frac{J}{mol}$$

Problema resuelto

Examina la siguiente reacción a 25 °C.

$4H_2(g) + CO_2(g) \leftrightarrows CH_4(g) + 2H_2O(l)$

y considera los datos de la tabla:

Sustancia	$\Delta H_f°$ (kJ/mol)	$S°$ (J/mol K)
$H_2(g)$	0	131
$CO_2(g)$	−396	214
$CH_4(g)$	−75	186
$H_20(l)$	−286	70

Para realizar los siguientes cálculos:
La entalpía de reacción $\Delta H_r°$
$\Delta S_r°$
$\Delta G_r°$

Explica si la reacción es exotérmica y espontánea.

Respuesta

$$\Delta H_r° = \left[-75 + 2(-286) - 4(0) + 396\right]$$

$$\Delta H_r° = -251\ \text{kJ/mol}$$

$$\Delta S_r° = \left[186 + 2(70) - 4(131) - 214\right]$$

$$\Delta S_r° = -412\ \text{J/mol} \therefore$$

$$\Delta G_r° = \Delta H - T\Delta S$$

$$\Delta G_r° = \left(-251000 - (298.15K)(-412)\right)$$

$$\Delta G_r° = -128162.2\ \text{J/mol}$$

La reacción es exotérmica ya que $\Delta H < 0$
La reacción es espontánea ya que $\Delta G < 0$

Problema resuelto

Para la siguiente reacción:

$$PCl_5(g) \rightleftarrows PCl_3(g) + Cl_2(g)$$

a) Calcula *Kp* a 298.15 K.
b) Determina el grado de disociación a 298.15 K y 1 bar.
c) Calcula *Kp* a 600 K.
d) Determina el grado de disociación a 600 K y 1 bar.
e) Determina el grado de disociación a 600 K y 10 bars.

Respuesta

a) Se obtiene $\Delta G°$ para la reacción a partir de datos de tablas.

$$\Delta G^0_{reaccion} = \Delta G^0_{PCl}3(g) + \Delta G^0_{Cl}2(g) - \Delta G^0_{f\ PCl}5(g)$$

$$= 1\,\text{mol}(-267.8\ \text{kJmol}^{-1}) + 1\ mol\left(0\ \text{kJmol}^{-1}\right) - 1\,\text{mol}(-305\ \text{kJmol}^{-1})$$

$$\Delta G^0_{reaccion} = 37.2k\ \text{J}$$

Respuesta (*continuación*)

a) Como $\Delta G°_{reacción}$ es positivo, la reacción no es espontánea a 298.15 K y 1 bar. *Kp* se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\Delta G^0 = -RT\ln Kp$$

$$Kp = e^{\left(-\Delta G^0/RT\right)} = e^{\left\{-(37200\ \text{Jmol}^{-1})/(8.314\ \text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1})(298.15\ \text{K})\right\}}$$

$$Kp = 3.04\times10^{-7}$$

Se observa que *Kp* es muy pequeña, lo cual significa que el equilibrio está desplazado hacia los reactivos.

b) Para determinar el grado de disociación hacemos el siguiente análisis considerando que al inicio hay 1 mol de reactivo (PCl_5):

	PCL_5	PCl_2	Cl_2	Total
Número de moles al inicio	1	0	0	1
Número de moles en el equilibrio	$1-\alpha$	α	α	$1-\alpha+\alpha+\alpha$ $=1+\alpha$

$$Kp = \frac{P_{PCl}3P_{Cl}2}{P_{PCl5}}$$

$$Kp = \frac{x_{PCl}3P_{total}x_{Cl}2P_{total}}{x_{PCl5}P_{total}} = \frac{x_{PCl}3x_{Cl}2}{x_{PCl5}}P_{total}^{(2-1)} = KxP_{total}^{\Delta n\ gases}$$

En este caso:

$$Kx = \frac{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)}{\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

$$Kp = \frac{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)}{\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)}P_{total}^1 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = 3.04\times10^{-7}$$

de donde obtenemos que $\alpha = 55.51 \times 10^{-4}$, es muy pequeña, por lo que el equilibrio está desplazado hacia los reactivos. De acuerdo con este resultado, en el equilibrio tenemos el siguiente número de moles de cada compuesto:

	PCL_5	PCl_2	Cl_2	Total
Número de moles en el equilibrio	$1-\alpha\approx1$	$\alpha=5.51\times10^{-4}$	$\alpha=5.51\times10^{-4}$	$=1+\alpha\approx1$

Si por cada mol de PCl_5, se obtuvieron 5.51×10^{-4} moles de PCl_3, el rendimiento es casi nulo, la reacción no es espontánea.

c) Ahora vamos a analizar el efecto de la temperatura sobre el equilibrio. Considerando que el cambio de entalpía para la reacción es constante en este intervalo de temperatura, aplicamos la ecuación

$\ln\frac{Kp_2}{Kp_1} = \frac{\Delta H^0}{R}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)$ utilizando el $\Delta H°$ obtenido de tablas:

Respuesta (*continuación*)

$$\ln Kp_2 = \ln Kp_1 + \frac{\Delta H^0}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

$$\ln Kp_{600K} = \ln\left(3.04\times10^{-7}\right) + \frac{87900\ \text{Jmol}^{-1}}{8.314\ \text{JK}^{-1}\ \text{mol}^{-1}}\left(\frac{1}{298.15\ \text{K}} - \frac{1}{600\ \text{K}}\right) = 2.8333$$

Al aumentar la temperatura, la constante de equilibrio se incrementó considerablemente debido a que la reacción es endotérmica de acuerdo con el Principio de Le Châtelier.

d) Para obtener el grado de disociación seguimos el mismo procedimiento que en el inciso b):

$$Kp = \frac{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)}{\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)} P^1_{total} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = 17$$

$$\alpha = 0.97$$

Este valor de α quiere decir que por cada mol de PCl_5 que se encontraba inicialmente, reaccionan 0.97, de tal manera que en el equilibrio tenemos 0.97 moles de PCl_3 y 0.97 moles de Cl_2 y sólo 0.03 moles de PCl_5 como se resume en la tabla siguiente:

	PCl_5	PCl_3	Cl_2	Total
Número de moles en el equilibrio	$1-\alpha = 0.03$	$\alpha = 0.97$	$\alpha = 0.97$	$1+\alpha = 1.97$

El rendimiento de la reacción pasó a ser del 97%.

e) En este inciso analizamos el efecto de la presión sobre esta reacción en el equilibrio, es decir, aplicamos el principio de Le Châtelier.
En la ecuación $\Delta G° = 2RT\ 1nKp$, observamos que Kp solamente depende de la temperatura, entonces Kp sigue siendo la misma a 10 bars; lo que cambia es Kx. A 600 K tenemos:

$$Kp = KxP^{\Delta n\ gases}_{total}$$

$$Kx = \frac{Kp}{P^{\Delta n\ gases}_{total}} = \frac{17}{10} = 1.7$$

$$Kx = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = 1.7$$

$$\alpha = 0.79$$

El equilibrio se desplaza hacia el reactivo según el principio de Le Châtelier y el rendimiento baja. Dado que al aumentar la presión disminuye el volumen, el equilibrio se desplaza hacia el reactivo debido a que éste ocupa menor volumen como se observa de la estequiometría de la reacción, ya que por dos moles de gases en productos, solamente hay un mol de gas en reactivos. El número de moles de reactivo y productos a 600 K y 10 bars se resume en la siguiente tabla:

	PCl_5	PCl_3	Cl_2	Total
Número de moles en el equilibrio	$1-\alpha = 0.21$	$\alpha = 0.79$	$\alpha = 0.79$	$1+\alpha = 1.79$

Problemas resueltos

Equilibrios ácido-base. Solubilidad y precipitación

Problema resuelto

El amoniaco, cuya fórmula es NH_3, es una base que se utiliza en productos de limpieza para el hogar y en agronomía se emplea como fertilizante, tiene una constante de hidrólisis de 1.58×10^{-5}. Escribe el equilibrio de hidrólisis del amoniaco y su constante de basicidad. Además indica el par conjugado y calcula el valor de pKa para este par ácido- base y expresa Ka.

Respuesta

El amoniaco se hidroliza en el agua de la siguiente manera:

$$\underset{\text{base}}{NH_3(ac)} + H_2O \leftrightarrows \underset{\text{ácido}}{NH_4^+(ac)} + OH^-(ac)$$

El par conjugado será entonces NH_4^+/NH_3. La constante de basicidad Kb, se representa como:

$$Kb = \frac{\left[NH_4^+\right]\left[OH^-\right]}{\left[NH_3\right]} = 1.58 \times 10^{-5} = 10^{-4.8}$$

Para calcular pKa se recurre a la relación pKw = pKa + pKb, por tanto:

$$pKa = 14 - 4.8 = 9.2$$

El equilibrio de disociación del ácido NH_4^+ se expresa como:

$$\underset{\text{ácido}}{NH_4^+(ac)} \leftrightarrows H^+(ac) + \underset{\text{base}}{NH_3(ac)}$$

$$Ka(NH_4^+ / NH_3) = \frac{\left[H^+\right]\left[NH_3\right]}{\left[NH_4^+\right]} = 10^{-9.2}$$

Problema resuelto

El ácido salicílico que se representará por HSal, es un ácido monoprótico de fórmula $C_7O_3H_6$ y de $Ka = 1.07 \times 10^{-3}$, que se emplea en cosmética para elaborar productos para tratamiento del acné. Calcula:

a) El coeficiente de disociación del ácido salicílico en una disolución que contiene 1.0 g /L de HSal.
b) El pH de la disolución de HSal 1.0 g/L.
c) El volumen de NaOH 0.1 M necesaria para neutralizar 100 mL de la disolución 1.0 g/L.
d) Explica si la disolución resultante en c) es ácida, básica o neutra.

Respuesta

a) Cálculo del coeficiente de disociación (α)
Para calcular el coeficiente de disociación del ácido salicílico, es necesario calcular su masa molar y su concentración en mol/L. La masa molar = 138 g/mol

$$\text{Cmol/L} = \frac{\dfrac{1.0\ \text{g}}{138\ \text{g/mol}}}{1\ \text{L}} = 7.25\times10^{-3}\text{M} = 10^{-2.14}\text{M}$$

Mediante la siguiente expresión se calcula el coeficiente de disociación (α):

$$\alpha^2 + \frac{Ka}{C_0}\alpha - \frac{Ka}{C_0} = 0$$

Al sustituir el valor de Ka($1.07 \times 10^{-3} = 10^{-2.97}$) y de la concentración queda como:

$$\alpha^2 + \frac{10^{-2.97}}{10^{-2.14}}\alpha - \frac{10^{-2.97}}{10^{-2.14}} = 0$$

El algoritmo de resolución es:

$$\alpha = \frac{-10^{-0.83} \pm \sqrt{\left(10^{-0.83}\right)^2 + 4\left(10^{-0.83}\right)}}{2}$$

Al resolver el algoritmo se encuentra que la raíz positiva es:

$$\alpha = 10^{-0.49} = 0.318$$

b) Cálculo del pH de la disolución
Al equilibrio:

$$\left|\text{Sal}^-\right| = \left|\text{H}^+\right| = \alpha C_0$$

Al aplicar logaritmos y multiplicando por −1

$$-\log\left|\text{H}^+\right| = -(\log\alpha + \log C_0)$$

$$\text{pH} = -(\log 0.318 + \log 7.25\times10^{-3})$$

$$\text{pH} = -(-0.49 - 2.14) = 2.63$$

c) Cálculo del volumen de NaOH 0.1 M necesario para neutralizar 100 mL de disolución 1 g/L.
La reacción de neutralización es la siguiente:

Respuesta (*continuación*)

$$HSal(ac) + OH^-(ac) \leftrightarrows Sal^-(ac) + H_2O$$

$$n_{(HSal)} = 7.25 \times 10^{-3}\,mol/L \times 0.100\,L = 7.25 \times 10^{-4}\,mol$$

$$V_{NaOH} = \frac{7.25 \times 10^{-4}\,mol \times 1000\,mL}{0.1\,mol/L} = 7.3\,mL$$

La especie que se obtiene después de adicionar 7.3 mL de NaOH 0.1 M a 100 mL de ácido salicílico 1.0 g/L es el ion salicilato(Sal^-) por lo que el pH será básico.

Problema resuelto

Una disolución acuosa de 0.01 moles de ácido acético en 100 mL de agua, tiene un pH = 2.9. El ácido acético se representará por HAc.

a) Calcula la constante de acidez del ácido acético.
b) ¿A qué concentración molar presentará el ácido acético un 15% de disociación?
c) ¿Qué procedimiento experimental harías para preparar un litro de disolución con la concentración propuesta en b), a partir de la solución inicial?

Respuesta

a) Para calcular la constante de acidez es necesario conocer la concentración del ácido acético en mol/L, por tanto:

$$C_{HAc} = \frac{0.01\,mol}{0.1\,L} = 0.1\,M$$

Cuando se tiene una disolución de ácido acético, se presenta el siguiente equilibrio:

Inicio	**HAc(*ac*)** C_0	$\leftrightarrows$	**H^+(*ac*)**	+	**Ac^-(*ac*)**
Fracción disociada			αC_0		αC_0
Al equilibrio	$C_0 - \alpha C_0$ $C_0(1 - \alpha)$		αC_0		αC_0

Al aplicar la ley de acción de masas y sustituyendo concentraciones al equilibrio, se llega a la expresión:

$$Ka = \frac{\alpha^2 C_0}{(1-\alpha)}$$

Al equilibrio se tiene que:

$$|H^+| = |Ac^-| = \alpha C_0$$

Para calcular la constante de disociación del ácido se requiere conocer el valor de la fracción disociada (α), por lo que:

$$\alpha = \frac{|H^+|}{C_0} = \frac{10^{-2.9}}{10^{-1}} = 10^{-1.9} = 0.013$$

Se sustituye el valor de α en la expresión de la constante de disociación de la manera siguiente:

$$Ka = \frac{\alpha^2 C_0}{(1-\alpha)} = \frac{(0.013)^2 \times 0.1}{1 - 0.013} = 1.71 \times 10^{-5} = 10^{-4.77}$$

b) Cálculo de la concentración de ácido acético para tener un 15% de disociación:
Al retomar la expresión de la constante de disociación y despejando C_0, se obtiene:

$$Ka = \frac{\alpha^2 C_0}{(1-\alpha)}$$

$$\alpha^2 C_0 = Ka - \alpha Ka$$

Alerta

El pH de la disolución es de 2.9, por lo que $|H^+| = 10^{-2.9}\,M$.

Alerta

Se considera un 15% de disociación, por tanto $\alpha = 0.15$.

Respuesta (*continuación*)

$$C_0 = \frac{Ka - \alpha Ka}{\alpha^2}$$

$$C_0 = \frac{1.71\times10^{-5} - (1.71\times10^{-5}\times0.15)}{(0.15)^2} = 6.46\times10^{-4}\,M$$

c) Para preparar un litro de disolución de ácido acético 6.46×10^{-4} M, primero se debe calcular el volumen de alícuota que se debe tomar de la disolución 0.1 M, mediante el factor de dilución.

$$C_1V_1 = C_2V_2$$

$$V_2 = \frac{6.46\times10^{-4}\,M\times1\,L}{0.1\,M} = 6.46\times10^{-3}\,L = 6.5\ mL$$

Entonces, se toman 6.5 mL de ácido acético, y se diluyen a 1 L con agua destilada. En esta disolución, el ácido acético estará un 15% disociado.

Problema resuelto

El formiato de sodio (HCOONa) se emplea en el tratamiento del cuero o como componente en la elaboración de alimento para animales porque mejora la digestión. Se pesa 1 g de formiato de sodio y se lleva a 25 mL con agua destilada. Calcula el pH de la disolución resultante. Ka (del par $HCOOH/HCOO^-$) = $10^{-3.7}$.

Respuesta

Para calcular el pH de la disolución se necesita conocer su molaridad.
Masa molar de HCOONa = 68 g/mol

$$C_{(HCOON_a)} = \frac{\frac{1\ g}{68\ g/mol}}{0.025\ L} = 0.588\ M = 10^{-0.23}$$

Para seleccionar la fórmula apropiada para el cálculo del pH, recurriremos a la relación $\frac{Kb}{C_0}$.
Si Ka = $10^{-3.7}$, entonces Kb = $10^{-10.3}$

$$\frac{Kb}{C_0} = \frac{10^{-10.3}}{10^{-0.23}} = 10^{-10.07}$$

Como $\frac{Kb}{C_0} \leq 10^{-1}$, se concluye que es una base débil. La fórmula que se aplica es:

$$pH = 7 + \frac{1}{2}pKa + \frac{1}{2}\log C_0$$

$$pH = 7 + \frac{1}{2}(3.7) - \frac{1}{2}\log 0.588$$

$$pH = 8.97$$

Alerta

$Kw = Ka \times Kb = 10^{-14}$.

Problema resuelto

Al disolver en agua 150 mg de una base orgánica de masa molar 36.06 g/mol, hasta obtener 50 mL de disolución, el pH resultó ser de 10.05. Calcula:

a) El pKb y el pKa de dicha base orgánica.
b) El volumen de disolución de ácido clorhídrico 0.1 M que se necesita para neutralizar 10.0 mL de dicha disolución.
c) Explicar si la disolución resultante en b) será ácida, básica o neutra.

Respuesta

a) Cálculo de pKb y pKa de la base orgánica, la cual se representa como B.
Consideremos el siguiente equilibrio de hidrólisis:

	B(*ac*)	+	**H_2O**	⇆	**HB^+(*ac*)**	+	**OH^-**
Inicio	C_0						
Fracción hidrolizada					βC_0		βC_0
Al equilibrio	$C_0 - \beta C_0$ $C_0(1-\beta)$				βC_0		βC_0

La constante de basicidad de la base es:

$$Kb = \frac{[HB^+][OH^-]}{[B]}$$

Al sustituir las concentraciones al equilibrio en la constante de basicidad, Kb:

$$Kb = \frac{(\beta C_0)^2}{C_0(1-\beta)}$$

Al simplificar por C_0:

$$Kb = \frac{\beta^2 C_0}{(1-\beta)}$$

Al equilibrio:

$$|HB^+| = |OH^-| = \beta C_0$$

$$|OH^-| = \beta C_0$$

$$\frac{10^{-14}}{|H^+|} = \beta C_0$$

$$\frac{10^{-14}}{10^{-10.05}} = \beta C_0$$

$$10^{-3.95} = \beta C_0$$

$$\text{Si } C_0 = \frac{\frac{0.15\text{ g}}{36.06\text{ g/mol}}}{0.050\text{ L}} = 0.0832\text{ M} = 10^{-1.08}\text{; entonces}$$

$$\beta = \frac{10^{-3.95}}{10^{-1.08}} = 10^{-2.87} = 1.35\times10^{-3}$$

Respuesta (*continuación*)

Al sustituir el valor de β en la expresión de Kb:

$$Kb = \frac{\beta^2 C_0}{(1-\beta)} = \frac{(1.35\times10^{-3})^2 \times 0.0832}{1-1.35\times10^{-3}} = 1.51\times10^{-7} = 10^{-6.82}$$

$$pKb = 6.82$$

Para calcular pKa se recurre a la relación siguiente:

$$pKa + pKb = 14$$

Por tanto:
pKa = 14 − pKb
pKa = 14 −6.82 = 7.18
pKa = 7.18

b) Cálculo del volumen de HCl 0.1 M que se requiere para neutralizar 10.0 mL de disolución.
Reacción de neutralización:

$$B(ac) + H^+(ac) \leftrightarrows HB^+(ac) + H_2O$$

Cálculo del número de moles contenidas en 10 mL de disolución 0.0832 M de la base:

$$n_B = 0.0832 mol/L \times 0.01 L = 8.32\times10^{-4} \text{ mol}$$

Cálculo del volumen de HCl 0.1 M requerido para neutralizar 8.32×10^{-4} mol de la especie B.

$$V_{HCl} = \frac{8.32\times10^{-4} \text{ mol}\times1000 \text{ mL}}{0.1 \text{ mol/L}} = 8.3 \text{ mL}$$

c) De acuerdo con la reacción de neutralización planteada, cuando se han añadido 8.3 mL de HCl 0.1 M, la base orgánica se ha transformado en HB^+ (ácido conjugado), por tanto la disolución será ácida ya que en disolución está presente un ácido débil.

Problema resuelto

Calcula la constante de anfolización del ion monohidrogenocarbonato o bicarbonato. Se proporciona la siguiente información: $pKa's_{H_2CO_3} = 6.3$ y 10.1.

Respuesta

El ácido carbónico es un diácido que presenta los siguientes equilibrios ácido-base:

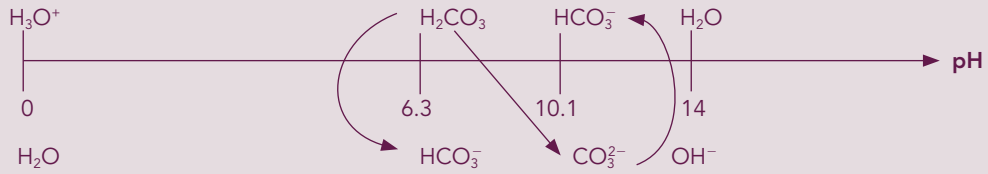
$$\underset{\text{ácido}}{H_2CO_3} \leftrightarrows H^+ + \underset{\text{base}}{HCO_3^-} \qquad pKa_1 = 6.3$$

$$\underset{\text{ácido}}{HCO_3^-} \leftrightarrows H^+ + \underset{\text{base}}{CO_3^{2-}} \qquad pKa_2 = 10.1$$

Se consideran ahora las constantes de disociación:

$$Ka_1 = \frac{\left|H^+\right|\left|HCO_3^-\right|}{\left|H_2CO_3\right|} = 10^{-6.3}; \qquad Ka_2 = \frac{\left|H^+\right|\left|CO_3^{2-}\right|}{\left|HCO_3^-\right|} = 10^{-10.1}$$

Situemos los pares ácido-base dentro de una escala de pH:



La ecuación que representa la reacción de anfolización de la especie monohidrogenocarbonato o bicarbonato es la siguiente:

$$H_2CO_3 + CO_3^{2-} \leftrightarrows 2HCO_3^-$$

Se aplica la ley de acción de masas sobre el equilibrio anterior:

$$K_{Anfolización} = \frac{\left|HCO_3^-\right|^2}{\left|H_2CO_3\right|\left|CO_3^{2-}\right|}$$

Si la constante de anfolización se multiplica y divide por $\left|H^+\right|$, la igualdad no se altera y hacemos aparecer Ka_2 y Ka_1

$$K_{Anfolización} = \frac{\left|HCO_3^-\right|^2}{\left|H_2CO_3\right|\left|CO_3^{2-}\right|} \times \frac{\left|H^+\right|}{\left|H^+\right|} = \frac{Ka_1}{Ka_2} = \frac{10^{-6.3}}{10^{-10.1}} = 10^{3.8}$$

$$K_{Anfolización} = 10^{3.8}$$

Se concluye que la reacción está desplazada a la derecha y que el anfolito es estable en disolución.

Problema resuelto

El dihidrogenofosfato de amonio se utiliza en la manufactura de textiles, papel, madera y fibras vegetales; en inhibidores de la corrosión o como fertilizante para inducir la floración en frutales. Indica los equilibrios existentes en disolución cuando se tiene una disolución de dihidrogenofosfato de amonio en agua. Calcula el pH de una disolución 0.15 M de este compuesto. Se proporcionan los siguientes valores de pKa:

$$pKa's_{H_3PO_4} = 2.2,\ 7.2 \text{ y } 12.3; \quad pKa_{(NH_4^+/NH_3)} = 9.2$$

Respuesta

Al disolver el dihidrogenofosfato de amonio en agua, se llevan a cabo las siguientes reacciones:
Disociación de la sal:

$$NH_4H_2PO_4(s) \xrightarrow{H_2O} NH_4 + (ac) + H_2PO_4^-(ac)$$

Reacción de disociación de la especie ácida:

$$NH_4^+(ac) \leftrightarrows H^+(ac) + NH_3(ac)$$

Reacción de disociación del anfolito cuando se comporta como ácido:

$$H_2PO_4^-(ac) \leftrightarrows H^+(ac) + HPO_4^{2-}(ac)$$

Reacción de hidrólisis del anfolito cuando se comporta como base:

$$H_2PO_4^-(ac) + H_2O \leftrightarrows H_3PO_4(ac) + OH^-$$

Al auxiliarnos de los valores de pKa proporcionados, situaremos los diferentes pares ácido-base dentro de la escala de pH:

Al analizar la escala de pH, se observa la presencia de dos especies que se comportan como ácidos ($H_2PO_4^-$ y NH_4^+) y una como base ($H_2PO_4^-$), entonces el ácido más fuerte y la base más fuerte imponen el pH, en este caso el anfolito impone el pH, entonces:

$$pH = \frac{pKa_1 + pKa_2}{2}$$

$$pH = \frac{2.2 + 7.2}{2} = 4.7$$

$$pH = 4.7$$

Problema resuelto

Calcula el pH de una disolución de acetato de amonio 0.1 M. Considera los siguientes valores de pKa:

$$pKa_{(HAc/Ac^-)} = 4.8; \quad pKa_{(NH_4^+/NH_3)} = 9.2$$

Respuesta

Al disolver el acetato de amonio en agua se establecen las siguientes reacciones:

a) Disociación de la sal:

$$NH_4Ac(s) \xrightarrow{H_2O} NH_4^+(ac) + Ac^-(ac)$$

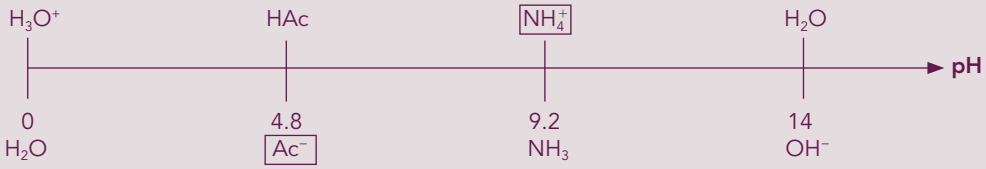
b) Reacción de disociación de la especie ácida:

$$NH_4^+(ac) \leftrightarrows H^+(ac) + NH_3(ac)$$

c) Reacción de hidrólisis de la base:

$$Ac^-(ac) + H_2O \leftrightarrows HAc(ac) + OH^-$$

Situemos ahora los pares ácido-base dentro de la escala de pH:



De la escala de pH se deduce que, en disolución se encuentra la forma ácida y la forma básica de dos pares ácido-base diferentes, por lo que para calcular el pH aplicaremos la fórmula:

$$pH = \frac{pKa_1 + pKa_2}{2}$$

$$pH = \frac{4.8 + 9.2}{2} = 7.0$$

$$pH = 7.0$$

Alerta

Cuando se disocia un mol de hidrogenofosfato de amonio, genera 2 moles del ion amonio y un mol del ion hidrogenofosfato.

Problema resuelto

El fosfato diamónico (hidrogenofosfato de amonio) se utiliza mezclado con bicarbonato de sodio en polvos para hornear; también se usa en procesos fermentativos y en agronomía. Indica los equilibrios existentes en disolución cuando se tiene una disolución de hidrogenofosfato de amonio en agua. Calcula el pH de una disolución 0.20 M de este compuesto. Se proporcionan los siguientes valores de pKa:

$$pKa's_{H_3PO_4} = 2.2, 7.2 \text{ y } 12.3; \quad pKa_{(NH_4^+/NH_3)} = 9.2$$

Respuesta

Al disolver el fosfato diamónico (hidrogenofosfato de amonio) en agua, se llevan a cabo las siguientes reacciones:
Disociación de la sal:

$$(NH_4)_2\,HPO_4(s) \xrightarrow{H_2O} 2NH_4^+(ac) + HPO_4^{2-}(ac)$$

Reacción de disociación de la especie ácida:

$$NH_4^+(ac) \leftrightarrows H^+(ac) + NH_3(ac)$$

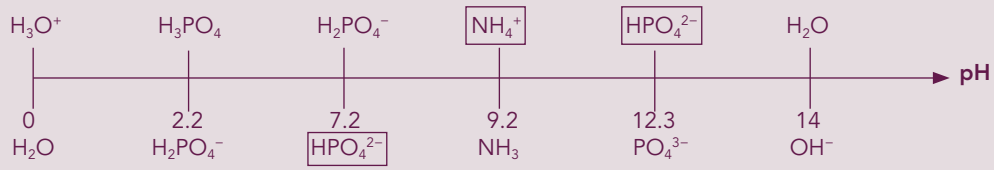
Reacción de disociación del anfolito cuando se comporta como ácido:

$$HPO_4^{2-}(ac) \leftrightarrows H^+(ac) + PO_4^{3-}(ac)$$

Reacción de hidrólisis del anfolito cuando se comporta como base:

$$HPO_4^{2-}(ac) + H_2O \leftrightarrows H_2PO_4^-(ac) + OH^-$$

Tomando en cuenta los valores de pKa proporcionados, trazaremos una escala de pH para situar les especies con propiedades ácido-base.



Al equilibrio se tienen las siguientes especies en disolución:

Especie	Concentración
NH_4^+ (ácido)	0.4 M
HPO_4^{2-} (anfolito)	0.2 M

Respuesta (*continuación*)

Para calcular el pH evaluamos la fuerza de las especies ácidas o básicas en disolución. Auxiliándonos de la escala se puede inferir que se tienen dos especies ácidas en disolución (NH_4^+ y HPO_4^{2-}) y una especie básica (HPO_4^{2-}), por tanto el pH lo impone el ácido más fuerte y la base más fuerte, es decir, el ion amonio y HPO_4^{2-} considerado como base. Se aplica la fórmula siguiente:

$$pH = \frac{pKa_1 + pKa_2}{2}$$

$$pH = \frac{7.2 + 9.2}{2} = 8.2$$

$$pH = 8.2$$

En este problema hay que hacer notar lo siguiente: la fórmula anterior sólo se debe usar cuando la concentración de las especies es la misma, en este caso la concentración del amonio es el doble de la del hidrogenofosfato por lo que debemos trabajar con las dos expresiones de la ecuación de Henderson-Hasselbalch para calcular el pH de la disolución.

$$pH = 7.2 + \log \frac{\left|HPO_4^{2-}\right|}{\left|H_2PO_4^{-}\right|}$$

$$pH = 9.2 + \log \frac{\left|NH_3\right|}{\left|NH_4^{+}\right|}$$

Se sustituyen las concentraciones y se suman las dos ecuaciones.

$$pH = 7.2 + \log \frac{0.2}{\varepsilon}$$

$$pH = 9.2 + \log \frac{\varepsilon}{0.4}$$

$$2pH = 16.4 + \log \frac{1}{2} = 16.4 - 0.3$$

$$pH = \frac{16.1}{2} = 8.05$$

$$pH = 8.05$$

Como se observa, cuando las concentraciones de las dos especies son distintas, sí hay diferencia en el valor del pH de la disolución.

Problema resuelto

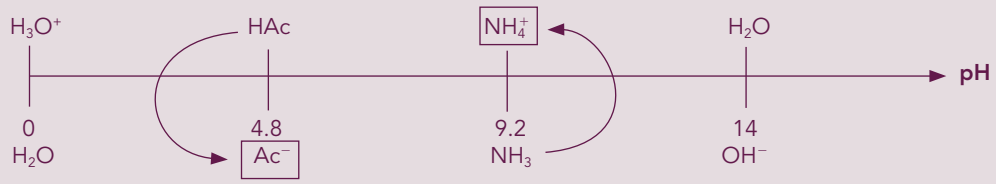
De una disolución constituida por una mezcla de ácido acético 0.1 M y amoniaco 0.2 M. Calcula:

a) El pH de la disolución.
b) La constante de la reacción.
c) La concentración de ácido acético al equilibrio.

El pKa del par acético/acetato es de 4.8 y el del amonio/amoniaco es de 9.2.

Respuesta

Se inicia con el planteamiento de la escala de pH:



A través de la escala de pH, se infiere que el ácido acético reacciona con el amoniaco para producir los iones acetato y amonio. Lo anterior se expresa mediante la siguiente reacción, en la que se incluye la tabla de variación de concentraciones de las especies:

	$HAc(ac)$	+	$NH_3(ac)$	⇆	$NH_4^+(ac)$	+	$Ac^-(ac)$
Inicio	0.1 M		0.2 M				
Al equilibrio	$\varepsilon \approx 0$		0.1 M		0.1 M		0.1 M

Al equilibrio se tienen las siguientes especies en disolución:

Especie	Concentración
NH_3(base)	0.1 M
NH_4^+ (ácido)	0.1 M
Ac^- (base)	0.1 M

El pH lo impondrá el ácido más fuerte y la base más fuerte, es decir quedará regulado por el par amonio/amoniaco.

$$pH = pKa + \log\frac{|Base|}{|Ácido|}$$

$$pH = 9.2 + \log\frac{|NH_3|}{|NH_4^+|}$$

$$pH = 9.2 + \log\frac{0.1}{0.1} = 9.2$$

$$pH = 9.2$$

Cálculo de la constante de reacción
Al aplicar la ley de acción de masas, la constante de equilibrio de la reacción queda expresada como:

$$K_{reacción} = \frac{|Ac^-||NH_4^+|}{|HAc||NH_3|}$$

Respuesta (*continuación*)

Si la expresión anterior se multiplica y divide por la concentración del protón, la igualdad no se altera y se hacen aparecer las constantes de acidez de los dos pares.

$$K_{reacción} = \frac{|Ac^-||NH_4^+|}{|HAc||NH_3|} \times \frac{|H^+|}{|H^+|} = \frac{10^{-4.8}}{10^{-9.2}} = 10^{4.4} = 2.51 \times 10^4$$

Cálculo de la concentración de ácido acético al equilibrio
Para calcular la concentración de ácido acético al equilibrio, se considerará la constante de equilibrio y la concentración de las otras especies involucradas.

$$K_{reacción} = \frac{|Ac^-||NH_4^+|}{|HAc||NH_3|} = 10^{4.4}$$

$$|HAc| = \frac{|Ac^-||NH_4^+|}{|NH_3|K_{reac.}} = \frac{10^{-2}}{10^{-1} \times 10^{4.4}} = 10^{-5.4} = 3.98 \times 10^{-6} M$$

Problema resuelto

El carbonato de sodio se obtiene industrialmente mediante el proceso Soda Solvay que consiste en tratar piedra caliza (carbonato de calcio) con cloruro de sodio mediante el proceso al amoniaco. Se emplea en la industria siderúrgica, en la elaboración de vidrio, en la industria de los detergentes, cerámica, jabones y limpiadores para el hogar; en textiles, etc.
A 25 mL de una muestra problema que puede contener NaOH, $NaHCO_3$ o Na_2CO_3 en mezcla compatible, se adicionan unas gotas de fenolftaleína. La solución adquiere una coloración rosa, se titula con HCl hasta solución incolora y se adicionan unas gotas de mezcla de indicadores anaranjado de metilo-verde de bromocresol. La solución se torna verde, se continúa la titulación hasta que vire a naranja. En estas condiciones se observa que el volumen del primer punto final de la titulación es menor que el segundo. ¿Qué especies del ácido carbónico se pueden identificar con el procedimiento anteriormente descrito?

Datos:
pKa (H_2CO_3) = 6.3 y 10.1 a I = 0.1 M

Indicador	Intervalo de vire
Fenolftaleína	8.3 - 10
Anaranjado de metilo	3.1 - 4.4
Verde de bromocresol	3.8 - 5.4

Respuesta

Para hacer la predicción de reacciones que ocurren, es necesario construir una escala de pH y localizar los pares ácido-base de los sistemas del ácido carbónico dentro de la misma:

De acuerdo con el enunciado del problema que indica que se tiene una mezcla compatible de carbonato, bicarbonato y sosa, las especies que pueden coexistir en disolución son:

a) Carbonato y sosa.
b) Carbonato y bicarbonato.

Respecto a los volúmenes consumidos de ácido clorhídrico cuando se utilizan los dos indicadores, se hace la siguiente reflexión:

Caso a): Cuando se inicia la adición de clorhídrico, la primera reacción que se lleva a cabo es:

$$OH^-(ac) + H_3O^+ \leftrightarrows 2H_2O$$

Al terminar la reacción anterior, se dará la reacción entre el carbonato y el ácido clorhídrico:

$$CO_3^{2-}(ac) + H_3O^+ \leftrightarrows HCO_3^-(ac) + H_2O$$

Respuesta (*continuación*)

Cuando termina la segunda reacción planteada, la fenolftaleína virará del rosa al incoloro. Al introducir la mezcla de indicadores y continuar la titulación con clorhídrico, se lleva a cabo la reacción con el bicarbonato que proviene de la segunda reacción:

$$HCO_3^-(ac) + H_3O^+ \leftrightarrows H_2CO_3(ac) + H_2O$$

Por tanto, el volumen gastado para el primer punto final (detectado con fenolftaleína) será mayor al segundo (detectado con la mezcla de indicadores).

Caso b): Al iniciar la titulación, se verifica la reacción entre el carbonato y el ácido clorhídrico; la ecuación es la siguiente:

$$CO_3^{2-}(ac) + H_3O^+ \leftrightarrows HCO_3^-(ac) + H_2O$$

Al finalizar la reacción la fenolftaleína vira del rosa al incoloro, se adiciona entonces la mezcla de indicadores y se continúa la titulación con HCl; la ecuación que representa la segunda reacción es:

$$HCO_3^-(ac) + H_3O^+ \leftrightarrows H_2CO_3(ac) + H_2O$$

En la situación que se presenta en este ejemplo, el aporte de bicarbonato que interviene en la segunda reacción será el que forma parte de la composición de la mezcla y que proviene de la titulación del carbonato, por tanto el volumen consumido en la primera reacción (la cual se detectó el punto final con fenolftaleína), será menor que el segundo (detectado con la mezcla de indicadores).
Conclusión: la muestra contenía una mezcla de carbonato y bicarbonato.

Problema resuelto

¿Cuál es el pH de una disolución amortiguadora constituida por 0.05 M de la especie protonada y 0.04 M de la especie desprotonada? Considera un pKa de 6.09.

Respuesta

Para calcular el pH de la disolución se utiliza la ecuación de Henderson-Hasselbalch.

$$pH = pKa + \log\frac{|Base|}{|Ácido|}$$

$|Base| = 0.04$ M y $|Ácido| = 0.05$ M

$$pH = 6.09 + \log\frac{0.04}{0.05} = 6.0$$

$$pH = 6.0$$

Problema resuelto

HOCN tiene una constante de disociación de 1.2×10^{-4}.

a) Calcula la relación de concentraciones de HOCN y de OCN^- que se requiere para tener una disolución de $[H^+] = 10^{-4}$ M?
b) ¿Cuál será la relación de concentraciones si el pH = 3.50?

Respuesta

Para conocer la relación de concentraciones de HOCN y de OCN^-a pH = 4.0, se recurre a la ecuación de Henderson-Hasselbalch. pKa = 3.92

$$pH = 3.92 + \log\frac{|OCN^-|}{|HOCN|}$$

Respuesta (*continuación*)

$$4.0 = 3.92 + \log\frac{|OCN^-|}{|HOCN|}$$

$$10^{0.08} = \log\frac{|OCN^-|}{|HOCN|}$$

$$1.2 = \frac{|OCN^-|}{|HOCN|}$$

$$|OCN^-| = 1.2|HOCN|$$

Si el pH de la disolución es de 3.5, la relación de concentraciones de la forma ácida y básica será:

$$pH = 3.92 + \log\frac{|OCN^-|}{|HOCN|}$$

$$3.5 = 3.92 + \log\frac{|OCN^-|}{|HOCN|}$$

$$10^{-0.42} = \log\frac{|OCN^-|}{|HOCN|}$$

$$0.38 = \frac{|OCN^-|}{|HOCN|}$$

$$|OCN^-| = 0.38|HOCN|$$

Problema resuelto

Calcula el número de moles de acetato de sodio ($NaH_3C_2O_2$) que se adicionaría a 1.0 L de ácido acético (H_3CCOOH) 0.50 M para preparar una disolución que tuviera un pH 5 4.00? Ka 5 1.8 3 10^{-5}

Respuesta

pKa 5 4.74

$$pH = 4.74 + \log\frac{|Ac^-|}{|HAc|}$$

$$4.0 = 4.74 + \log\frac{|Ac^-|}{0.5\ mol/L}$$

$$10^{-0.744} = \log\frac{|Ac^-|}{0.5}$$

$$0.182 = \frac{|Ac^-|}{0.5}$$

$$|Ac^-|0.182 \times 0.5 = 0.091\ mol/LL$$

Se debe adicionar 0.091 mol de acetato de sodio a un litro de disolución de ácido acético 0.5 M para tener un pH 5 4.0.

09_PROBLEMARIO QUIMICA_CH09 CD.indd 15 11/3/10 7:52:01 PM

Problema resuelto

Una disolución contiene $(NH_4)_2HPO_4$ en concentración 0.2 M y amoniaco en concentración 0.2M, escribe los equilibrios existentes en disolución así como el pH de la disolución resultante. Se proporcionan los siguientes valores de pKa: $pKa's_{H_3PO_4} = 2.2, 7.2$ y 12.3; $pKa_{(NH_4^+/NH_3)} = 9.2$

Respuesta

Al disolver el $(NH_4)_2HPO_4$ en agua, se llevan a cabo las siguientes reacciones:
Disociación de la sal:

$$(NH_4)_2HPO_4(s) \xrightarrow{H_2O} 2NH_4^+(ac) + HPO_4^{2-}(ac)$$

Reacción de disociación de la especie ácida:

$$NH_4^+(ac) \leftrightarrows H^+(ac) + NH_3(ac)$$

Reacción de disociación del anfolito cuando se comporta como ácido:

$$HPO_4^{2-}(ac) \leftrightarrows H^+(ac) + PO_4^{3-}(ac)$$

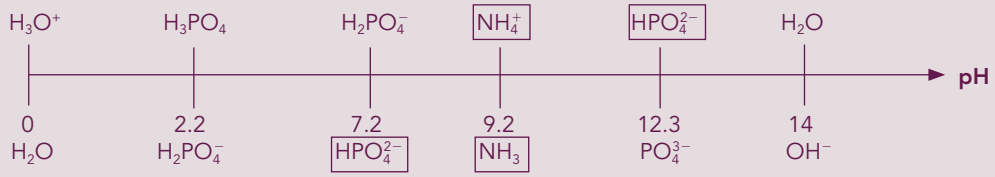
Reacción de hidrólisis del anfolito cuando se comporta como base:

$$HPO_4^{2-}(ac) + H_2O \leftrightarrows H_2PO_4^-(ac) + OH^-$$

Reacción de hidrólisis del amoniaco:

$$NH_3(ac) + H_2O \leftrightarrows NH_4^+(ac) + OH^-$$

Auxiliándonos de los valores de pKa proporcionados, situaremos los diferentes pares ácido-base dentro de la escala de pH. Se destacan las especies en disolución.



Por tanto, al equilibrio se tienen las siguientes especies en disolución:

Especie	Concentración
NH_4^+ (ácido)	0.4 M
NH_3 (base)	0.2 M
HPO_4^{2-} (anfolito)	0.2 M

Para calcular el pH se toma en cuenta el ácido más fuerte y la base más fuerte:
Entre el ion amonio y el hidrogenofosfato (considerado como ácido), el ácido más fuerte es el ion amonio.
Entre el ion hidrogenofosfato (considerado como base) y amoniaco, la base más fuerte es el amoniaco, por tanto el pH se encuentra regulado por el par amonio-amoniaco. Para calcular el pH aplicamos la ecuación de Henderson-Hasselbalch.

$$pH = pKa + \log\frac{|Base|}{|Ácido|}$$

$$pH = 9.2 + \log\frac{|NH_3|}{|NH_4^+|}$$

$$pH = 9.2 + \log\frac{0.2}{0.4} = 8.9$$

$$pH = 8.9$$

Problema resuelto

Una muestra de carbonato de calcio impuro, que pesa 0.4348 g se trata con 50.00 mL de ácido clorhídrico 0.1326 M. Después de expulsar por ebullición el dióxido de carbono, el exceso de ácido consume 5.45 mL de base en su valoración por retroceso. La relación de volumen ácido/base es 1.050. Calcula el porcentaje de carbonato de calcio en la muestra.

Respuesta

La reacción que se lleva a cabo entre el carbonato de calcio y el ácido clorhídrico es:

$$CaCO_3(s) + 2H_3O^+ \leftrightarrows H_2CO_3(ac) + Ca^{2+} + 2H_2O$$

La reacción de titulación por retroceso queda representada mediante la siguiente ecuación:

$$H_3O^+ + OH^-(ac) \leftrightarrows H_2O$$

Cálculo de la cantidad de sustancia de ácido clorhídrico que reaccionó con el carbonato de calcio.
Se adicionaron 50.00 mL de HCl 0.1326 M a la muestra problema anterior, entonces:

$$n^0_{HCl} = 0.1326\ {}^{mol}\!/_{L} \times 0.050\ L = 6.63x10^{-3}\ mol$$

A la muestra de carbonatos se adicionaron 6.63×10^{-3} moles de HCl. De la titulación con NaOH se deducen las moles de HCl que quedaron sin reaccionar con la muestra en estudio. El enunciado del problema indica que la relación

$$\frac{\text{volumen HCl}}{\text{volumen NaOH}} = 1.050$$

$$\text{volumen HCl} = 1.050 \times 5.45\ mL = 5.72\ mL$$

Entonces, son 5.72 mL de HCl que quedaron en exceso; se procede a calcular el número de moles contenidos en 5.72 mL de HCl 0.1326M.

$$n_{(HCl)_{exceso}} = 0.00572L \times 0.1326\ {}^{mol}\!/_{L} = 7.58 \times 10^{-4}\ mol$$

El número de moles de HCl que reaccionaron con la muestra de carbonato de calcio es:

$$n = n^0 - n_{exceso} = (6.63 \times 10^{-3} - 7.58 \times 10^{-4})\ mol = 5.87 \times 10^{-3}\ mol$$

Cálculo del porcentaje de carbonato de calcio en la muestra problema
Se retoma la ecuación de la reacción entre el carbonato de calcio y el ácido clorhídrico:

$$CaCO_3(s) + 2H_3O^+ \leftrightarrows H_2CO_3(ac) + Ca^{2+} + 2H_2O$$

La ecuación muestra la relación estequiométrica entre el carbonato de calcio y el ácido clorhídrico que es 1:2; por tanto, se sabe que 5.87×10^{-3} moles de HCl reaccionaron con 2.935×10^{-3} moles de carbonato de calcio. Con el dato anterior se calcula la pureza del carbonato de calcio. La masa molar del carbonato de calcio es de 100 g/mol.

$$\text{masa}_{CaCO_3} = 2.935 \times 10^{-3}\ mol \times 100\ {}^{g}\!/_{mol} = 0.2935\ g$$

$$\%CaCO_3 = \frac{0.2935\ g}{0.4348\ g} \times 100 = 67.5\%$$

Problema resuelto

Se preparó una disolución saturada de NH_4Cl añadiendo el reactivo sólido al agua hasta no poder disolverlo más. La mezcla estaba muy fría y tenía una capa de NH_4Cl no disuelto en el fondo. Cuando la mezcla alcanzó la temperatura ambiente, ya no había NH_4Cl sólido presente. Explica qué sucedió. ¿La disolución seguía saturada?

Respuesta

Las disoluciones de sales de amonio en agua son ejemplos de reacciones endotérmicas, es decir, que toman calor del ambiente para poderse disolver, por tal razón, cuando se preparó una disolución saturada de cloruro de amonio, ésta estaba fría. La disolución saturada así formada, coexistía con el exceso de cloruro de amonio sin disolver, cuando se elevó la temperatura hasta alcanzar la ambiente, el cloruro de amonio en exceso, se disolvió.
Para poder saber si la disolución continúa saturada, es necesario añadir cristales de la sal, si se disuelve indica que no está saturada.

Problema resuelto

Si una disolución de cierta sal en agua está saturada a cierta temperatura y se añaden unos cuantos cristales de la sal a la disolución, ¿qué supones que suceda? ¿Qué ocurre si la misma cantidad de cristales de sal se añade a una disolución no saturada? ¿Qué esperas que pase si se baja lentamente la temperatura de esta segunda disolución?

Respuesta

Cuando se añaden unos cuantos cristales de la sal a una disolución saturada de la misma sal, el sólido se irá al fondo del recipiente ya que no es posible disolverlo.
Si la misma cantidad de sal se introduce en una disolución no saturada en la misma sal, ésta se disolverá. Si se baja la temperatura de la disolución anterior, es posible que el sólido se separe de la disolución puesto que se podría formar una disolución saturada. La solubilidad de las sales la mayoría de las veces disminuye con la temperatura.

Problema resuelto

Si sabes que la solubilidad del oxalato de amonio a 25 °C es de 0.525 g por 10 g de agua, ¿cómo prepararías 1 L de solución saturada de oxalato de amonio?

Respuesta

Para preparar un litro de disolución saturada de oxalato de amonio, se requiere pesar 52.5 g de la sal.

Alerta

Cuando se trata de sales que tienen la misma estequiometría, basta con analizar los valores de las constantes del producto de solubilidad para inferir cuál es la sal más soluble. El carbonato de magnesio tiene un valor de constante más grande, por tanto es la sal más soluble.

Problema resuelto

De las siguientes sales, plantea el equilibrio de solubilidad y su constante de equilibrio.
¿Cuál es la más soluble? Se proporcionan los siguientes datos:

$pKs_{CaCO_3} = 8.32$; $pKs_{BaCO_3} = 8.29$; $pKs_{MgCO_3} = 4.67$.

a) $CaCO_3$
b) $BaCO_3$
c) $MgCO_3$

Respuesta (*continuación*)

a) $CaCO_3(s) \leftrightarrows Ca^{2+}(ac) + CO_3^{2-}(ac)$

$$Ks = \left|Ca^{2+}\right|\left|CO_3^{2-}\right| = 10^{-8.32}$$

b) $BaCO_3(s) \leftrightarrows Ba^{2+}(ac) + CO_3^{2-}(ac)$

$$Ks = \left|Ba^{2+}\right|\left|CO_3^{2-}\right| = 10^{-8.29}$$

c) $MgCO_3(s) \leftrightarrows Mg^{2+}(ac) + CO_3^{2-}(ac)$

d) $$Ks = \left|Mg^{2+}\right|\left|CO_3^{2-}\right| = 10^{-4.7}$$

Para saber cuál de las sales es más soluble se calcula su solubilidad.
Al equilibrio: $\left|M^{2+}\right| = \left|CO_3^{2-}\right| = s$ (solubilidad), si se sustituye "s" en la expresión del producto de solubilidad (Ks):

$$Ks = S^2$$

$$s = \sqrt{Ks}$$

a) $s = \sqrt{10^{-8.32}} = 10^{-4.16}\,M = 6.92\times10^{-5}\,M$

b) $s = \sqrt{10^{-8.29}} = 10^{-4.145}\,M = 7.16\times10^{-5}\,M$

c) $s = \sqrt{10^{-4.7}} = 10^{-2.35}\,M = 4.47\times10^{-3}\,M$

Conclusión: El carbonato de magnesio es la sal más soluble.

Problema resuelto

¿Cuánta agua se necesita para disolver un gramo de las siguientes sustancias?:

a) $CaCO_3$
b) $CaCl_2\cdot6H_2O$
c) $CaSO_4$

Datos:
Solubilidad del $CaCl_2\cdot6H_2O$ = 74.5 g/100 g de agua a 20 °C

$$pKs_{CaCO_3} = 8.32;\ pKs_{CaSO_4} = 5.04$$

Respuesta

De las tres sales de calcio estudiadas, se observa que el cloruro de calcio es una sal muy soluble y que el carbonato y el sulfato de calcio son poco solubles.

a) Cálculo para determinar la cantidad de agua que se necesita para disolver 1 g de $CaCO_3$.
Tomamos como punto de partida el equilibrio de solubilidad de la sal y su correspondiente constante de equilibrio.

$$CaCO_3(s) \leftrightarrows Ca^{2+}(ac) + CO_3^{2-}(ac)$$

$$Ks = \left|Ca^{2+}\right|\left|CO_3^{2-}\right| = 10^{-8.32}$$

La solubilidad de la sal está representada por la concentración del ion calcio y el ion carbonato en la disolución saturada. Si se representa por "s" la concentración de cada ion en la disolución saturada y se sustituye en la ecuación del producto de solubilidad se tiene entonces:

Respuesta (*continuación*)

$$Ks = \left|Ca^{2+}\right|\left|CO_3^{2-}\right| = 10^{-8.32}$$

$$Ks = s^2 = 10^{-8.32}$$

$$s = \sqrt{Ks} = \sqrt{10^{-8.32}} = 10^{-4.16}M = 6.92'10^{-5}M$$

Cálculo de la concentración en g/L:
La masa molar del $CaCO_3$ es de 100 g/mol.

$$C_{CaCO_3}\left(\frac{g}{L}\right) = \frac{6.92\times10^{-5}\ mol}{L}\times\frac{100\ g}{mol} = 6.92\times10^{-3}\ \frac{g}{L}$$

Por tanto, la solubilidad del carbonato de calcio es de 6.92×10^{-3}g/L. Con este dato ya es posible calcular la cantidad de agua que se necesita para disolver 1 g de sal.

$$V_{H_2O} = \frac{1\ L}{6.92\times10^{-3}\ g}\times1\ g = 144.5\ L$$

Se requiere 144.5 L de agua para disolver 1 g de carbonato de calcio.

b) Cálculo para determinar la cantidad de agua que se necesita para disolver 1 g de $CaCl_2{\cdot}6H_2O$.
Se sabe que la solubilidad del $CaCl_2{\cdot}6H_2O$ es de 74.5 g/100 g de agua a 20 °C. Si se considera la densidad del agua como 1 g/mL, la solubilidad de la sal la consideraremos entonces como 74.5 g/100m L de agua.

$$V_{H_2O} = \frac{100\ mL}{74.5\ g}\times1\ g = 1.3\ mL$$

Se requiere de 1.3 mL de agua para disolver 1 g de cloruro de calcio hexahidratado.

c) Cálculo para determinar la cantidad de agua que se necesita para disolver 1 g de $CaSO_4$.
El razonamiento es muy similar al efectuado en a).
Equilibrio de solubilidad de la sal:

$$CaSO_4(s) \leftrightarrows Ca^{2+}(ac) + SO_4^{2-}(ac)$$

$$Ks = \left|Ca^{2+}\right|\left|SO_4^{2-}\right| = 10^{-5.04}$$

$$Ks = s^2 = 10^{-5.04}$$

$$s = \sqrt{Ks} = \sqrt{10^{-5.04}} = 10^{-2.52}M = 3.02\times10^{-3}M$$

Cálculo de la concentración en g/L.
La masa molar del $CaSO_4$ es de 136.14 g/mol.

$$C_{CaCO_3}\left(\frac{g}{L}\right) = \frac{3.02\times10^{-3}\ mol}{L}\times\frac{136.14\ g}{mol} = 0.411\ \frac{g}{L}$$

Cálculo de la cantidad de agua que se necesita para disolver 1 g de sal.

$$V_{H_2O} = \frac{1L}{0.411\ g}\times1\ g = 2.43\ L$$

Se requiere de 2.43 L de agua para disolver 1 g de sulfato de calcio.

Problema resuelto

Se desea realizar una separación de hierro y níquel en una muestra en disolución que contiene $|Fe^{3+}| = |Ni^{2+}| = 0.01$ M, por medio de la precipitación de hidróxidos. Resuelve lo siguiente:

a) Calcula el pH de inicio y fin de precipitación de cada hidróxido. Considera una cuantitatividad del 99.9% y los siguientes valores: $pKs_{(Fe(OH)_3} = 37.9$ y $pKs_{(Ni(OH)_2} = 14.3$

b) ¿Es posible hacer una separación de los dos cationes por precipitación de sus hidróxidos correspondientes? ¿Cuáles serían las condiciones de separación?

Respuesta

Cálculo del pH de inicio y fin de precipitación de cada hidróxido.
Para Fe(III):
Equilibrio de solubilidad:

$$Fe(OH)_3(s) \leftrightarrows Fe^{3+}(ac) + 3OH^-(ac)$$

La constante del producto de solubilidad es:

$$Ks = |Fe^{3+}||OH^-|^3 = 10^{-37.9}$$

Cálculo de la concentración de OH^- para que se inicie la precipitación de Fe(III):
De la constante del producto de solubilidad:

$$|OH^-| = \sqrt[3]{\frac{Ks}{|Fe^{3+}|}} = \sqrt[3]{\frac{10^{-37.9}}{10^{-2}}} = 10^{-11.97}\,M = 1.08\times10^{-12}\,M$$

$$pOH = 11.97 \Rightarrow pH = 2.03$$

Cálculo de la concentración de OH^- de fin precipitación de Fe(III) con una cuantitatividad de 99.9%.
Para cumplir con la condición de cuantitatividad, la concentración de Fe(III) debe ser 0.1% de la concentración inicial, es decir 10^{-5} M.

$$|OH^-| = \sqrt[3]{\frac{Ks}{|Fe^{3+}|}} = \sqrt[3]{\frac{10^{-37.9}}{10^{-5}}} = 10^{-10.97}\,M = 1.09\times10^{-11}\,M$$

$$pOH = 10.97 \Rightarrow pH = 3.03$$

Para Ni(II) se realiza un razonamiento similar al anterior.
Equilibrio de solubilidad:

$$Ni(OH)_2(s) \leftrightarrows Ni^{2+}(ac) + 2OH^-(ac)$$

La constante del producto de solubilidad es:

$$Ks = |Ni^{2+}||OH^-|^2 = 10^{-14.3}$$

Cálculo de la concentración de OH^- para que se inicie la precipitación de Ni(II):
De la constante del producto de solubilidad:

$$|OH^-| = \sqrt[2]{\frac{Ks}{|Ni^{2+}|}} = \sqrt[2]{\frac{10^{-14.3}}{10^{-2}}} = 10^{-6.15}\,M = 7.08\times10^{-7}\,M$$

$$pOH = 6.15 \Rightarrow pH = 7.85$$

Cálculo de la concentración de OH^- de fin precipitación de Ni(II) con una cuantitatividad de 99.9%.
Para cumplir con la condición de cuantitatividad, la concentración de Ni(II) debe ser 0.1% de la concentración inicial, es decir 10^{-5} M.

$$|OH^-| = \sqrt[2]{\frac{Ks}{|Ni^{2+}|}} = \sqrt[2]{\frac{10^{-14.3}}{10^{-5}}} = 10^{-4.65}\,M = 2.24\times10^{-5}\,M$$

$$pOH = 4.65 \Rightarrow pH = 9.35$$

Alerta

$pH + pOH = 14$

Respuesta (*continuación*)

Para separar el Fe(III) del Ni(II) se ajusta el pH dentro del siguiente intervalo:

$$3.0 \leq pH \leq 7.9$$

Que corresponde a la situación en la que precipita Fe (III) al 99.9% y se inicia la precipitación de Ni(II). En este caso se utilizaría una disolución amortiguadora de pH, por ejemplo de pH = 6.0 para lograr dicha separación.

Balanceo de ecuaciones químicas por el método de las semirreacciones

La reacción química es un proceso en el cual un sistema, caracterizado por las propiedades físicas y químicas de las especies que lo constituyen, experimenta cambios.

Hay cierto número de reglas y de recomendaciones generales para balancear las ecuaciones que representan a las reacciones redox. Los pasos son los siguientes:

1. Dividir la ecuación general en las dos semirreacciones.
2. Al ajustar cada una de las semirreacciones, considera que debes igualar el número de átomos de cada elemento (excepto oxígeno e hidrógeno).
   - **a)** Nivelar el número de átomos de oxígeno agregando moléculas de agua en el lado de la ecuación donde haya un número menor de átomos de oxígeno.
   - **b)** Igualar el número de átomos de hidrógeno, agregando protones en el lado de la ecuación donde haya un número menor de iones hidronio.
   - **c)** Igualar el número de cargas en ambos miembros de la ecuación, sumando electrones del lado de la ecuación donde la suma de las cargas iónicas es más positiva.
   - **d)** Si la reacción ocurre en medio neutro o básico, remueve los iones hidronio o protones de la ecuación, añadiendo a ambos lados de la misma un número de iones hidroxilo igual al de protones que aparecen en la ecuación. Combina estos iones para formar moléculas de agua y simplifica.
3. Combinar las dos semirreacciones balanceadas e igualar el número de electrones que aparecen en cada semirreacción multiplicando por un factor apropiado.

Problemas resueltos

Óxido-reducción y electroquímica

Problema resuelto

Calcula los estados de oxidación de todos los elementos en los siguientes compuestos:

a) H_2O_2
b) CaC_2
c) H_2SO_4
d) Li_3N
e) MnO_4^-

Respuesta

a) H_2O_2 (peróxido de hidrógeno o agua oxigenada). Tomando en cuenta las reglas 3 y 4, los estados de oxidación del hidrógeno y del oxígeno serán, respectivamente, $+1$ y -1.
b) CaC_2 (carburo de calcio). Esta sustancia se emplea para producir acetileno en el laboratorio y aunque el carbono es bastante inerte en condiciones ordinarias, reacciona a temperaturas elevadas con los metales y semimetales, formando los carburos correspondientes. En el carburo de calcio, al carbono se le asigna un número de oxidación de -1 y al calcio, por pertenecer al grupo 2 de la tabla periódica, de $+2$.
c) H_2SO_4 (ácido sulfúrico). Considerando las reglas 3 y 4, los estados de oxidación del hidrógeno y del oxígeno serán $+1$ y -2, respectivamente. El azufre tiene un estado de oxidación de $+6$.
d) Li_3N (nitruro de litio). Al nitrógeno se le fija un número de oxidación de -3 y al litio, por pertenecer al grupo 1 de la tabla periódica, de $+1$.
e) MnO_{4-} (ion permanganato). Aplicando las reglas 3 y 5, los estados de oxidación del oxígeno y el manganeso son, respectivamente, -2 y $+7$.

Alerta

Antes de resolver los ejercicios, recuerda las reglas para asignar estados de oxidación a los elementos dentro de un compuesto:

1. En los elementos libres, el número o estado de oxidación de cualquiera de sus átomos es cero.
2. En los iones simples (iones de un solo átomo), el número de oxidación es igual a la carga del ion.
3. En la mayor parte de los compuestos que contienen oxígeno, el número de oxidación del elemento es –2 a excepción de los peróxidos, donde es –1.
4. En la mayoría de los compuestos hidrogenados, el grado de oxidación del hidrógeno es +1 excepto en los hidruros, donde es –1.
5. En las especies neutras, los números de oxidación de todos los átomos deben sumar cero. En los iones complejos (partículas cargadas que contienen más de un átomo), la suma de los números de oxidación de todos los átomos debe ser igual a la carga del ion.

Problema resuelto

Identifica los oxidantes y los reductores conjugados de las siguientes reacciones redox.

a) $2FeCl_3 + H_2S \leftrightarrows 2FeCl_2 + 2HCl + S$
b) $2HNO_3 + 3H_2S \leftrightarrows 2NO + 3S + 4H_2O$
c) $Na_2Cr_2O_7 + 3SO_2 + H_2SO_4 \leftrightarrows Cr_2(SO_4)_3 + Na_2SO_4 + H_2O$

Respuesta

Los pares redox conjugados son:

a) Fe^{3+}/Fe^{2+} y S/H_2S [también se puede escribir como S(0)/S(−II)]
b) NO_3^-/NO [también se puede expresar como N(V)/N(II)] y S / H_2S [o como S(0) / S(−II)]
c) $Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}$ [se expresa también como Cr(VI)/Cr(III)] y SO_4^{2-}/SO_2 o S(VI)/S(IV)

Alerta

Se recomienda consultar el libro Rojo de la IUPAC.

Problema resuelto

Balancea por el método de las semirreacciones la ecuación de la siguiente reacción:
$MnO_4^-(ac) + H_2C_2O_4(ac) \leftrightarrows Mn^{2+}(ac) + CO_2\uparrow$ (medio ácido)

Respuesta

1) Plantea las dos semirreacciones:

$MnO_4^-(ac) \leftrightarrows Mn^{2+}(ac)$
$H_2C_2O_4(ac) \leftrightarrows CO_2\uparrow$

2) Balancea cada una de las semirreacciones:

$8H^+(ac) + MnO_4^-(ac) \leftrightarrows Mn^{2+}(ac) + 4H_2O$ (balance de masa)
$H_2C_2O_4(ac) \leftrightarrows 2CO_2\uparrow + 2H^+(ac)$ (balance de masa)
$8H^+(ac) + MnO_4^-(ac) + 5e^- \leftrightarrows Mn^{2+}(ac) + 4H_2O$ (balance de carga y de masa)
$H_2C_2O_4(ac) \leftrightarrows 2CO_2\uparrow + 2H^+(ac) + 2e^-$ (balance de carga y de masa)

3) Combina las dos semirreacciones balanceadas e iguala el número de electrones que aparecen en cada semirreacción multiplicando la semirreacción del manganeso por 2 y la del ácido oxálico por 5.

$2[8\ H^+(ac) + MnO_4^-(ac) + 5e^- \leftrightarrows Mn^{2+}(ac) + 4H_2O]$
$5[H_2C_2O_4(ac) \leftrightarrows 2\ CO_2\uparrow + 2H^+(ac) + 2\ e^-]$

$16H^+(ac) + 2MnO_4^-(ac) + 5H_2C_2O_4(ac) + 10e^- \leftrightarrows 2Mn^{2+}(ac) + 10CO_2\uparrow + 8H_2O + 10H^+(ac) + 10e^-$

4) Simplifica la última ecuación:

$6H^+(ac) + 2MnO_4^-(ac) + 5H_2C_2O_4(ac) \leftrightarrows 2Mn^{2+}(ac) + 10CO_2\uparrow + 8H_2O$

Alerta

En la ecuación final ya no deben aparecer los electrones intercambiados.

Problema resuelto

Balancea la ecuación de la siguiente reacción por el método de semirreacciones:
$SO_3^{2-} \leftrightarrows SO_4^{2-} + S^{2-}$ (medio básico)

Respuesta

Plantea las dos semirreacciones:

$SO_3^{2-} \leftrightarrows SO_4^{2-}$
$SO_3^{2-} \leftrightarrows S^{2-}$

1. Balancea las semirreacciones:

$H_2O + SO_3^{2-} \leftrightarrows SO_4^{2-} + 2H^+$ (balance de masa)
$6H^+ + SO_3^{2-} \leftrightarrows S^{2-} + 3H_2O$ (balance de masa)
$H_2O + SO_3^{2-} \leftrightarrows SO_4^{2-} + 2H^+ + 2e^-$ (balance de carga y de masa)
$6e^- + 6H^+ + SO_3^{2-} \leftrightarrows S^{2-} + 3H_2O$ (balance de carga y de masa)

2. Agrega OH^- a cada lado de la ecuación para mostrar el medio básico:

$2OH^- + H_2O + SO_3^{2-} \leftrightarrows SO_4^{2-} + 2H^+ + 2e^- + 2OH^-$
$6OH^- + 6e^- + 6H^+ + SO_3^{2-} \leftrightarrows S^{2-} + 3H_2O + 6OH^-$

Simplifica cada semirreacción:

$2OH^- + SO_3^{2-} \leftrightarrows SO_4^{2-} + 2e^- + H_2O$ (1)
$3H_2O + 6e^- + SO_3^{2-} \leftrightarrows S^{2-} + 6OH^-$ (2)

3. Combina las dos semirreacciones balanceadas e iguala el número de electrones que aparecen en cada semirreacción multiplicando la semirreacción (1) por 3.

$3[2OH^- + SO_3^{2-} \leftrightarrows SO_4^{2-} + 2e^- + H_2O]$ (1)
$3H_2O + 6e^- + SO_3^{2-} \leftrightarrows S^{2-} + 6OH^-$ (2)
$6OH^- + 3SO_3^{2-} \leftrightarrows 3SO_4^{2-} + 6e^- + 3H_2O$ (1)
$3H_2O + 6e^- + SO_3^{2-} \leftrightarrows S^{2-} + 6OH^-$ (2)
$3H_2O + 6OH^- + 3SO_3^{2-} + SO_3^{2-} + 6e^- \leftrightarrows 3SO_4^{2-} + S^{2-} + 6e^- + 6OH^- + 3H_2O$

Simplifica la última ecuación:

$4SO_3^{2-} \leftrightarrows 3SO_4^{2-} + S^{2-}$

Alerta

En la ecuación final ya no deben aparecer los electrones intercambiados.

Alerta

Al balancear las ecuaciones por el método de semirreacciones, sigue cuidadosamente los pasos indicados y al final considera lo siguiente: verificar que la ecuación haya quedado balanceada en medio ácido o básico según lo estipule el ejercicio; haz un recuento de los reactivos y productos para corroborar que la ecuación de la reacción en masa efectivamente quedó balanceada y, en su caso, en carga.

Problema resuelto

Desde el siglo pasado, las baterías o acumuladores de plomo–ácido sulfúrico han sido aditamentos que se usan en los automóviles para generar energía. Están constituidos por seis celdas conectadas en serie. Cada celda está conformada por una rejilla de plomo rellena con plomo poroso y otra rejilla de plomo rellena con dióxido de plomo; la celda también contiene ácido sulfúrico que funciona como electrolito. Los electrodos están separados entre sí por espaciadores de fibra de vidrio o madera para evitar que se toquen directamente. Las semirreacciones involucradas en la celda son:

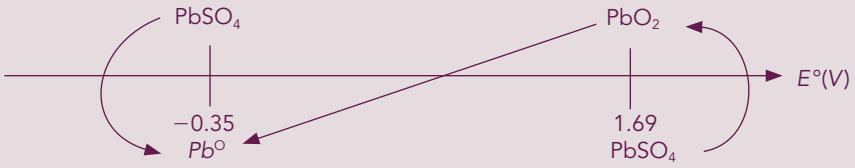
$$PbO_2(s) + 4H^+(ac) + SO_4^{2-}(ac) + 2e^- \leftrightarrows PbSO_4(s) + 2H_2O \qquad E° = 1.69\ V$$

$$PbSO_4(s) + 2e^- \leftrightarrows Pb^0 + SO_4^{2}(ac) \qquad E° = -0.35\ V$$

Señala la reacción que ocurre espontáneamente en la celda.
Indica el ánodo y el cátodo de la celda, el sentido en el que fluyen los electrones y la corriente.
Calcula el potencial estándar de la celda y el potencial total del acumulador.

Respuesta

a) Reacción que ocurre espontáneamente:
Para hacer la predicción de la reacción, traza una escala de potencial:



La reacción no balanceada que se produce espontáneamente es:

$$Pb^0 + PbO_2 \leftrightarrows 2PbSO_4$$

La reacción balanceada es:

$$Pb^0 + PbO_2(s) + 4H+(ac) + 2SO_4^{2-}(ac) \leftrightarrows 2PbSO_4(s) + 2H_2O$$

b) El ánodo de la celda será la rejilla de plomo rellena de plomo poroso debido a que el plomo se oxida. El cátodo será la rejilla de plomo recubierta de dióxido de plomo porque PbO_2 pasa a $PbSO_4$ y se lleva a cabo una reacción de reducción. Los electrones fluyen del ánodo al cátodo y la corriente fluye en sentido inverso.

c) Cálculo del potencial estándar de la celda:
Cálculo del potencial del ánodo:

$$SO_4^{2-}(ac) + Pb^0 - 2e^- \leftrightarrows PbSO_4(s)$$

Al aplicar la ecuación de Nernst:

$$E_{ánodo} = -0.35 + \frac{0.06}{2}\log\frac{1}{|SO_4^{2-}|}$$

Si la concentración de sulfatos es 1 M, el término logarítmico se elimina, por lo que:

$$E^0_{anódo} = -0.35\ V$$

Cálculo del potencial en el cátodo:

$$^{4H^+}(ac) + SO_4^{2-}(ac) + PbO_2(s) + 2e^- \leftrightarrows PbSO_4(s) + 2H_2O$$

$$E_{cátodo} = 1.69 + \frac{0.06}{2}\log|SO_4^{2-}||H^+|^4$$

Si la concentración de sulfatos y de protones es 1 M, el término logarítmico se elimina, por lo que:

$$E^0_{cátodo} = 1.69\ V$$

Alerta

El potencial estándar (E^0) es el potencial de una media reacción bajo condiciones estándar, es decir, concentraciones 1 M, 1 atmósfera de presión y 25 °C.

Respuesta (*continuación*)

La diferencia de potencial de la celda se calcula como:

$$\Delta E^0_{celda} = E^0_{cátodo} - E^0_{ánodo}$$
$$\Delta E^0_{celda} = 1.69 + 0.35 = 2.04\ V$$
$$0_{celda} = 2.04\ V$$

Para el cálculo del potencial total del acumulador se debe considerar que está constituido por seis celdas conectadas en serie, por lo que el potencial de la celda unitaria se multiplica por seis.

$$\Delta E_{acumulador} = 12.24\ V$$

Problema resuelto

Un tipo muy importante de baterías es la de cadmio–níquel, que al igual que las celdas de plomo–ácido sulfúrico utilizadas en los automóviles, son baterías recargables debido a los productos de la reacción espontánea que se adhieren a los electrodos. Estas celdas emplean hidróxido de potasio como electrolito. Las semirreacciones involucradas en la batería cadmio–níquel son:

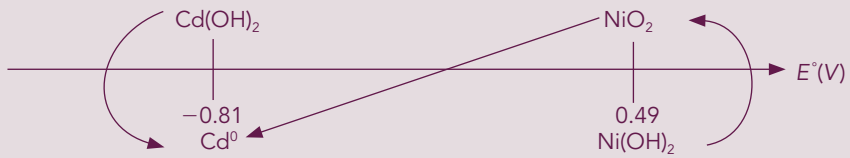
$$NiO_2(s) + 2H_2O + 2e^- \leftrightarrows Ni(OH)_2(s) + 2OH^- \qquad E^0 = 0.49\ V$$

$$Cd(OH)_2 + 2e^- \leftrightarrows Cd^0 + 2OH^- \qquad E^0 = -0.81\ V$$

a) Señala la reacción que ocurre espontáneamente en la celda.
b) Calcula el potencial estándar de la celda.
c) En el comercio se venden baterías cadmio–níquel de 7.2 y 8.4 V, ¿cuántas celdas conectadas en serie conforman cada una de estas baterías?

Respuesta

a) Reacción que ocurre espontáneamente:
Se traza una escala de potencial para hacer la predicción de la reacción:



La reacción no balanceada que se produce espontáneamente es:

$$Cd^0 + NiO_2 \leftrightarrows Cd(OH)_2 + Ni(OH)_2$$

La reacción balanceada es:

$$Cd^0 + NiO_2(s) + 2H_2O \leftrightarrows Cd(OH)_2(s) + Ni(OH)_2(s)$$

b) Cálculo del potencial estándar de la celda:
Cálculo del potencial en el ánodo:

$$Cd^0 + 2OH^- - 2e^- \leftrightarrows Cd(OH)_2(s)$$

$$E^0_{Ánodo} = -0.81 + \frac{0.06}{2}\log\frac{1}{|OH^-|^2}$$

Si la concentración de OH^- es 1 M, el término logarítmico se elimina, por lo que:

$$E^0_{Ánodo} = -0.81\ V$$

Cálculo del potencial del cátodo:

$$NiO_2(s) + 2H_2O + 2e^- \leftrightarrows Ni(OH)_2(s) + 2OH^-$$

Respuesta (*continuación*)

$$E^0_{Cátodo} = 0.49 + \frac{0.06}{2}\log\frac{1}{|OH^-|^2}$$

Si la concentración de OH− es 1 M, el término logarítmico se elimina, por lo que:

$E^0_{Cátodo} = 0.49V$

La diferencia de potencial de la celda se calcula como:

$$\Delta E^0_{Celda} = E^0_{Cátodo} - E^0_{Ánodo}$$

$$\Delta E^0_{Celda} = 0.49 + 0.81 = 1.30\ V$$

$$\Delta E^0_{Celda} = 1.30\ V$$

c) Cálculo del número de celdas que conforman una batería de 7.2 u 8.4 V:

$$-\ \text{Celda de } 7.2\ V = \frac{7.2\ V}{1.3\ V} = 5.5$$

Para construir una batería de 7.2 V se necesitan 6 celdas conectadas en serie.

$$-\ \text{Celda de } 8.4\ V = \frac{8.4\ V}{1.3\ V} = 6.5$$

Para construir una batería de 8.4 V se necesitan 7 celdas conectadas en serie.

Problema resuelto

Una celda de combustible es un dispositivo electroquímico de conversión de energía, similar a una batería, pero se diferencia de esta última en que su diseño permite el reabastecimiento continuo de los reactivos consumidos, es decir, produce electricidad desde una fuente externa de combustible y oxígeno, sus electrodos son catalíticos y relativamente estables y las celdas se agrupan combinándolas en serie o en paralelo.
Las celdas de combustible son muy útiles como fuentes de energía en naves espaciales, estaciones meteorológicas, localizaciones rurales. En 2009, diferentes compañías automotrices firmaron un acuerdo para introducir al mercado vehículos eléctricos impulsados con pilas o también llamadas baterías o celdas de combustible.
Las medias reacciones involucradas en una celda de combustible son:

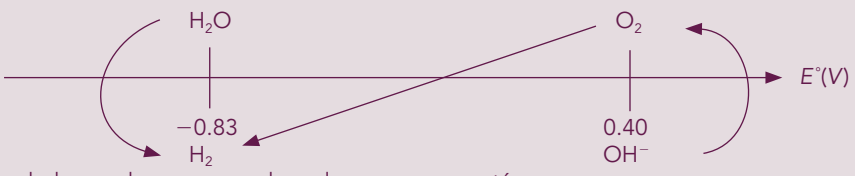
$$2H_2O(l) + 2e- \leftrightarrows H_2(g) + 2OH-(ac) \qquad E^0 = -0.83\ V$$

$$2H_2O(l) + O_2(g) + 4e^- \leftrightarrows 4OH-(ac) \qquad E^0 = 0.40\ V$$

a) Señala la reacción que ocurre espontáneamente en la celda.
b) Calcula el potencial estándar de la celda.

Respuesta

a) Reacción que ocurre espontáneamente:
Se traza una escala de potencial:



La reacción no balanceada que se produce de manera espontánea es:

$$O_2(g) + H_2(g) \leftrightarrows OH^-(ac) + H_2O$$

La reacción balanceada es:

$$2H_2(g) + O_2(g) \leftrightarrows 2H_2O(l)$$

Respuesta (*continuación*)

b) Cálculo del potencial estándar de la celda:
Cálculo del potencial en el ánodo:

$$H_2(g) + 2OH^- - 2e^- \leftrightarrows 2H_2O(l)$$

$$E^0_{Ánodo} = -0.83 + \frac{0.06}{2}\log\frac{1}{|OH^-|^2}$$

Si la concentración de OH− es 1 M, el término logarítmico se elimina, por lo que:

$$E^0_{Ánodo} = -0.83V$$

Cálculo del potencial del cátodo:

$$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \leftrightarrows 4OH^-(ac)$$

$$E^0_{Cátodo} = 0.40 + \frac{0.06}{4}\log\frac{1}{|OH^-|^4}$$

Si la concentración de OH^- es 1 M, el término logarítmico se elimina, por lo que:

$$E^0_{Cátodo} = 0.40V$$

La diferencia de potencial de la celda se calcula como:

$$\Delta E^0_{Celda} = E^0_{Cátodo} - E^0_{Ánodo}$$
$$\Delta E^0_{Celda} = 0.40 + 0.83 = 1.23\ V$$
$$\Delta E^0_{Celda} = 1.23\ V$$

Alerta

Para asignar el cátodo y el ánodo en una celda electroquímica, considera que la semirreacción que tenga el potencial más positivo actuará como cátodo, mientras que aquella con el potencial más negativo funcionará como ánodo.

Problema resuelto

Calcula el potencial de una disolución de Cr^{3+} 0.33 M a la que se introduce una barra de cromo metálico.
Dato:

$$E^0_{(Cr^{3+}/Cr^0)} = -0.74V$$

Respuesta

La semirreacción del sistema y su expresión de Nernst correspondiente es:

$$Cr^{3+} + 3e^- \rightleftarrows Cr^0; \qquad E_{eq} = -0.74 + \frac{0.06}{3}\log|Cr^{3+}|$$

El potencial se calcula a partir de la expresión de Nernst, sustituyendo la concentración de Cr(III).

$$E_{eq} = -0.74 + \frac{0.06}{3}\log 0.33$$
$$E_{eq} = -0.74 + 0.02(-0.481)$$
$$E_{eq} = -0.75\ V$$

Problema resuelto

Problema resuelto
A una mezcla de U^{4+} y Fe^{2+} se agrega poco a poco una disolución de Ce(IV) 0.1000 N.
Datos:

$E^0_{(Fe^{3+}/Fe^{2+})} = 0.77\ V$

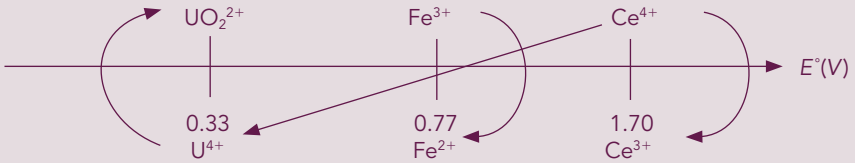
$E^0_{(Ce^{4+}/Ce^{3+})} = 1.70\ V$

$E^0_{(UO_2^{2+}/U^{4+})} = 0.33\ V$

a) Establece todas las reacciones que ocurren cuando se hace una adición paulatina de Ce(IV) a la mezcla de U^{4+} y Fe^{2}.
b) Calcula las constantes de equilibrio para cada reacción planteada.
c) Haz una tabla de variación de concentraciones conforme se incrementa la adición de Ce(IV).
d) Calcula el potencial de equilibrio de la disolución constituida por la mezcla de reductores.
e) Expresa las ecuaciones que permiten calcular el potencial de equilibrio de la disolución en cada punto importante de la tabla de variación de concentraciones.

Respuesta

Reacciones que ocurren cuando se adiciona una disolución de Ce(IV) a otra que contiene una mezcla de $U^{4}+$ y Fe^{2+}.



La escala muestra que cuando se adiciona cerio(IV) a una mezcla que contiene U(IV) y Fe(II), primero se da la reacción del Ce(IV) con U(IV). Cuando este último se agota y se continúa la adición de Ce(IV), entonces ocurre la reacción con el Fe(II).

Las reacciones balanceadas que ocurren son las siguientes:
Primera reacción: $2H_2O + U^{4+} + 2Ce^{4+} \leftrightarrows UO_2^{2+} + 2Ce^{3+} + 4H^+$

Segunda reacción: $Fe^{2+} + Ce^{4+} \leftrightarrows Fe^{3+} + Ce^{3+}$

Cálculo de las constantes de equilibrio:

Primera reacción: $2H_2O + U^{4+} + 2Ce^{4+} \leftrightarrows UO_2^{2+} + 2Ce^{3+} + 4H^+$
Aplicando la ley de acción de masas se obtiene:

$$K^{1era}_{Reacción} = \frac{\left|UO_2^{2+}\right|\left|Ce^{3+}\right|^2\left|H^+\right|^4}{\left|U^{4+}\right|\left|Ce^{4+}\right|^2}$$

Para calcular la constante de equilibrio, se igualan las expresiones de Nernst:

$$1.70 + 0.06\log\frac{\left|Ce^{4+}\right|}{\left|Ce^{3+}\right|} = 0.33 + \frac{0.06}{2}\log\frac{\left|UO_2^{2+}\right|\left|H^+\right|^4}{\left|U^{4+}\right|}$$

Si se multiplica por 2 toda la igualdad:

$$3.4 + 0.06\log\frac{\left|Ce^{4+}\right|^2}{\left|Ce^{3+}\right|^2} = 0.66 + 0.06\log\frac{\left|UO_2^{2+}\right|\left|H^+\right|^4}{\left|U^{4+}\right|}$$

Al reagrupar términos:

$$3.4 - 0.66 = 0.06\log\frac{\left|UO_2^{2+}\right|\left|H^+\right|^4\left|Ce^{3+}\right|^2}{\left|U^{4+}\right|\left|Ce^{4+}\right|^2}$$

$$2.74 = 0.06\log K^{1era}_{Reacción}$$

$$K^{1era}_{Reacción} = 10^{\frac{2.74}{0.06}} = 10^{45.7} = 5.01\times10^{45}$$

$$K^{1era}_{Reacción} = 5.01\times10^{45}$$

Respuesta (*continuación*)

El valor de la constante indica que la reacción está desplazada a la derecha y que es muy cuantitativa.
Segunda reacción: $Fe^{21} + Ce^{41} \leftrightarrows Fe^{31} + Ce^{31}$
La constante de equilibrio para la reacción anterior se expresa como: $K^{2a}_{\text{Reacción}} = \dfrac{|Fe^{3+}||Ce^{3+}|}{|Fe^{2+}||Ce^{4+}|}$

Al igualar las expresiones de Nernst: $1.70 + 0.06\log\dfrac{|Ce^{4+}|}{|Ce^{3+}|} = 0.77 + 0.06\log\dfrac{|Fe^{3+}|}{|Fe^{2+}|}$

Al reagrupar términos: $1.7 - 0.77 = 0.06\log\dfrac{|Fe^{3+}||Ce^{3+}|}{|Fe^{2+}||Ce^{4+}|}$

$$0.93 = 0.06\log K^{2a}_{Reacción}$$

$$K^{2a}_{\text{Reacción}} = 10^{\frac{0.93}{0.06}} = 10^{15.5} = 3.16\times10^{15}$$

$$K^{2a}_{\text{Reacción}} = 3.16\times10^{15}$$

El valor de la constante indica que la reacción está desplazada a la derecha y es cuantitativa.
Cuando se compara el valor de las dos constantes de reacción anteriores, se observa que la primera reacción es mucho más cuantitativa que la segunda.
También se puede calcular el valor de una constante de reacción mediante la siguiente fórmula:

$$K_{\text{Reacción}} = 10^{\frac{(\Delta E)n}{0.06}}$$

Donde:
ΔE 5 Diferencia de potencial dado por los dos sistemas redox involucrados. Siempre considera $E_{\text{cátodo}}$ 2 $E_{\text{ánodo}}$.
n 5 Número de electrones intercambiados.

c) Tabla de variación de concentraciones conforme se incrementa la adición de Ce(IV).
Se considera que tanto las especies por titular como el titulante tienen el mismo orden de concentraciones.

Primera reacción	$2H_2O$	1	U^{41}	1	$2Ce^{41}$	⇆	UO_2^{21}	1	$2Ce^{31}$	1	$4H^1$
Inicio x 5 0			Co								
Agregado					xCo						
Antes punto de equivalencia 0 < x < 2			$Co-\frac{1}{2}xCo$ $Co(1-\frac{1}{2}x)$		$\varepsilon \approx 0$		$\frac{xCo}{2}$		xCo		
Punto de equivalencia x 5 2			$\varepsilon \approx 0$		$2\varepsilon \approx 0$		Co		2Co		
Segunda reacción	Fe^{21}	1	Ce^{41}	⇆	Fe^{31}	1	Ce^{31}				
Inicio	Co						2Co				
Agregado			x'Co								
Apeq 0 < x´< 1	$Co-x'Co$ $Co(1-x')$		$\varepsilon' \approx 0$		x'Co		2Co1 x'Co Co(2 1 x')				
Segunda reacción	$2H_2O$	1	U^{41}	1	$2Ce^{41}$	⇆	UO_2^{21}	1	$2Ce^{31}$	1	$4H^1$
Peq x' 5 1 x_T 5 3 *	$\varepsilon' \approx 0$		$\varepsilon' \approx 0$		Co		3Co				
Dpeq x'> 1 $x_T > 3$ * *x_T 5 x 1 x'	$\varepsilon' \approx 0$		$x'Co-Co$ $Co(x'-1)$ $Co(x_T-3)$		Co		3Co				

10_PROBLEMARIO QUIMICA_CH10 CD.indd 9 10/28/10 6:15:01 PM

Respuesta (*continuación*)

d) Calculo del potencial de equilibrio de la disolución constituida por la mezcla de reductores.
Al inicio, la disolución contiene una mezcla de U^{4+} + Fe^{2+} (ambos reductores), el más fuerte es U^{4+}. Esta especie es la que impone el potencial de la disolución. Por cálculo numérico no es posible determinar el potencial, ya que se llega a una indeterminación al aplicar la ecuación de Nernst para el sistema del uranio, y porque no hay U(VI) presente en disolución. Aún así se puede asegurar que el potencial será mucho menor a 0.33 V. En la práctica sí es posible medir el potencial utilizando un potenciómetro y un par de electrodos, por ejemplo, platino y calomel. Se concluye que cuando hay un reductor en disolución, el potencial no es calculable pero sí medible. Lo mismo se aplica cuando hay un oxidante solo en disolución.

e) Expresión de las ecuaciones que permiten calcular el potencial de equilibrio de la disolución en cada punto importante de la tabla de variación de concentraciones.

Avance de las reacciones	Especies que imponen el potencial	Ecuación que se aplica para el cálculo del potencial
Inicio $x = 0$	U^{4+}	$<< 0.33V$
Antes del 1er punto de equivalencia $0 < x' < 2$	U^{4+} / UO_2^{2+}	$E_{eq} = 0.33 + 0.03\log\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}$
Primer punto de equivalencia $x = 2$	$UO_2^{2+}; Fe^{2+}$	$E_{eq} = \frac{2(0.33)+0.77}{3} = 0.48V$
Inicio 2ª reacción $x' = 0$	$UO_2^{2+}; Fe^{2+}$	$E_{eq} = \frac{2(0.33)+0.77}{3} = 0.48V$
Antes del 2º punto de equivalencia $0 < x' < 1$	Fe^{3+}/Fe^{2+}	$E_{eq} = 0.77 + 0.06\log\frac{x'}{1-x'}$
2º punto de equivalencia x' 51 $x_T = 3$	$Fe^{3+}; Ce^{3+}$	$2E_{eq} = 1.70 + 0.77 + 0.06\log\frac{Co}{3}$
Después del 2º punto de equivalencia $x' > 1$ $x_T > 3$	Ce^{4+}/Ce^{3+}	$E_{eq} = 1.70 + 0.06\log\frac{x_T - 3}{3}$

Problema resuelto

Una muestra de agua residual contiene 27 mg/L de cianuro como NaCN. Determina la cantidad teórica (estequiométricamente) de cloro requerida para destruir este residuo, suponiendo que se producen 1000L/día de dicha agua residual.

Respuesta

La ecuación de la reacción balanceada que ocurre entre el cianuro y el cloro es:

$2NaCN + 5Cl_2 + 12NaOH \leftrightarrows N_2 + Na_2CO_3 + 10NaCl + 6H_2O$

De acuerdo con la estequiometría de la reacción, se requieren 2.5 moles de Cl2 por mol de NaCN.
La masa total de NaCN que se descarga diariamente es:

$$\text{Masa (NaCN)} = \frac{27\ \text{mg}}{\text{L}} \times 1000\ \text{L} = 27000\ \text{mg} = 27\text{g de NaCN}$$

Cálculo de la cantidad de NaCN expresado en mol:

$$n_{NaCN} = \frac{27\ \text{g}}{49\ \text{g/mol}} = 0.551\ \text{mol}$$

Cantidad de cloro requerido para el tratamiento del agua residual:

$$n_{Cl_2} = 0.551\ \text{mol} \times 2.5 = 1.38\ \text{m}$$

Se requieren 1.38 moles de cloro para el tratamiento de los 1000 L de agua residual que se generan diariamente.
En la práctica se requieren cantidades mucho mayores que las calculadas estequiométricamente, debido a tiempos incompletos de reacción.

Problema resuelto

Calcula la cantidad de cobre que se deposita en un periodo de dos horas, cuando se realiza una electrólisis de una disolución de sulfato de cobre (II) y se aplica una corriente de 0.5 amperes.

Respuesta

El primer paso es calcular el peso equivalente del cobre. La semirreacción que se produce en el cátodo es: $Cu^{2+} + 2e^- \leftrightarrows Cu^0$. Como el cobre intercambia un par de electrones, el peso equivalente resulta de dividir su masa atómica entre dos. Si la masa atómica del cobre es de 63.54 g/mol, entonces el peso equivalente de cobre será de 31.77g/eq.
El segundo paso es calcular el número de coulombs que pasaron por la disolución de cobre(II). Dicho número se obtiene al multiplicar el tiempo en segundos por la corriente en amperes.
Tiempo = 2 h × 3 600 s = 7 200 s
Q = 0.5 amperes × 7 200 s = 3 600 coulombs
Al saber que 96 500 coulombs depositan 31.77 g de cobre, podemos calcular la cantidad de cobre depositada por 3 600 coulombs.

$$\text{Masa(Cu)} = \frac{3600 \times 31.77}{96500} = 1.185\ \text{g}$$

Masa de cobre depositado = 1.185 g

Problema resuelto

Calcula el peso de sodio y cloro que se forma cuando se pasan 10 000 coulombs de electricidad a través de cloruro de sodio fundido.

Respuesta

Las semirreacciones que se producen en cada electrodo son:
Cátodo: $Na^+ + 1e^- \leftrightarrows Na^0$
Ánodo: $2Cl^- \leftrightarrows Cl_2 + 2e^-$
Tanto el sodio como el cloro intercambian un electrón por mol, por lo que sus pesos equivalentes son de 23 g para el sodio y de 35.5 g para el cloro. Esas cantidades se forman cuando se hace pasar 1 F (96, 500 C/mol).
Cálculo de la masa formada de sodio y cloro cuando se hacen pasar 10 000 C.

$$\text{Masa(Na)} = \frac{10000\ \text{C}}{96500\ \text{C}} \times 23\ \text{g} = 2.38\ \text{g de Na}$$

2.38 g de sodio

$$\text{Masa}(Cl_2) = \frac{10000\ \text{C}}{96500\ \text{C}} \times 35.5\text{g} = 3.68\ \text{g de } Cl_2$$

3.68 g de cloro

Problema resuelto

¿Qué cantidad de electricidad se requiere para descomponer 1 lb (454 g) de agua por electrólisis? La reacción general es:

$$2H_2O \leftrightarrows 2H_2 + O_2$$

Respuesta

Un mol de agua (18 g) contiene 2 equivalentes de hidrógeno (2 g) y 2 equivalentes de oxígeno (16 g), el peso equivalente del agua es de 9 g. Esta masa de agua será la que se descomponga por el paso de 1 faradio de electricidad (produciendo 1 g de hidrógeno y 8 g de oxígeno). Para descomponer una libra de agua se necesita la siguiente cantidad de electricidad:

$$Q = \frac{454g}{9g} \times 1\ \text{faradio} = 50.4\ \text{faradios}$$

Q = 50.4 faradios

DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Nomenclatura

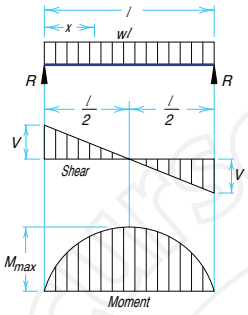
E = Módulo de elasticidad
I = Momento de inercia (cm^4, in^4)
L = Longitud total de la viga entre soportes (cm, m, in o ft)
M_{max} = Momento máximo (N-m, lb-in, kip-ft.)
M_1 = Momento máximo en el apoyo 1 (N-m, kip-in, Kip-ft.)
M_2 = Momento máximo en el apoyo 2 (N-m, kip-in, Kip-ft.)
M_x = Momento a una distancia x desde el extreme de la viga (N-m, lb-in, kip-in.)
P = Carga concentrada (N, lb o kips)
P_1 = Carga concentrada (N, lb o kips)
P_2 = Carga concentrada diferente a P_1 (N, lb o kips)
R = Reacción en los extremos de la viga para cualquier condición de carga simétrica (N, lb o kips)
R_1 = Reacción en el apoyo 1 (N, lb o kips)
R_2 = Reacción en el apoyo 2 (N, lb o kips)
V = Cortante máximo para cualquier condición de carga simétrica (N, lb o kips)
V_1 = Cortante máximo en el apoyo 1 (N, lb o kips)
V_2 = Cortante máximo en el apoyo 2 (N, lb o kips)
V_x = Cortante a una distancia x desde el extreme de la viga (N, lb o kips)
W = Carga total en la viga (N, lb o kips)
a = Distancia a lo largo de la viga (cm, m o in)
b = Distancia b a lo largo de la viga puede ser mayor o menor que a (cm, m o in)
l = Longitud total de la viga (cm, m, in o ft)
w = Carga uniformemente distribuida por unidad de longitud (N/m, kips/in, Kips/ft)
x = Cualquier distancia a lo largo de la viga (cm, m, in o ft)
Δ_{max} = Máxima deformación (cm, in)
Δ_a = Deformación en el punto de aplicación de la carga (cm, in)
Δ_x = Deformación a cualquier distancia *x desde el apoyo* (cm, in)

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag 1

1. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA



Carga Total Uniforme . . . . . $= wl$

$R = V$ . . . . . $= \frac{wl}{2}$

V_x . . . . . $= w\left(\frac{l}{2} - x\right)$

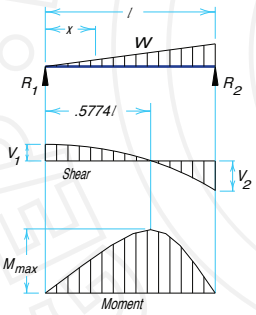
M_{max} (en el centro) . . . . . $\frac{wl^2}{8}$

M_x . . . . . $= \frac{wx}{2}(l - x)$

Δ_{max} (en el centro) . . . . . $= \frac{5wl^4}{384EI}$

Δ_x . . . . . $= \frac{wx}{24EI}(l^2 - 2lx^2 + x^3)$

2. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON CARGA AUMENTANDO UNIFORMEMENTE HACIA UN EXTREMO



Carga Total Uniforme . . . . . $= \frac{16W}{9\sqrt{3}} = 1.0264W$

$R_1 = V_1$ . . . . . $= \frac{W}{3}$

$R_2 = V_{2\ max}$ . . . . . $= \frac{2W}{3}$

V_x . . . . . $= \frac{W}{3} - \frac{Wx^2}{l^2}$

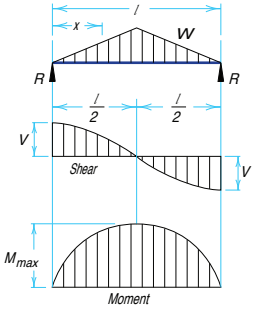
M_{max} (en $x = \frac{l}{\sqrt{3}} = .5774\,l$) . . . . . $= \frac{2Wl}{9\sqrt{3}} = .1283\,Wl$

M_x . . . . . $= \frac{Wx}{3l^2}(l^2 - x^2)$

Δ_{max} (en $x = l\sqrt{1 - \sqrt{\frac{8}{15}}} = .5193\,l$) . . $= 0.1304\frac{Wl^3}{EI}$

Δ_x . . . . . $= \frac{Wx}{180EIl^2}(3x^4 - 10l^2x^2 + 7l^4)$

3. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON CARGA AUMENTANDO UNIFORMEMENTE HACIA EL CENTRO



Carga Total Uniforme . . . . . $= \frac{4W}{3}$

$R = V$ . . . . . $= \frac{W}{2}$

V_x (si $x < \frac{l}{2}$) . . . . . $= \frac{W}{2l^2}(l^2 - 4x^2)$

M_{max} (al centro) . . . . . $= \frac{Wl}{6}$

M_x (si $x < \frac{l}{2}$) . . . . . $= Wx\left(\frac{1}{2} - \frac{2x^2}{3l^2}\right)$

Δ_{max} (al centro) . . . . . $= \frac{Wl^3}{60EI}$

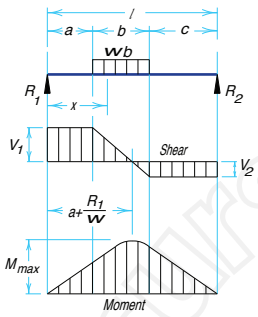
Δ_x (si $x < \frac{l}{2}$) . . . . . $= \frac{Wx}{480EIl^2}(5l^2 - 4x^2)^2$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

4. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON CARGA UNIFORME, DISTRIBUIDA PARCIALMENTE



$R_1 = V_1$ (max. si $a < c$) . . . . . $= \frac{wb}{2l}(2c + b)$

$R_2 = V_2$ (max. si $a > c$) . . . . . $= \frac{wb}{2l}(2a + b)$

V_x (si $x > a$ o $< (a + b)$) . . . $= R_1 - w(x - a)$

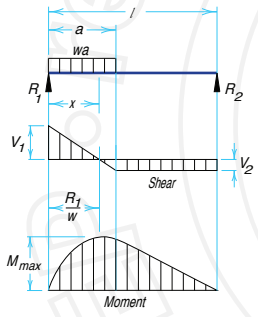
M_{max} $\left(\text{si } x = a + \frac{R_1}{w}\right)$ . . . . . $= R_1\left(a + \frac{R_1}{2w}\right)$

M_x (si $x < a$) . . . . . $= R_1 x$

M_x (si $x > a$ o $< (a + b)$) . . . $= R_1 x - \frac{w}{2}(x - a)^2$

M_x (si $x > (a + b)$) . . . . . $= R_2(l - x)$

5. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON CARGA UNIFORME, DISTRIBUIDA PARCIALMENTE SOLAMENTE EN UN EXTREMO



$R_1 = V_{1\ max}$ . . . . . $= \frac{wa}{2l}(2l - a)$

$R_2 = V_2$ . . . . . $= \frac{wa^2}{2l}$

V_x (si $x < a$) . . . . . $= R_1 - wx$

M_{max} $\left(\text{en } x = \frac{R_1}{w}\right)$ . . . . . $= \frac{R_1^2}{2w}$

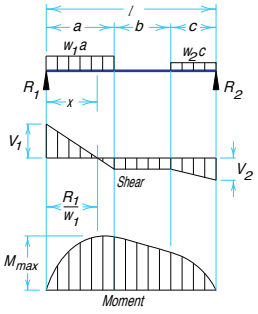
M_x (si $x < a$) . . . . . $= R_1 x - \frac{wx^2}{2}$

M_x (si $x > a$) . . . . . $= R_2(l - x)$

Δ_x (si $x < a$) . . . . . $= \frac{wx}{24EIl}(a^2(2l - a)^2 - 2ax^2(2l - a) + lx^3)$

Δ_x (si $x > a$) . . . . . $= \frac{wa^2(l - x)}{24EIl}(4xl - 2x^2 - a^2)$

6. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON CARGAS UNIFORMES, DISTRIBUIDAS PARCIALMENTE EN AMBOS EXTREMOS



$R_1 = V_1$ . . . . . $= \frac{w_1 a(2l - a) + w_2 c^2}{2l}$

$R_2 = V_2$ . . . . . $= \frac{w_2 c(2l - c) + w_1 a^2}{2l}$

V_x (si $x < a$) . . . . . $= R_1 - w_1 x$

V_x (si $x > a$ o $< (a + b)$) $= R_1 - w_1 a$

V_x (si $x > (a + b)$) . . . . . $= R_2 - w_2(l - x)$

M_{max} $\left(\text{en } x = \frac{R_1}{w_1} \text{ cuando } R_1 < w_1 a\right)$ $= \frac{R_1^2}{2w_1}$

M_{max} $\left(\text{en } x = l - \frac{R_1}{w_2} \text{ cuando } R_2 < w_2 c\right) = \frac{R_2^2}{2w_2}$

M_x (si $x < a$) . . . . . $= R_1 x - \frac{w_1 x^2}{2}$

M_x (si $x > a$ o $< (a + b)$) . . . $= R_1 x - \frac{w_1 a}{2}(2x - a)$

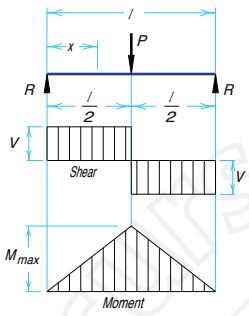
M_x (si $x > (a + b)$) . . . . . $= R_2(l - x) - \frac{w_2(l - x)^2}{2}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

7. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON CARGA CONCENTRADA EN EL CENTRO



Carga Total Uniforme . . . . . $= 2P$

$R = V$ . . . . . $= \frac{P}{2}$

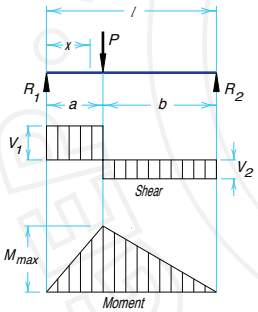
M_{max} (debajo de la carga) . . . . . $= \frac{Pl}{4}$

M_x $\left(\text{si } x < \frac{1}{2}\right)$ . . . . . $= \frac{Px}{2}$

Δ_{max} (debajo de la carga) . . . . . $= \frac{Pl^3}{48EI}$

Δ_x $\left(\text{si } x < \frac{1}{2}\right)$ . . . . . $= \frac{Px}{48EI}(3l^2 - 4x^2)$

8. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON UNA CARGA CONCENTRADA EN CUALQUIER PUNTO DE LA VIGA



Carga Total Uniforme . . . . . $= \frac{8Pab}{l^2}$

$R_1 = V_1$ (max si $a < b$) . . . . . $= \frac{Pb}{l}$

$R_2 = V_2$ (max si $a > b$) . . . . . $= \frac{Pa}{l}$

M_{max} (en el punto de la carga) . . . . . $= \frac{Pab}{l}$

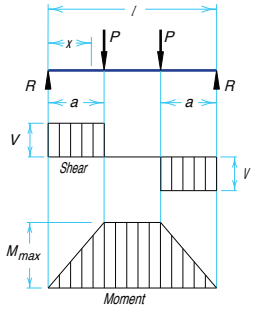
M_x (si $x < a$) . . . . . $= \frac{Pbx}{l}$

Δ_{max} $\left(\text{en} x = \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}} \text{ si } a > b\right)$ . . . $= \frac{Pab(a+2b)\sqrt{3a(a+2b)}}{27EIl}$

Δ_a (en el punto de la carga) . . . . . $= \frac{Pa^2b^2}{3EIl}$

Δ_x (si $x < a$) . . . . . $= \frac{Pbx}{6EIl}(l^2 - b^2 - x^2)$

9. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON DOS CARGAS CONCENTRADAS E IGUALES, SIMÉTRICAMENTE COLOCADAS



Carga Total Uniforme . . . . . $= \frac{8Pa}{l}$

$R = V$ . . . . . $= P$

M_{max} (entre ambas cargas) . . . . . $Pa =$

M_x (si $x < a$) . . . . . $= Px$

Δ_{max} (en el centro) . . . . . $\frac{Pa}{24EI}(3l^2 - 4a^2)$

Δ_x (si $x < a$) . . . . . $= \frac{Px}{6EI}(3la - 3a^2 - x^2)$

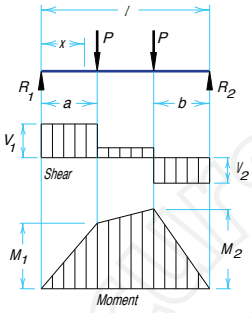
Δ_x (si $x > a$ o $< (l - a)$) . . . . . $= \frac{Pa}{6EI}(3lx - 3x^2 - a^2)$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

10. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON DOS CARGAS CONCENTRADAS E IGUALES. PERO COLOCADAS EN CUALQUIER PUNTO DE LA VIGA



$R_1 = V_1 \quad (\text{max. si } a < b) \ldots\ldots\ldots = \frac{P}{l}(l - a + b)$

$R_2 = V_2 \quad (\text{max. si } a > b) \ldots\ldots\ldots = \frac{P}{l}(l - b + a)$

$V_x \quad (\text{si } x > a \text{ o } < (l - b)) \ldots\ldots = \frac{P}{l}(b - a)$

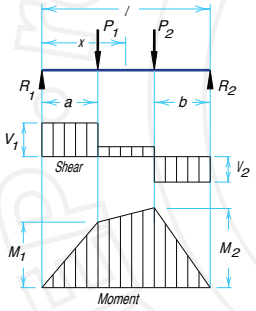
$M_1 \quad (\text{max. si } a > b) \ldots\ldots\ldots = R_1 a$

$M_2 \quad (\text{max. si } a < b) \ldots\ldots\ldots = R_2 b$

$M_x \quad (\text{si } x < a) \ldots\ldots\ldots\ldots = R_1 x$

$M_x \quad (\text{si } x > a \text{ o } < (l - b)) \ldots\ldots = R_1 x - P(x - a)$

11. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON DOS CARGAS CONCENTRADAS Y DESIGUALES COLOCADAS EN CUALQUIER PUNTO DE LA VIGA



$R_1 = V_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{P_1(l - a) + P_2 b}{l}$

$R_2 = V_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{P_1 a + P_2(l - b)}{l}$

$V_x \quad (\text{si } x > a \text{ o } < (l - b)) \ldots\ldots = R_1 - P_1$

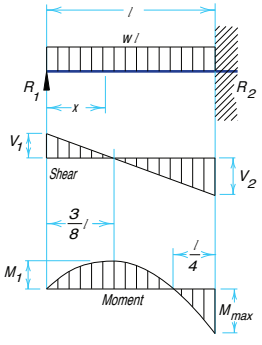
$M_1 \quad (\text{max. si } R_1 < P_1) \ldots\ldots\ldots = R_1 a$

$M_2 \quad (\text{max. si } R_2 < P_2) \ldots\ldots\ldots = R_2 b$

$M_x \quad (\text{si } x < a) \ldots\ldots\ldots\ldots = R_1 x$

$M_x \quad (\text{si } x > a \text{ o } < (l - b)) \ldots\ldots = R_1 x - P(x - a)$

12. VIGA EMPOTRADA DE UN EXTREMO Y APOYADA EN EL OTRO EXTREMO CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA



Carga Total Uniforme $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = wl$

$R_1 = V_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{3wl}{8}$

$R_2 = V_{2\,\max} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{5wl}{8}$

$V_x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = R_1 - wx$

$M_{\max} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{wl^2}{8}$

$M_x \quad \left(\text{en } x = \frac{3}{8}l\right) \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{9}{128}wl^2$

$M_x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = R_1 x - \frac{wx^2}{2}$

$\Delta_{\max} \quad \left(\text{en } x = \frac{l}{16}(1 + \sqrt{33}) = .4215\,l\right) \ldots = \frac{wl^4}{185\,EI}$

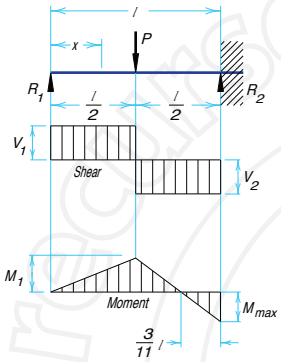
$\Delta_x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{wx}{48EI}(l^3 - 3lx + 2x^3)$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

13. VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y APOYADA EN EL OTRO EXTREMO CON UNA CARGA CONCENTRADA EN EL CENTRO



Carga Total Uniforme . . . . . $= \frac{3P}{2}$

$R_1 = V_1$ . . . . . $= \frac{5P}{15}$

$R_2 = V_{2\,\max}$ . . . . . $= \frac{11P}{16}$

$M_{\max}$ (en el extremo empotrado) . . . . $= \frac{3Pl}{16}$

M_1 (en el punto de la carga) . . . . . $= \frac{5Pl}{32}$

$M_x \quad \left(\text{si } x < \frac{l}{2}\right)$ . . . . . $= \frac{5Px}{16}$

$M_x \quad \left(\text{si } x > \frac{l}{2}\right)$ . . . . . $= P\left(\frac{l}{2} - \frac{11x}{16}\right)$

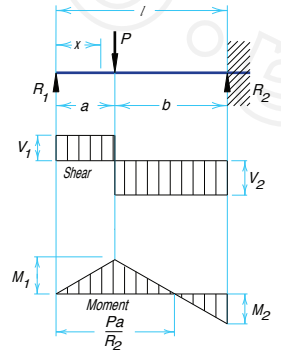
$\Delta_{\max} \quad \left(\text{en } x = l\sqrt{\frac{1}{5}} = .4472\,l\right)$ . . . . . $= \frac{Pl^3}{48EI\sqrt{5}} = .009317\,\frac{Pl^3}{EI}$

Δ_x (en el punto de la carga) . . . . . $= \frac{7PL^3}{768EI}$

$\Delta_x \quad \left(\text{si } x < \frac{l}{2}\right)$ . . . . . $= \frac{Px}{96EI}(3l^2 - 5x^2)$

$\Delta_x \quad \left(\text{si } x > \frac{l}{2}\right)$ . . . . . $= \frac{P}{96EI}(x - l)^2(11x - 2l)$

14. VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y APOYADA EN EL OTRO EXTREMO CON UNA CARGA CONCENTRADA APLICADA EN CUALQUIER PUNTO DE LA VIGA



$R_1 = V_1$ . . . . . $= \frac{Pb^2}{2l^3}(a + 2l)$

$R_2 = V_2$ . . . . . $= \frac{Pa}{2l^3}(3l^2 - a^2)$

M (en el punto de la carga) . . . . . R_1a . =

M_2 (en el extremo empotrado) . . . . $\frac{Pab}{2l^2}(a + l) =$

M_x (si $x < a$) . . . . . $= R_1x$

M_x (si $x > a$) . . . . . $= R_1x - P(x - a)$

$\Delta_{\max} \quad \left(\text{si } a < .414\,l \text{ at } x = l\frac{(l^2 + a^2)}{(3l^2 - a^2)}\right) = \frac{Pa(l^2 + a^2)^3}{3EI(3l^2 - a^2)^2}$

$\Delta_{\max} \quad \left(\text{si } a > .414\,l \text{ at } x = l\sqrt{\frac{a}{2l + a}}\right) = \frac{Pab^2}{6EI}\sqrt{\frac{a}{2l + a}}$

Δ_a (en el punto de la carga) . . . . . $\frac{Pa^2b^3}{12EIl^3}(3l + a)$

Δ (si $x < a$) . . . . . $= \frac{Pb^2x}{12EIl^3}(3al^2 - 2lx^2 - ax^2)$

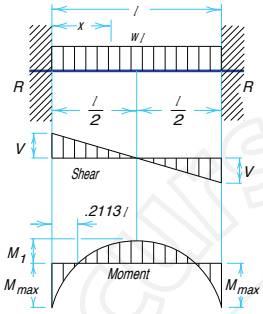
Δ_x (si $x > a$) . . . . . $= \frac{Pa}{12EIl^2}(l - x)^2(3l^2x - a^3x - 2a^2l)$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

15 VIGA EMPOTRADA EN AMBOS EXTREMOS CON UNA CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA



Carga Total Uniforme . . . . . $= \frac{2wl}{3}$

$R = V$ . . . . . $= \frac{wl}{2}$

V_x . . . . . $= w\left(\frac{l}{2} - x\right)$

M_{max} (en los extremos) . . . . . $= \frac{wl^2}{12}$

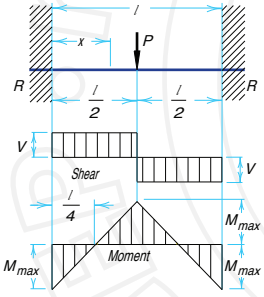
M_1 (en el centro) . . . . . $= \frac{wl^2}{24}$

M_x . . . . . $= \frac{w}{12}(6lx - l^2 - 6x^2)$

Δ_{max} (en el centro) . . . . . $= \frac{wl^4}{384EI}$

Δ_x . . . . . $= \frac{wx^2}{24EI}(l - x)^2$

16 VIGA EMPOTRADA EN AMBOS EXTREMOS CON UNA CARGA CONCENTRADA EN EL CENTRO



Carga Total Uniforme . . . . . $= P$

$R = V$ . . . . . $= \frac{P}{2}$

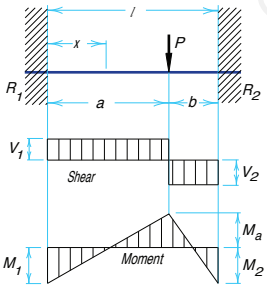
M_{max} (en el centro y en los extremos) . . $= \frac{Pl}{8}$

M_x $\left(\text{si } x < \frac{l}{2}\right)$ . . . . . $= \frac{P}{8}(4x - l)$

Δ_{max} (en el centro) . . . . . $= \frac{Pl^3}{192EI}$

Δ_x $\left(\text{si } x < \frac{l}{2}\right)$ . . . . . $= \frac{Px^2}{48EI}(3l - 4x)$

17 VIGA EMPOTRADA EN AMBOS EXTREMOS CON UNA CARGA CONCENTRADA EN CUALQUIER PUNTO DE LA VIGA



$R_1 = V_1$ (max. si $a < b$) . . . . . $= \frac{Pb^2}{l^3}(3a + b)$

$R_2 = V_2$ (max. si $a > b$) . . . . . $= \frac{Pa^2}{l^3}(a + 3b)$

M_1 (max. si $a < b$) . . . . . $= \frac{Pab^2}{l^2}$

M_2 (max. si $a > b$) . . . . . $= \frac{Pa^2b}{l^2}$

M_a (en el punto de la carga) . . . . . $= \frac{2Pa^2b^2}{l^3}$

M_x (si $x < a$) . . . . . $= R_1x - \frac{Pab^2}{l^2}$

Δ_{max} $\left(\text{si } a > b \text{ at } x = \frac{2al}{3a + b}\right)$ . . . . $= \frac{2Pa^3b^2}{3EI(3a + b)^2}$

Δ_a (en el punto de la carga) . . . . . $= \frac{Pa^3b^3}{3EIl^3}$

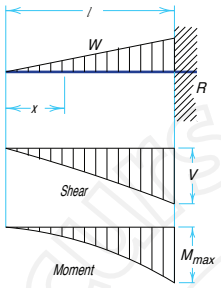
Δ_x (si $x < a$) . . . . . $= \frac{Pb^2x^2}{6EIl^2}(3al - 3ax - bx)$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

18. VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y LIBRE EN EL OTRO CON CARGA AUMENTANDO UNIFORMEMENTE HASTA EL EMPOTRE



Carga Total Uniforme . . . . . $= \frac{8}{3}W$

$R = V$ . . . . . $= W$

V_x . . . . . $= W\frac{x^2}{l^2}$

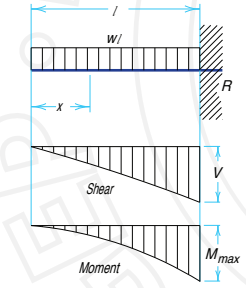
M_{max} (en el extremo empotrado) . . . . . $= \frac{Wl}{3}$

M_x . . . . . $= \frac{Wx^3}{3l^2}$

Δ_{max} (en el extremo libre) . . . . . $= \frac{Wl^3}{15EI}$

Δ_x . . . . . $= \frac{W}{60EIl^2}(x^5 - 5l^4x + 4l^5)$

19. CANTILEVER BEAM—UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD



Carga Total Uniforme . . . . . $= 4wl$

$R = V$ . . . . . $= wl$

V_x . . . . . $= wx$

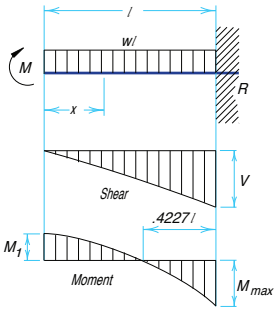
M_{max} (en el extremo empotrado) . . . . . $= \frac{wl^2}{2}$

M_x . . . . . $= \frac{wx^2}{2}$

Δ_{max} (en el extremo libre) . . . . . $= \frac{wl^4}{8EI}$

Δ_x . . . . . $= \frac{w}{24EI}(x^4 - 4l^3x + 3l^4)$

20. BEAM FIXED AT ONE END, FREE TO DEFLECT VERTICALLY BUT NOT ROTATE AT OTHER—UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD



Carga Total Uniforme . . . . . $= \frac{8}{3}wl$

$R = V$ . . . . . $= wl$

V_x . . . . . $= wx$

M_{max} (en el extremo empotrado) . . . . . $= \frac{wl^2}{3}$

M_x . . . . . $= \frac{w}{6}(l^2 - 3x^2)$

Δ_{max} (en el extremo guiado) . . . . . $= \frac{wl^4}{24EI}$

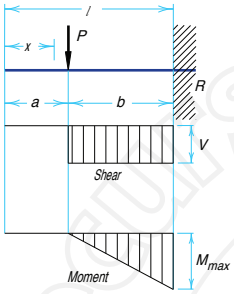
Δ_x . . . . . $= \frac{w(l^2 - x^2)^2}{24EI}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

21. VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y LIBRE EN EL OTRO CON UNA CARGA CONCENTRADA EN CUALQUIER PUNTO DE LA VIGA



Carga Total Uniforme . . . . . $= \frac{8Pb}{l}$

$R = V$ . . . . . $= P$

M_{max} (en el extremo empotrado) . . . . . $= Pb$

M_x (si $x > a$) . . . . . $= P(x - a)$

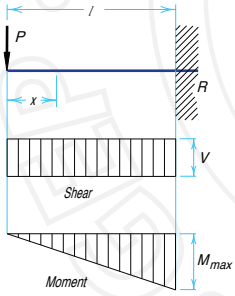
Δ_{max} (en el extremo libre) . . . . . $\frac{Pb^2}{6EI}(3l - b)$

Δ_a (en el punto de la carga) . . . . . $= \frac{Pb^3}{3EI}$

Δ_x (si $x < a$) . . . . . $= \frac{Pb^2}{6EI}(3l - 3x - b)$

Δ_x (si $x > a$) . . . . . $= \frac{P(l - x)^2}{6EI}(3b - l + x)$

22. VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y LIBRE EN EL OTRO EXTREMO CON UNA CARGA CONCENTRADA EN ESTE EXTREMO



Carga total uniforme . . . . . $= 8P$

$R = V$ . . . . . $= P$

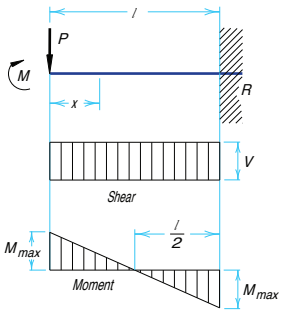
M_{max} (en el extremo empotrado) . . . . . $= Pl$

M_x . . . . . $= Px$

Δ_{max} (en el extremo empotrado) . . . . . $= \frac{Pl^3}{3EI}$

Δ_x . . . . . $= \frac{P}{6EI}(2l^3 - 3l^2x + x^3)$

23. VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y LIBRE PERO GUIADA EN EL OTRO EXTREMO CON UNA CARGA CONCENTRADA EN ESTE EXTREMO



Carga total uniforme . . . . . $= 4P$

$R = V$ . . . . . $= P$

M_{max} (en ambos extremos) . . . . . $= \frac{Pl}{2}$

M_x . . . . . $= P\left(\frac{l}{2} - x\right)$

Δ_{max} (en el extremo guiado) . . . . . $= \frac{pl^3}{12EI}$

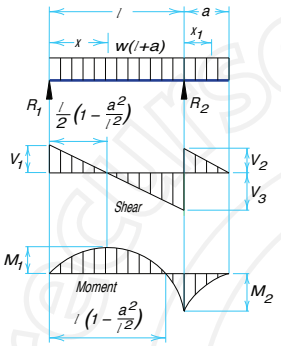
Δ_x . . . . . $= \frac{P(l - x)^2}{12EI}(l + 2x)$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

24. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS PERO SOBRESALIENDO UNO CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA



$R_1 = V_1 \ldots = \frac{w}{2l}(l^2 - a^2)$

$R_2 = V_2 + V_3 \ldots = \frac{w}{2l}(l + a)^2$

$V_2 \ldots = wa$

$V_3 \ldots = \frac{w}{2l}(l^2 + a^2)$

V_x (entre los apoyos) $\ldots = R_1 - wx$

V_{x_1} (para el sobresaliente) $\ldots = w(a - x_1)$

$M_1 \left(\text{en } x = \frac{l}{2}\left[1 - \frac{a^2}{l^2}\right]\right) \ldots = \frac{w}{8l^2}(l + a)^2(l - a)^2$

M_2 (at R_2) $\ldots = \frac{wa^2}{2}$

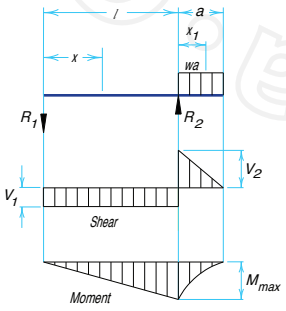
M_x (entre apoyos) $\ldots = \frac{wx}{2l}(l^2 - a^2 - xl)$

M_{x_1} (para el sobresaliente) $\ldots = \frac{w}{2}(a - x_1)^2$

Δ_x (entre apoyos) $\ldots = \frac{wx}{24EIl}(l^4 - 2l^2x^2 + lx^3 - 2a^2l^2 + 2a^2x^2)$

Δ_{x_1} (para el sobresaliente) $\ldots = \frac{wx_1}{24EI}(4a^2l - l^3 + 6a^2x_1 - 4ax_1^2 + x_1^3)$

25. VIGA CON DOS APOYOS SOBRESALIENDO EN UN EXTREMO CON CARGA UNIFORME EL SOBRESALIENTE



$R_1 = V_1 \ldots = \frac{wa^2}{2l}$

$R_2 \quad V_1 + V_2 \ldots = \frac{wa}{2l}(2l + a)$

$V_2 \ldots = wa$

V_{x_1} (para el sobresaliente) $\ldots = w(a - x_1)$

$M_{\max}$ (at R_2) $\ldots = \frac{wa^2}{2}$

M_x (entre apoyos) $\ldots = \frac{wa^2x}{2l}$

M_{x_1} (para el sobresaliente) $\ldots = \frac{w}{2}(a - x_1)^2$

$\Delta_{\max}\left(\text{entre apoyos en } x = \frac{l}{\sqrt{3}}\right) = \frac{wa^2l^2}{18\sqrt{3}EI} = 0.03208\frac{wa^2l^2}{EI}$

$\Delta_{\max}$ (para el sobresaliente en $x_1 = a$) $= \frac{wa^3}{24EI}(4l + 3a)$

Δ_x (entre apoyos) $\ldots = \frac{wa^2x}{12EIl}(l^2 - x^2)$

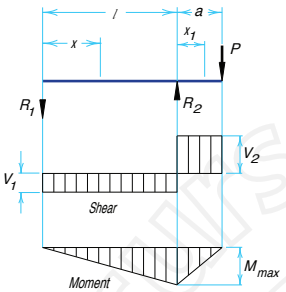
Δ_{x_1} (para el sobresaliente) $\ldots = \frac{wx_1}{24EI}(4a^2l + 6a^2x_1 - 4ax_1^2 + x_1^3)$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

26. VIGA CON DOS APOYOS SOBRESALIENDO UN EXTREMO CON UNA CARGA CONCENTRADA EN EL EXTREMO DEL SOBRESALIENTE



$R_1 = V_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{Pa}{l}$

$R_2 = V_1 + V_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{P}{l}(l + a)$

$V_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = P$

M_{max} (en R_2) $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = Pa$

M_x (entre los apoyos) $\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{Pax}{l}$

M_{x_1} (para el sobresaliente) $\ldots\ldots\ldots\ldots = P(a - x_1)$

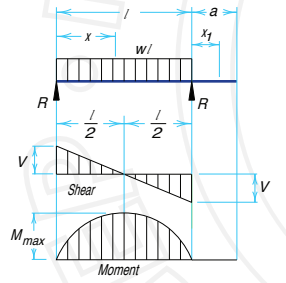
Δ_{max} $\left(\text{entre los apoyos en } x = \dfrac{l}{\sqrt{3}}\right) \ldots\ldots = \dfrac{Pal^2}{9\sqrt{3}EI} = .06415\dfrac{Pal^2}{EI}$

Δ_{max} (para sobresaliente en $x_1 = a$) $\ldots\ldots = \dfrac{Pa^2}{3EI}(l + a)$

Δ_x (entre apoyos) $\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{Pax}{6EIl}(l^2 - x^2)$

Δ_{x_1} (para el sobresaliente) $\ldots\ldots\ldots = \dfrac{Px_1}{6EI}(2al + 3ax_1 - x_1^2)$

27. VIGA CON DOS APOYOS SOBRESALIENDO UN EXTREMO CON CARGA UNIFORMEMENTE. REPARTIDA ENTRE LOS DOS APOYOS



Carga total uniforme $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = wl$

$R = V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{wl}{2}$

$V_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = w\left(\dfrac{l}{2} - x\right)$

M_{max} (en el centro) $\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{wl^2}{8}$

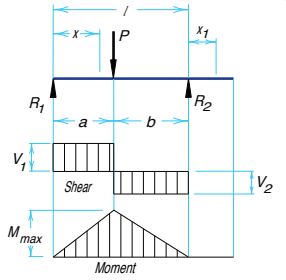
$M_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{wx}{2}(l - x)$

Δ_{max} (en el centro) $\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{5wl^4}{384EI}$

$\Delta_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{wx}{24EI}(l^2 - 2lx^2 + x^3)$

$\Delta_{x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{wl^3x_1}{24EI}$

28. VIGA CON DOS APOYOS SOBRESALIENDO UN EXTREMO CON UNA CARGA CONCENTRADA EN CUALQUIER PUNTO ENTRE LOS APOYOS



Carga total uniforme $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{8Pab}{l^2}$

$R_1 = V_1$ (max. si $a < b$) $\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{Pb}{l}$

$R_2 = V_2$ (max. si $a > b$) $\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{Pa}{l}$

M_{max} (en el punto de la carga) $\ldots\ldots\ldots = \dfrac{Pab}{l}$

M_x (si $x < a$) $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{Pbx}{l}$

Δ_{max} $\left(\text{en } x = \sqrt{\dfrac{a(a+2b)}{3}} \text{ si } a > b\right) \ldots\ldots = \dfrac{Pab(a+2b)\sqrt{3a(a+2b)}}{27EIl}$

Δ_a (en el punto de la carga) $\ldots\ldots\ldots = \dfrac{Pa^2b^2}{3EIl}$

Δ_x (si $x < a$) $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{Pbx}{6EIl}(l^2 - b^2 - x^2)$

Δ_x (si $x > a$) $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{Pa(l-x)}{6EIl}(2lx - x^2 - a^2)$

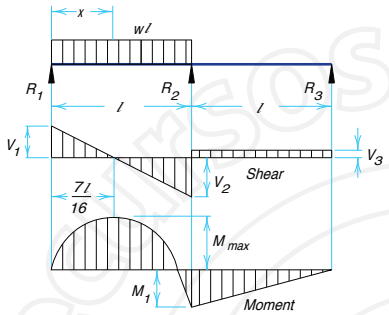
$\Delta_{x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{Pabx_1}{6EIl}(l + a)$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

29. VIGA CONTINUA DE DOS CLAROS IGUALES CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA SOBRE UN CLARO



$$\text{Carga total uniforme} = \frac{49}{64}wl$$

$$R_1 = V_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = \frac{7}{16}wl$$

$$R_2 = V_2 + V_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = \frac{5}{8}wl$$

$$R_3 = V_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = -\frac{1}{16}wl$$

$$V_2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = \frac{9}{16}wl$$

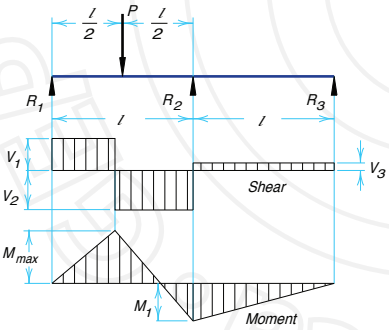
$$M_{\max}\left(\text{en } x = \frac{7}{16}l\right) \;.\;.\;.\;.\;. = \frac{49}{512}wl^2$$

$$M_1 \quad (\text{en apoyo } R_2) \;.\;.\;.\;. = \frac{1}{16}wl^2$$

$$M_x \quad (\text{si } x < l) \;.\;.\;.\;.\;. = \frac{wx}{16}(7l - 8x)$$

$$\Delta_{\max} \;(\text{en } 0.472\,l \text{ from } R_1) \;.\;. = .0092\,wl^4 / EI$$

30. VIGA CONTINUA DE DOS CLAROS IGUALES CON UNA CARGA CONCENTRADA EN EL CENTRO DE UN CLARO



$$\text{Carga total uniforme} = \frac{13}{8}P$$

$$R_1 = V_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = \frac{13}{32}P$$

$$R_2 = V_2 + V_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = \frac{11}{16}P$$

$$R_3 = V_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = -\frac{3}{32}P$$

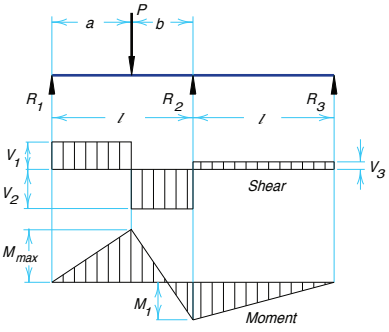
$$V_2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = \frac{19}{32}P$$

$$M_{\max} \;(\text{en el punto de la carga}) = \frac{13}{64}Pl$$

$$M_1 \quad (\text{en apoyo } R_2) \;.\;.\;.\;. = \frac{3}{32}Pl$$

$$\Delta_{\max} \;(\text{at } 0.480\,l \text{ from } R_1) \;.\;. = .015\,Pl^3 / EI$$

31 VIGA CONTINUA DOS CLAROS IGUALES, UNA CARGA CONCENTRADA EN CUALQUIER PUNTO



$$R_1 = V_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = \frac{Pb}{4l^3}(4l^2 - a(l+a))$$

$$R_2 = V_2 + V_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = \frac{Pa}{2l^3}(2l^2 + b(l+a))$$

$$R_3 = V_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = -\frac{Pab}{4l^3}(l+a)$$

$$V_2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = \frac{Pa}{4l^3}(4l^2 + b(l+a))$$

$$M_{\max} \;(\text{en el punto de la carga}) = \frac{Pab}{4l^3}(4l^2 - a(l+a))$$

$$M_1 \;(\text{en el apoyo } R_2) \;.\;.\;.\;. = \frac{Pab}{4l^2}(l+a)$$

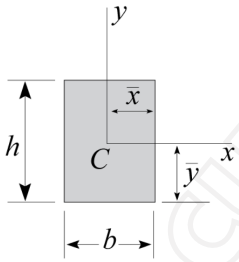
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Propiedades de áreas planas

Notación:

A = área
$\bar{x}$, $\bar{y}$ = distancias al centroide C
I_x, I_y = momentos de inercia con respecto a los ejes x y y, respectivamente
I_{xy} = producto de inercia con respecto a los ejes x y y
$I_P = I_x + I_y$ = momento polar de inercia con respecto al origen de los ejes x y y
I_{BB} = momento de inercia con respecto al eje B-B

1

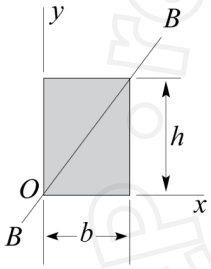


Rectángulo (origen de los ejes en el centroide)

$$A = bh \qquad \bar{x} = \frac{b}{2} \qquad \bar{y} = \frac{h}{2} \qquad S = \frac{bh^2}{6}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{hb^3}{12} \qquad I_{xy} = 0 \qquad I_P = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2)$$

2

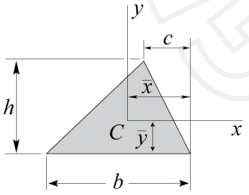


Rectángulo (origen de los ejes en una esquina)

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \qquad I_y = \frac{hb^3}{3} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4} \qquad I_P = \frac{bh}{3}(h^2 + b^2) \qquad S = \frac{bh^2}{6}$$

$$I_{BB} = \frac{b^3h^3}{6(b^2 + h^2)}$$

3



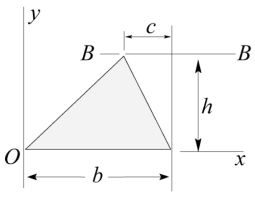
Triángulo (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \frac{bh}{2} \qquad \bar{x} = \frac{b + c}{3} \qquad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{bh}{36}(b^2 - bc + c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{72}(b - 2c) \qquad I_P = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2 - bc - c^2)$$

4



Triángulo (origen de los ejes en un vértice)

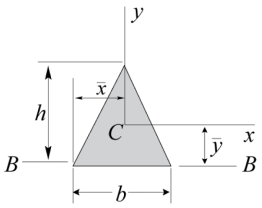
$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{bh}{12}(3b^2 - 3bc - c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{24}(3b - 2c) \qquad I_{BB} = \frac{bh^3}{4}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Propiedades de áreas planas

5



Triángulo isósceles (origen de los ejes en el centroide)

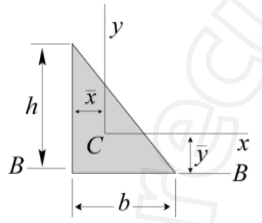
$$A=\frac{bh}{2} \qquad \bar{x}=\frac{b}{2} \qquad \bar{y}=\frac{h}{3}$$

$$I_x=\frac{bh^3}{36} \qquad I_y=\frac{hb^3}{48} \qquad I_{xy}=0$$

$$I_P=\frac{bh}{144}(4h^2+3b^2) \qquad I_{BB}=\frac{bh^3}{12}$$

(*Nota*: para un triángulo equilátero, $h=\sqrt{3}b/2$)

6



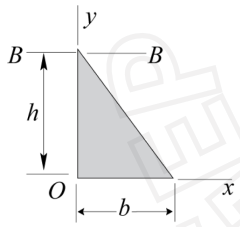
Triángulo rectángulo (origen de los ejes en el centroide)

$$A=\frac{bh}{2} \qquad \bar{x}=\frac{b}{3} \qquad \bar{y}=\frac{h}{3}$$

$$I_x=\frac{bh^3}{36} \qquad I_y=\frac{hb^3}{36} \qquad I_{xy}=-\frac{b^2h^2}{24}$$

$$I_P=\frac{bh}{36}(h^2+b^2) \qquad I_{BB}=\frac{bh^3}{12}$$

7

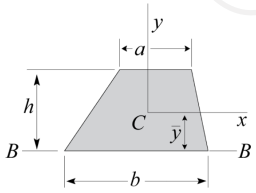


Triángulo rectángulo (origen de los ejes en un vértice)

$$I_x=\frac{bh^3}{12} \qquad I_y=\frac{hb^3}{12} \qquad I_{xy}=\frac{b^2h^2}{24}$$

$$I_P=\frac{bh}{12}(h^2+b^2) \qquad I_{BB}=\frac{bh^3}{4}$$

8

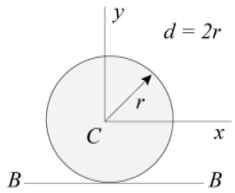


Trapecio (origen de los ejes en el centroide)

$$A=\frac{h(a+b)}{2} \qquad \bar{y}=\frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

$$I_x=\frac{h^3(a^2+4ab+b^2)}{36(a+b)} \qquad I_{BB}=\frac{h^3(3a+b)}{12}$$

9



Círculo (origen de los ejes en el centro)

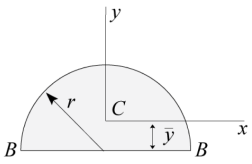
$$A=\pi r^2=\frac{\pi d^2}{4} \qquad I_x=I_y=\frac{\pi r^4}{2}=\frac{\pi d^4}{64} \qquad S=\frac{\pi d^3}{32}\doteq\frac{d^3}{10}$$

$$I_{xy}=0 \qquad I_P=\frac{\pi r^4}{2}=\frac{\pi d^4}{32} \qquad I_{BB}=\frac{5\pi r^4}{4}=\frac{5\pi d^4}{64}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Propiedades de áreas planas

10

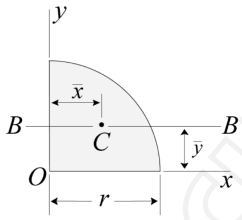


10 Semicírculo (origen de los ejes en el centroide)

$$A=\frac{\pi r^2}{2} \qquad \bar{y}=\frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x=\frac{(9\pi^2-64)r^4}{72\pi}\approx 0.1098r^4 \qquad I_y=\frac{\pi^4}{8} \qquad I_{xy}=0 \qquad I_{BB}=\frac{\pi r^4}{8}$$

11

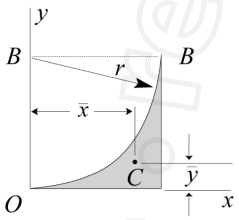


Cuadrante (origen de los ejes en el centro del círculo)

$$A=\frac{\pi r^2}{4} \qquad \bar{x}=\bar{y}=\frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x=I_y=\frac{\pi r^4}{16} \qquad I_{xy}=\frac{r^4}{8} \qquad I_{BB}=\frac{(9\pi^2-64)r^4}{144\pi}\approx 0.0.05488r^4$$

12

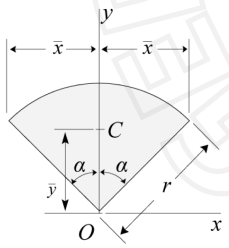


Tímpano del cuadrante (origen de los ejes en el punto de tangencia)

$$A=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)r^2 \qquad \bar{x}=\frac{2r}{3(4-\pi)}\approx 0.7766r \qquad \bar{y}=\frac{(10-3\pi)r}{3(4-\pi)}\approx 0.2234r$$

$$I_x=\left(1-\frac{5\pi}{16}\right)r^4\approx 0.01825r^4 \qquad I_y=I_{BB}=\left(\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}\right)r^4\approx 0.1370r^4$$

13



Sector circular (origen de los ejes en el centro del círculo)

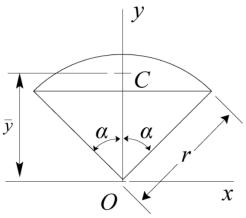
α = ángulos en radianes (α ≤ π/2)

$$A=\alpha r^2 \qquad \bar{x}=r\ \text{sen}\ \alpha \qquad \bar{y}=\frac{2r\ \text{sen}\ \alpha}{3\alpha}$$

$$I_x=\frac{r^4}{4}(\alpha+\ \text{sen}\ \alpha\cos\alpha) \qquad I_y=\frac{r^4}{4}(\alpha-\ \text{sen}\ \alpha\cos\alpha)$$

$$I_{xy}=0 \qquad I_P=\frac{\alpha r^4}{2}$$

14



Segmento circular (origen de los ejes en el centro del círculo)

α = ángulos en radianes (α ≤ π/2)

$$A=r^2(\alpha-\ \text{sen}\ \alpha\cos\alpha) \qquad \bar{y}=\frac{2r}{3}\left(\frac{\text{sen}^3\alpha}{\alpha-\ \text{sen}\ \alpha\cos\alpha}\right)$$

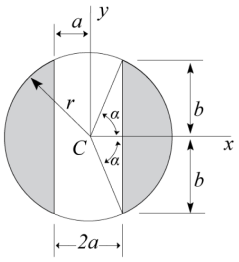
$$I_x=\frac{r^4}{4}(\alpha+\ \text{sen}\ \alpha\cos\alpha+2\alpha+\ \text{sen}^3\alpha\cos\alpha) \qquad I_{xy}=0$$

$$I_y=\frac{r^4}{12}(3\alpha-\ 3\text{sen}\ \alpha\cos\alpha-2\alpha+\ \text{sen}^3\alpha\cos\alpha)$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Propiedades de áreas planas

15



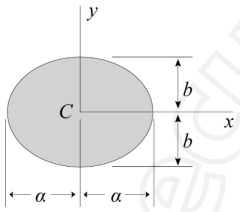
Círculo con núcleo removido (origen de los ejes en el centro del círculo)

α = ángulos en radianes $\quad (\alpha \le \pi/2)$

$$\alpha = \arccos\frac{a}{r} \qquad b = \sqrt{r^2 - a^2} \qquad A = 2r^2\left(a - \frac{ab}{r^2}\right)$$

$$I_x = \frac{r^4}{6}\left(3a - \frac{3ab}{r^2} - \frac{2ab^3}{r^4}\right) \qquad I_y = \frac{r^4}{2}\left(a - \frac{ab}{r^2} - \frac{2ab^3}{r^4}\right) \qquad I_{xy} = 0$$

16



Elipse (origen de los ejes en el centroide)

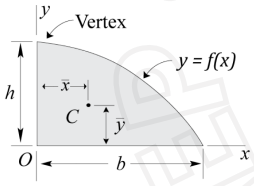
$$A = \pi ab \qquad I_x = \frac{\pi ab^3}{4} \qquad I_y = \frac{\pi ba^3}{2}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_P = \frac{\pi ab}{4}\left(b^2 + a^2\right)$$

$$\text{Circunferencia} \approx \pi\left[1.5\left(a+b\right) - \sqrt{ab}\right] \left(a/3 \le b \le a\right)$$

$$\approx 4.17b^2/a \qquad \left(0 \le b \le a/3\right)$$

17



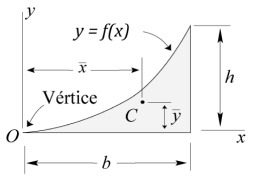
Segmento parabólico (origen de los ejes en la esquina)

$$y = f\left(x\right) = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$$

$$A = \frac{2bh}{3} \qquad \bar{x} = \frac{3b}{8} \qquad \bar{y} = \frac{2h}{5}$$

$$I_x = \frac{16bh^3}{105} \qquad I_y = \frac{2hb^3}{15} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$$

18



Tímpano parabólico (origen de los ejes en el vértice)

$$y = f\left(x\right) = \frac{hx^2}{b^2}$$

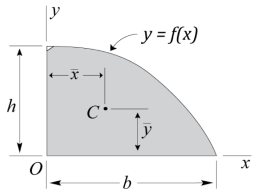
$$A = \frac{bh}{3} \qquad \bar{x} = \frac{3b}{4} \qquad \bar{y} = \frac{3h}{10}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{21} \qquad I_y = \frac{hb^3}{5} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Propiedades de áreas planas

19



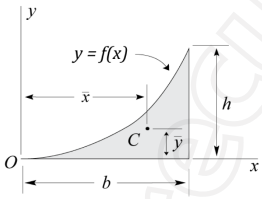
Segmento de grado *n* (origen de los ejes en la esquina)

$$y = f(x) = h\left(1 - \frac{x^n}{b^n}\right) \qquad (n > 0)$$

$$A = bh\left(\frac{n}{n+1}\right) \qquad \bar{x} = \frac{b(n+1)}{2(n+2)} \qquad \bar{y} = \frac{hn}{2n+1}$$

$$I_x = \frac{2bh^3n^3}{(n+1)(2n+1)(3n+1)} \qquad I_y = \frac{hb^3n}{3(n+3)} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2n^2}{4(n+1)(n+2)}$$

20



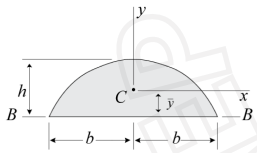
Tímpano de grado *n* (origen de los ejes en el punto de tangencia)

$$y = f(x) = \frac{hx^n}{b^n} \qquad (n > 0)$$

$$A = \frac{bh}{n+1} \qquad \bar{x} = \frac{b(n+1)}{n+2} \qquad \bar{y} = \frac{h(n+1)}{2(2n+1)}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3(3n+1)} \qquad I_y = \frac{hb^3}{n+3} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4(n+1)}$$

21



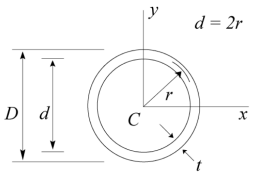
Onda senoidal (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \frac{4bh}{\pi} \qquad \bar{y} = \frac{\pi h}{8}$$

$$I_x = \left(\frac{8}{9\pi} - \frac{\pi}{16}\right)bh^3 \approx 0.08659bh^3 \qquad I_y = \left(\frac{4}{\pi} - \frac{32}{\pi^3}\right)hb^3 \approx 0.2412hb^3$$

$$I_{xy} = 0 \quad \bar{x} = \frac{3b}{8} \quad I_{BB} = \frac{8bh^3}{9\pi}$$

22



Anillo circular delgado (origen de los ejes en el centro)
Fórmulas aproximadas para el caso en que *t* es pequeño

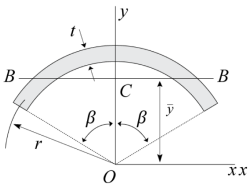
$$A = 2\pi rt \qquad I_x = I_y = \pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{8}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_P = 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4} \qquad S = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Propiedades de áreas planas

23



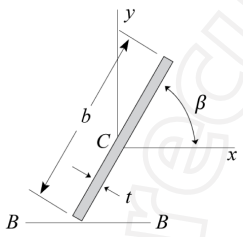
Arco circular delgado (origen de los ejes en el centro del círculo)
Fórmulas aproximadas para el caso en que *t* es pequeño
β = ángulo en radianes (*Nota:* para un arco semicircular, β = π/2)

$$A = 2\beta rt \qquad \bar{y} = \frac{r\ \text{sen}\beta}{\beta}$$

$$I_x = r^3 t\left(\beta + \text{sen}\beta\cos\beta\right) \qquad I_y = r^3 t\left(\beta - \text{sen}\beta\cos\beta\right)$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_{BB} = r^3 t\left(\frac{2\beta + \text{sen}\ 2\beta}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{\beta}\right)$$

24

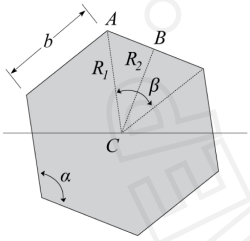


Rectángulo delgado (origen de los ejes en el centroide)
Fórmulas aproximadas para el caso en que *t* es pequeño

$$A = bt$$

$$I_x = \frac{tb^3}{12}\text{sen}^2\beta \qquad I_y = \frac{tb^3}{12}\cos^2\beta \qquad I_{BB} = \frac{tb^3}{3}\text{sen}^2\beta$$

25



Polígono regular con *n* lados (origen de los ejes en el centroide)

C = centroide (en el centro del polígono)
n = número de lados ($n \geq 3$) *b* = longitud de un lado
β = ángulo central para un lado α = ángulo interior (o ángulo en el vértice)

$$\beta = \frac{360°}{n} \qquad \alpha = \left(\frac{n-2}{n}\right)180° \qquad \alpha + \beta = 180°$$

R_1 = radio del círculo circunscrito (línea *CA*) R_2 = radio del círculo inscrito (línea *CB*)

$$R_1 = \frac{b}{2}\csc\frac{\beta}{2} \qquad R_2 = \frac{b}{2}\cot\frac{\beta}{2} \qquad A = \frac{nb^2}{4}\cot\frac{\beta}{2}$$

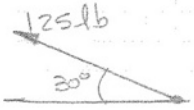
I_c = momento de inercia respecto a cualquier eje por *C* (el centroide *C* es un punto principal y todo eje por *C* es un eje principal)

$$I_c = \frac{nb^4}{192}\left(\cot\frac{\beta}{2}\right)\left(3\cot^2\frac{\beta}{2} + 1\right) \qquad I_P = 2I_c$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

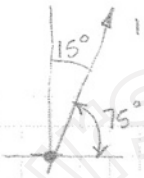
A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1 a) Componentes x y y de cada cable.



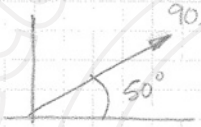
$f_x = 125 \cos 30° = -108.2532$ lb

$f_y = 125 \operatorname{sen} 30° = +62.5000$ lb



$f_x = 180 \operatorname{sen} 15° = +46.5874$ lb

$f_y = 180 \cos 15° = +173.8666$ lb

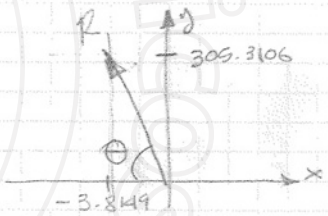


$f_x = 90 \cos 50° = +57.8509$ lb

$f_y = 90 \operatorname{sen} 50° = +68.9440$ lb

b) Magnitud de la resultante

ΣF_x	ΣF_y
-108.2532	$+62.5000$
$+46.5874$	$+173.8666$
$+57.8509$	$+68.9440$
-3.8149	$+305.3106$



$$R = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{(-3.8149)^2 + (305.3106)^2}$$

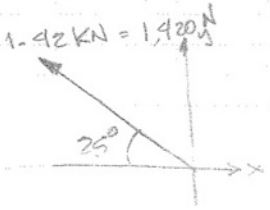
$R = 305.3344$ lb

c) Dirección de la resultante

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{f_y}{f_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{305.3106}{3.8149}\right) = 89.2841°$$

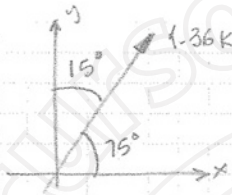
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.2 a) Componentes x y



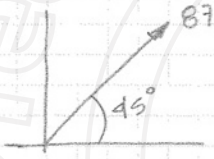
$f_x = 1420 \cos 25° = -1,286.9571\ N$

$f_y = 1420 \operatorname{sen} 25° = +600.1179\ N$



$f_x = 1360 \cos 75° = +351.9939\ N$

$f_y = 1360 \operatorname{sen} 75° = +1,313.6591\ N$



$f_x = 875 \cos 45° = +618.7184\ N$

$f_y = 875 \operatorname{sen} 45° = +618.7184\ N$

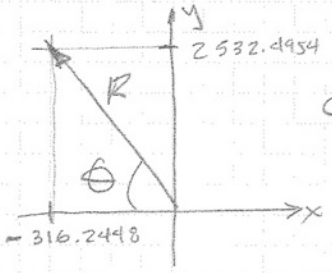
b) Magnitud de la resultante.

ΣF_x	ΣF_y
-1286.9571	$+600.1179$
$+351.9939$	$+1,313.6591$
$+618.7184$	$+618.7184$
-316.2448	$2,532.4954$

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-316.2448)^2 + (2532.4954)^2}$$

$$R = 2,552.1645\ N$$

c) Dirección de la Resultante

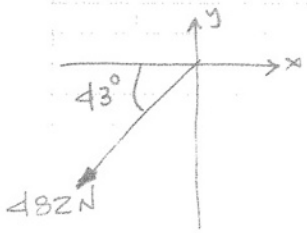


$$\theta = f_y^{-1}\left(\frac{f_y}{f_x}\right) = f_y^{-1}\left(\frac{2532.4954}{316.2448}\right) = 82.8820°$$

$$\theta = 82.8820°$$

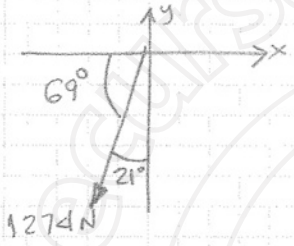
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.3 a) Componentes x y y.



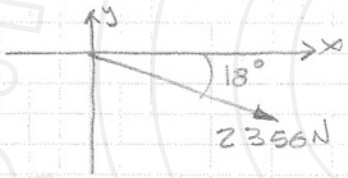
$f_x = 482 \cos 43^\circ = -352.5125\ N$

$f_y = 482 \operatorname{sen} 43^\circ = -328.7232\ N$



$f_x = 1274 \operatorname{sen} 21^\circ = -456.5608\ N$

$f_y = 1274 \cos 21^\circ = -1,189.3815\ N$



$f_x = 2356 \cos 18^\circ = +2,240.6892$

$f_y = 2356 \operatorname{sen} 18 = -728.0440$

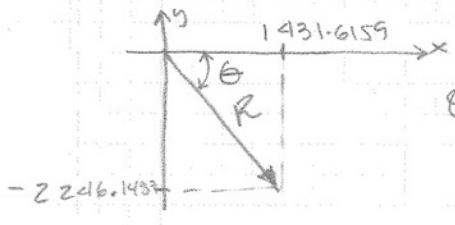
b) Magnitud de la resultante

ΣF_x	ΣF_y
-352.5125	-328.7232
-456.5608	$-1\,189.3815$
$+2\,240.6892$	-728.0440
$1,431.6159$	$-2,246.1487$

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(1431.6159)^2 + (-2246.1487)^2}$$

$$R = 2,663.5893\ N$$

c) Dirección de la resultante

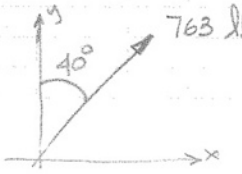


$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{f_y}{f_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{2246.1487}{1431.6159}\right)$$

$$\theta = 57.488^\circ$$

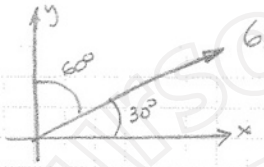
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.4 a) Componentes x y y.



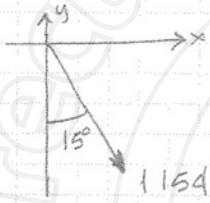
$f_x = 763 \operatorname{sen} 40° = +490.4469 \text{ lb}$

$f_y = 763 \cos 40° = +584.4919 \text{ lb}$



$f_x = 639 \cos 30° = +553.3902 \text{ lb}$

$f_y = 639 \operatorname{sen} 30° = +319.50 \text{ lb}$



$f_x = 1154 \operatorname{sen} 15° = +298.6772 \text{ lb}$

$f_y = 1154 \cos 15° = -1114.6784 \text{ lb}$

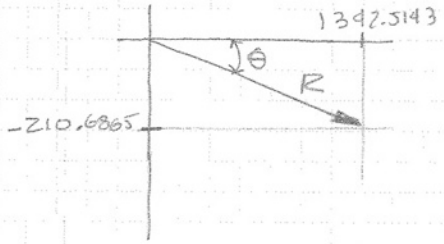
b) Magnitud de la Resultante

$\sum F_x$	$\sum F_y$
+490.4469	+584.4919
+553.3902	+319.50
+298.6772	−1114.6784
1342.5143	−210.6865

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(1342.5143)^2 + (-210.6865)^2}$$

$$R = 1,358.9457 \text{ lb}$$

c) Dirección de la resultante

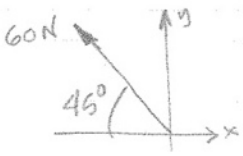


$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{f_y}{f_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{210.6865}{1342.5143}\right)$$

$$\theta = 8.9189°$$

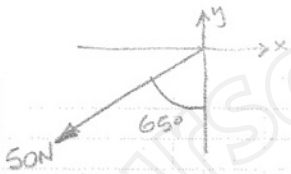
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.5 a) Componentes X y Y



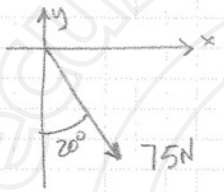
$f_x = 60 \cos 45° = -42.4264\ N$

$f_y = 60 \operatorname{sen} 45° = +42.4264\ N$



$f_x = 50 \operatorname{sen} 65° = -45.3154\ N$

$f_y = 50 \cos 65° = -21.1309\ N$



$f_x = 75 \operatorname{sen} 20° = +25.6515\ N$

$f_y = 75 \cos 20° = -70.4769\ N$

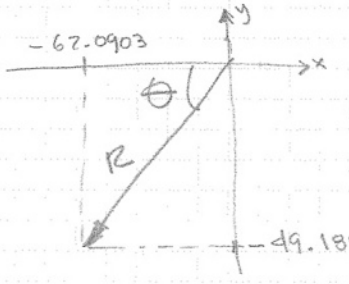
b) Magnitud de la Resultante

ΣF_x	ΣF_y
−42.4264	+42.4264
−45.3154	−21.1309
+25.6515	−70.4769
−62.0903	−49.1814

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-62.0903)^2 + (-49.1814)^2}$$

$$R = 79.2087\ N$$

c) Dirección de la resultante

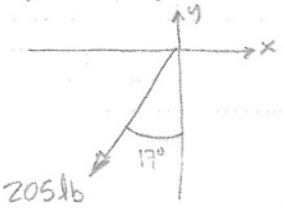


$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{f_y}{f_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{49.1814}{62.0903}\right)$$

$$\theta = 38.3826°$$

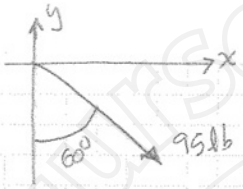
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.6 a) Componentes X y Y



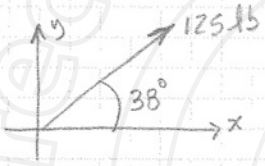
$f_x = 205 \operatorname{sen} 17^\circ = -59.9362\ lb$

$f_y = 205 \cos 17^\circ = -196.0425\ lb$



$f_x = 95 \operatorname{sen} 60^\circ = +82.2724\ lb$

$f_y = 95 \cos 60^\circ = -47.50\ lb$



$f_x = 125 \cos 38^\circ = +98.5013\ lb$

$f_y = 125 \operatorname{sen} 38^\circ = +76.9577\ lb$

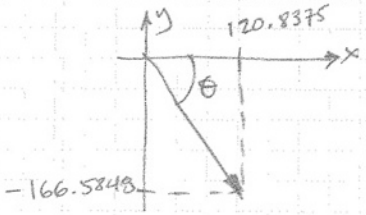
b) Magnitud de la Resultante

ΣF_x	ΣF_y
-59.9362	-196.0425
$+82.2724$	-47.50
$+98.5013$	$+76.9577$
120.8375	-166.5848

$$R = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{(120.8375)^2 + (-166.5848)^2}$$

$$R = 205.7965\ lb$$

c) Dirección de la Resultante

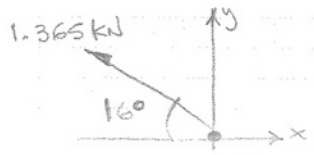


$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{f_y}{f_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{166.5848}{120.8375}\right)$$

$$\theta = 54.0436^\circ$$

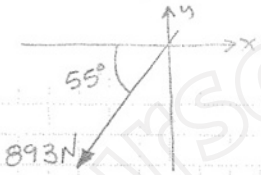
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.7 a) Componentes x y y



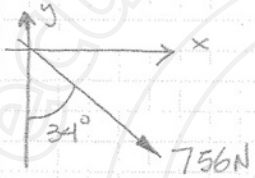
$f_x = 1365 \cos 16° = -1312.1222 N$

$f_y = 1365 \operatorname{sen} 16° = +376.2450 N$



$f_x = 893 \cos 55° = -512.2038 N$

$f_y = 893 \operatorname{sen} 55° = -731.5028 N$



$f_x = 756 \operatorname{sen} 34° = +422.7498 N$

$f_y = 756 \cos 34° = -626.7524 N$

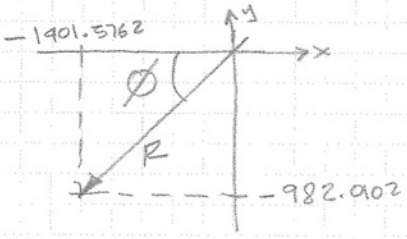
ΣF_x	ΣF_y
-1312.1222	$+376.2450$
-512.2038	-731.5028
$+422.7498$	-626.7524
$-1,401.5762$	-982.0102

b) Magnitud de la resultante.

$$R = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{(-1401.5762)^2 + (-982.0102)^2}$$

$$R = 1,711.3620 N$$

c) Dirección de la resultante

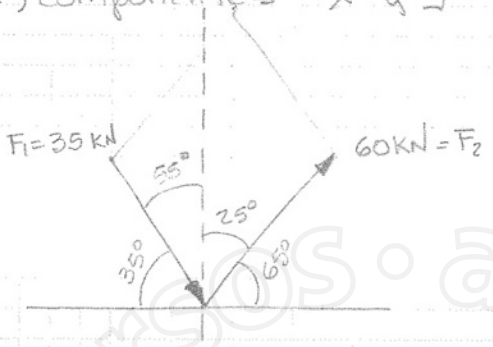


$$\emptyset = f_y^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = f_y^{-1}\left(\frac{-982.0102}{-1401.5762}\right)$$

$$\emptyset = 35.0169°$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.8 a) componentes X y Y



$F_{1x} = 35 \cos 35° = +28.6703$ kN

$F_{1y} = 35 \operatorname{sen} 35° = -20.0752$ kN

$F_{2x} = 60 \cos 65° = +25.3571$ kN

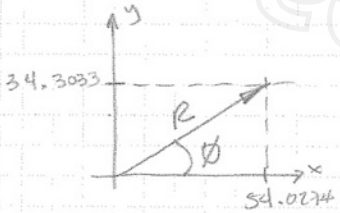
$F_{2y} = 60 \operatorname{sen} 65° = +54.3785$ kN

ΣF_x	ΣF_y
+28.6703	−20.0752
+25.3571	+54.3785
54.0274	34.3033

b) $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(54.0274)^2 + (34.3033)^2}$

$R = 63.9975 \doteq 64$ kN

c) Dirección de la resultante

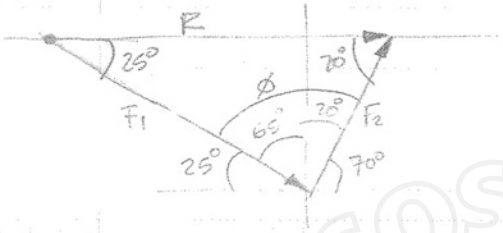


$\emptyset = tg^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{34.3033}{54.0274}\right)$

$\emptyset = 32.4124°$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.9 $R = 125\ KN$



$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\phi$$

$$\frac{R}{\text{sen } 85^\circ} = \frac{F_1}{\text{sen } 70^\circ} = \frac{F_2}{\text{sen } 25^\circ}$$

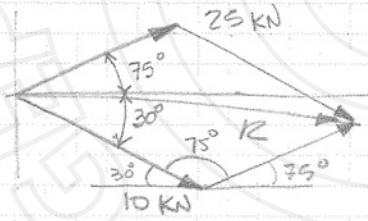
$$R \text{ sen } 70^\circ = F_1 \text{ sen } 85^\circ$$

$$\frac{R \text{ sen } 70^\circ}{\text{sen } 85^\circ} = F_1 \quad \therefore \quad F_1 = \frac{125 \text{ sen } 70^\circ}{\text{sen } 85^\circ} = \underline{117.91\ KN}$$

$$R \text{ sen } 25^\circ = F_2 \text{ sen } 85^\circ$$

$$\frac{R \text{ sen } 25^\circ}{\text{sen } 85^\circ} = F_2 \quad \therefore \quad F_2 = \frac{125 \text{ sen } 25^\circ}{\text{sen } 85^\circ} = \underline{53.0291\ KN}$$

1.10



$180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ$

a) $R^2 = 25^2 + 10^2 - (2)(25)(10)\cos 75^\circ$

$R^2 = 625 + 100 - 500 \cos 75^\circ$

$R^2 = 625 + 100 - 129.4095$

$R = \sqrt{595.5905}$

$\underline{R = 24.4047\ KN}$

b) $f_{1x} = 25 \cos 75^\circ = +6.4705\ KN$

$f_{1y} = 25 \text{ sen } 75^\circ = +24.1481\ KN$

$f_{2x} = 10 \cos 30^\circ = +8.6603\ KN$

$f_{2y} = 10 \text{ sen } 30^\circ = -5.0\ KN$

$R_x = 6.4705 + 8.6603 = 15.1308$

$R_y = 24.1481 - 5.0 = 19.1481$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

$R = \sqrt{(15.1308)^2 + (19.1481)^2}$

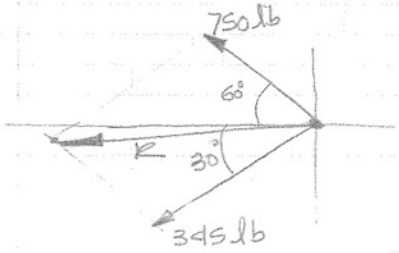
$R = \sqrt{595.5908}$

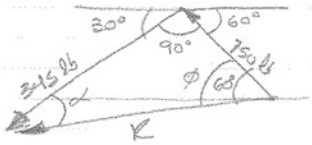
$\underline{R = 24.4047\ KN}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

a) Método del triángulo

1.11





$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\phi$$

$$R^2 = (750)^2 + (345)^2 - (2)(750)(345)\cos 90°$$

$$R^2 = 562\,500 + 119\,025 - 517\,500\cos 90°$$

$$R^2 = 681,525. - 0$$

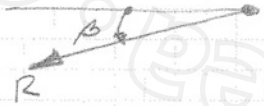
$$R = 825.5453 \text{ lb}$$

$$\frac{R}{\text{sen } 90°} = \frac{345 \text{ lb}}{\text{sen } \phi} = \frac{750 \text{ lb}}{\text{sen } \alpha}$$

$$R \text{ sen } \alpha = 750 \text{ sen } 90°$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{750 \text{ sen } 90}{825.5453} = \frac{750}{825.5453} = 0.9085$$

$$\alpha = \text{sen}^{-1}(0.9085) = 65.2976°$$



$$\beta = 65.2976 - 60° = 5.2976°$$

$$\therefore \beta = 5.2976°$$

$$R \text{ sen } \phi = 345 \text{ sen } 90°$$

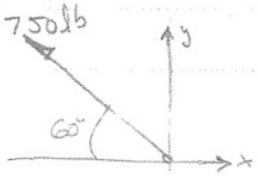
$$\text{sen } \phi = \frac{345 \text{ sen } 90°}{825.5453} = \frac{345}{825.5453} = 0.4179$$

$$\phi = \text{sen}^{-1}(0.4179) = 24.7024°$$

$$\therefore \beta = 30 - \phi = 30° - 24.7024° = 5.2976°$$

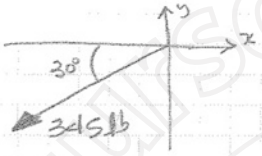
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.11 b) Componentes Rectangulares



$f_x = 750 \cos 60° = -375 \text{ lb}$

$f_y = 750 \operatorname{sen} 60° = +649.5191 \text{ lb}$



$f_x = 345 \cos 30° = -298.7788 \text{ lb}$

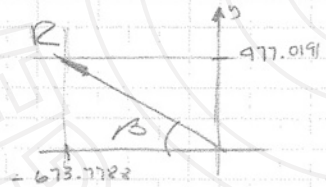
$f_y = 345 \operatorname{sen} 30° = -172.500 \text{ lb}$

$R_x = -375 - 298.7788 = -673.7788 \text{ lb}$

$R_y = +649.5191 - 172.50 = 477.0191 \text{ lb}$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-673.7788)^2 + (477.0191)^2}$

$R = 825.5453 \text{ lb}$



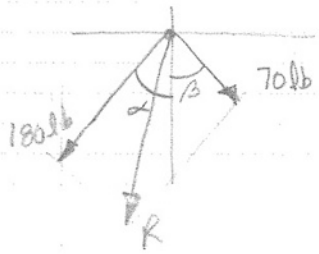
$\beta = \tan_y^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \tan_y^{-1}\left(\frac{477.0191}{673.7788}\right)$

$\beta = \tan_y^{-1} 0.7080 = 35.2976°$

$35.2976° - 30° = 5.2976°$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.12



$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{10}{15}\right) = 33.69°$

$\beta = tg^{-1}\left(\frac{5}{15}\right) = 18.4349°$

$\phi = 180° - \alpha - \beta = 180° - 33.69° - 18.4349°$

$\phi = 127.8751°$

$R^2 = 180^2 + 70^2 - 2(180)(70)\cos 127.8751°$

$R^2 = 32\,400 + 4\,900 - 25\,200 \cos 127.8751°$

$R^2 = 37,300 + 15\,471.3439$

$R^2 = 52,771.3439$

$\therefore R = \sqrt{52\,771.3439} = 229.7201 lb$

$\gamma = \alpha - \theta$

$\gamma = 33.69° - 13.91°$

$\gamma = 19.78°$

$\frac{R}{sen\phi} = \frac{70lb}{sen\theta}$

$R\,sen\theta = 70\,sen\phi$

$sen\theta = \frac{70\,sen\phi}{R}$

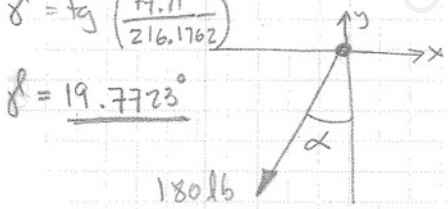
$sen\theta = \frac{70\,sen\,127.8751°}{229.7201} = 0.2405$

$\theta = sen^{-1}\,0.2405$

$\theta = 13.91°$

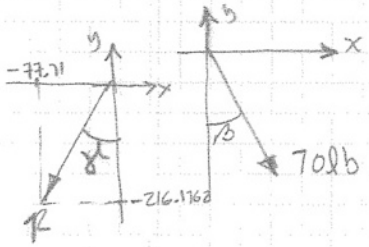
$\gamma = tg^{-1}\left(\frac{77.71}{216.1762}\right)$

$\gamma = 19.7723°$



$f_x = 180\,sen\,33.69° = -99.8459 lb$

$f_y = 180\cos 33.69° = -149.7692 lb$



$f_x = 70\,sen\,18.4349° = +22.1359 lb$

$f_y = 70\cos 18.4349° = -66.4070 lb$

$R_x = -99.8459 + 22.1359 = -77.71 lb$

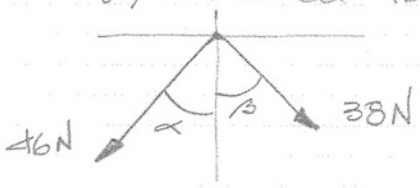
$R_y = -149.7692 - 66.4070 = -216.1762 lb$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-77.71)^2 + (-216.1762)^2} = 229.7194 lb$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.13

a) Método del Triángulo.

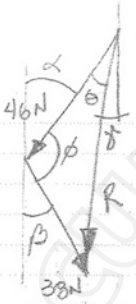


$$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) = 29.7449^\circ$$

$$\beta = tg^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) = 23.1986^\circ$$

$$\phi = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 29.7449 - 23.1986$$

$$\phi = 127.0565^\circ$$



$$R^2 = 46^2 + 38^2 - (2)(46)(38)\cos 127.0565^\circ$$

$$R^2 = 2116 + 1444 - 3496 \cos 127.0565$$

$$R^2 = 2116 + 1444 + 2106.6975 = 5,666.6975$$

$$\therefore R = \underline{75.2775\ N}$$

$$\frac{R}{sen\phi} = \frac{38N}{sen\theta}$$

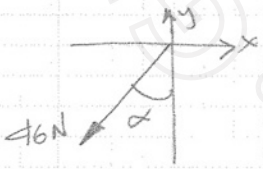
$$R\,sen\theta = 38\,sen\phi$$

$$sen\theta = \frac{38\,sen\,127.0565^\circ}{75.2775} = 0.4029$$

$$\theta = sen^{-1}\,0.4029 = 23.7565^\circ$$

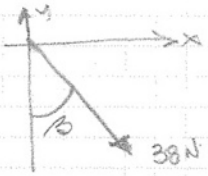
$$\gamma = \alpha - \theta = 29.7449^\circ - 23.7565^\circ = \underline{5.9884^\circ}$$

b) Componentes Rectangulares



$$f_x = 46\,sen\,29.7449^\circ = -22.8224\,N$$

$$f_y = 46\cos 29.7449^\circ = -39.9392\,N$$



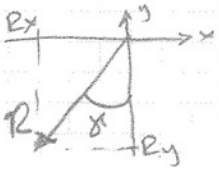
$$f_x = 38\,sen\,23.1986^\circ = +14.9689\,N$$

$$f_y = 38\cos 23.1986^\circ = -34.9275\,N$$

$$R_x = -22.8224 + 14.9689 = -7.8535\,N$$

$$R_y = -39.9392 - 34.9275 = -74.8667\,N$$

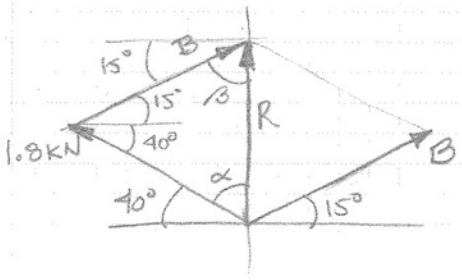
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-7.8535)^2 + (-74.8667)^2} = \underline{75.2775\,N}$$



$$\gamma = tg^{-1}\left(\frac{-7.8535}{-74.8667}\right) = \underline{5.9883^\circ}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.14



$$\frac{R}{\text{sen } 55^\circ} = \frac{1.8 \text{ kN}}{\text{sen } \beta} = \frac{B}{\text{sen } \alpha}$$

$\alpha = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

$\beta = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$

$R \text{ sen } \beta = 1.8 \text{ sen } 55^\circ$

$R \text{ sen } 75^\circ = 1.8 \text{ sen } 55^\circ$

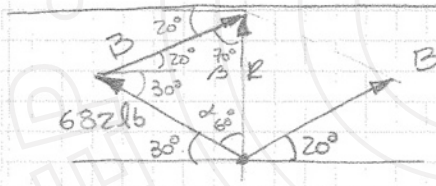
$R = \dfrac{1.8 \text{ sen } 55^\circ}{\text{sen } 75^\circ} = 1.5265 \text{ kN}$

$1.8 \text{ sen } \alpha = B \text{ sen } \beta$

$1.8 \text{ sen } 50^\circ = B \text{ sen } 75^\circ$

$\therefore B = \dfrac{1.8 \text{ sen } 50^\circ}{\text{sen } 75^\circ} = 1.4275 \text{ kN}$

1.15



$\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$\beta = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$

$$\frac{R}{\text{sen } 50^\circ} = \frac{682}{\text{sen } \beta} = \frac{B}{\text{sen } \alpha}$$

$R \text{ sen } \beta = 682 \text{ sen } 50^\circ$

$R = \dfrac{682 \text{ sen } 50^\circ}{\text{sen } 70^\circ} = 555.9715 \text{ lb}$

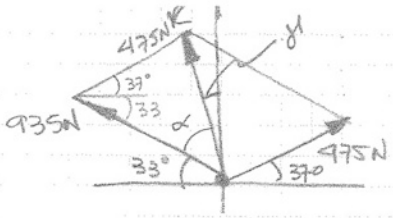
$682 \text{ sen } \alpha = B \text{ sen } \beta$

$682 \text{ sen } 60^\circ = B \text{ sen } 70^\circ$

$\therefore B = \dfrac{682 \text{ sen } 60^\circ}{\text{sen } 70^\circ} = 628.5346 \text{ lb}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.16



$\theta = 37° + 33° = 70°$

$R^2 = 935^2 + 475^2 - (2)(935)(475)\cos 70° =$

$R^2 = 874\,225 + 225\,625 - 888\,250 \cos 70°$

$R^2 = 874\,225 + 225\,625 - 303\,799.3923$

$R = \sqrt{796\,050.6077} = 892.2167\,N$

$R = 892.2167\,N$

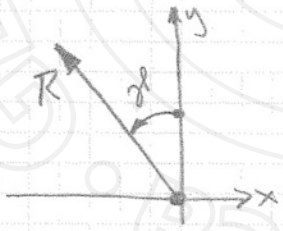
$\frac{R}{\text{sen } 70°} = \frac{475}{\text{sen } \alpha}$

$R \text{sen} \alpha = 475 \text{ sen } 70°$

$\text{sen } \alpha = \frac{475 \text{ sen } 70°}{892.2167} = 0.5003$

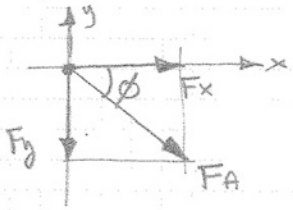
$\therefore \alpha = \text{sen}^{-1} 0.5003 = 30.0182°$

$\gamma = 90° - 33° - \alpha = 90 - 33° - 30.0182° = 26.9818°$



D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.17



$F_x = 80N$

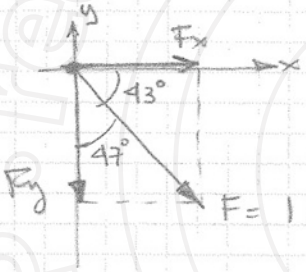
$F_y = 120N$

$F_A = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

$F_A = \sqrt{(80)^2 + (120)^2} = 144.2221\ N$

$\emptyset = tg^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{120}{80}\right) = 56.3099^\circ$

1.18

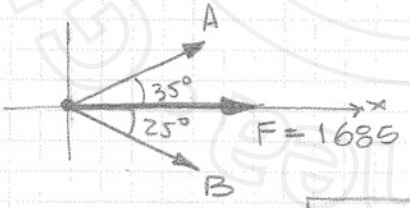


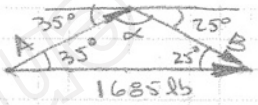
$F_x = 1350\,lb \cos 43^\circ = +987.3275\,lb$

$F_y = 1350\,lb \operatorname{sen} 43^\circ = -920.6978\,lb$

1.19

$\alpha = 180^\circ - 35^\circ - 25^\circ = 120^\circ$





$$\frac{A}{\operatorname{sen} 25^\circ} = \frac{B}{\operatorname{sen} 35^\circ} = \frac{1685\,lb}{\operatorname{sen} 120^\circ}$$

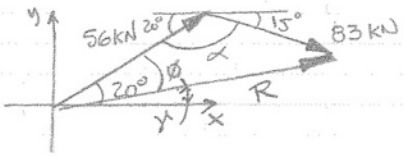
$A \operatorname{sen} 120^\circ = 1685\,lb \operatorname{sen} 25^\circ \qquad A = \frac{1685 \operatorname{sen} 25^\circ}{\operatorname{sen} 120^\circ} = 822.2758$

$B \operatorname{sen} 120^\circ = 1685\,lb \operatorname{sen} 35^\circ \qquad B = \frac{1685 \operatorname{sen} 35^\circ}{\operatorname{sen} 120^\circ} = 1115.9907$

$A = 822.2758\,lb \qquad B = 1,115.9907\,lb$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.20



$\alpha = 180° - 20° - 15° = 145°$

$R^2 = (56)^2 + (83)^2 - (2)(56)(83)\cos 145°$

$R^2 = 3136 + 6889 - 9296 \cos 145°$

$R = \sqrt{17639.8374} = \underline{132.8150\ kN}$

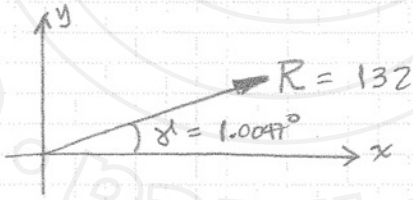
$$\frac{R}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{83\ kN}{\operatorname{sen}\emptyset}$$

$R \operatorname{sen}\emptyset = 83 \operatorname{sen}\alpha$

$$\operatorname{sen}\emptyset = \frac{83 \operatorname{sen}\alpha}{R} = \frac{83 \operatorname{sen} 145°}{132.8150} = 0.3584$$

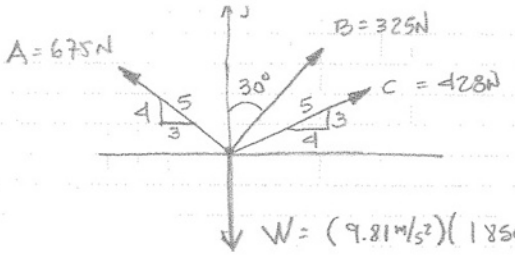
$\emptyset = \operatorname{sen}^{-1} 0.3584 = 21.0047°$

$\gamma' = \emptyset - 20° = 21.0047° - 20° = \underline{1.0047°}$



D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.21

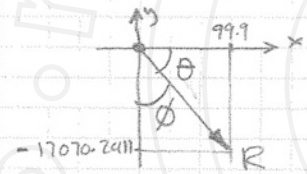


$W = (9.81 m/s^2)(1850 kg) = 18\,148.5 N$

	N	Fx	Fy
A	675	$675(3/5) = -405.$	$675(4/5) = 540$
B	325	$325 \operatorname{sen} 30° = +162.5$	$325 \cos 30° = 281.4583$
C	428	$428(4/5) = +342.4$	$428(3/5) = 256.80$
W	18 148.5	0	$-18\,148.5$
		$+99.90 N$	$-17,070.2417 N$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(99.90)^2 + (-17070.2417)^2}$$

$$R = 17\,070.5340 N$$

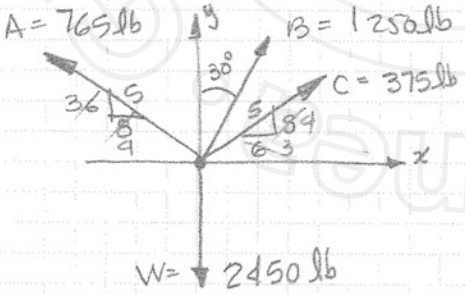


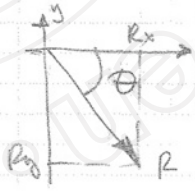
$$\phi = tg^{-1}\left(\frac{R_x}{R_y}\right) = tg^{-1}\left(\frac{99.9}{17070.2417}\right)$$

$$\phi = 0.3353°$$

$$\theta = 90° - 0.3353° = 89.6647°$$

1.22





$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{608.4682}{238}\right)$$

$$\theta = 68.6372°$$

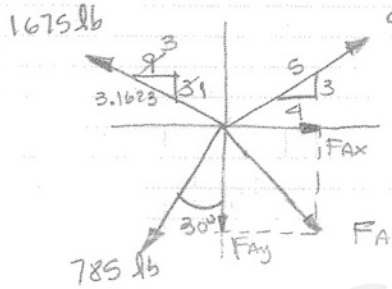
$W = 2450 lb$

	lb	Fx	Fy
A	765	$765(4/5) = -612.0$	$765(3/5) = 459.$
B	1250	$1250 \operatorname{sen} 30° = +625$	$1250 \cos 30° = 1082.5318$
C	375	$375(3/5) = +225$	$375(4/5) = 300.$
W	2450	0	$-2450.$
		$+238 lb$	$-608.4682 lb$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(238)^2 + (-608.4682)^2} = 653.3587 lb$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.23



$F_{Ax} = ?$

$F_{Ay} = ?$

$F_A = ?$

$x = 1675\,(3/3.1623) = -1589.0333$

$y = 1675\,(1/3.1623) = +529.6778$

$x = 945\,(4/5) = +756.0$

$y = 945\,(3/5) = +567.0$

$x = 785 \operatorname{sen} 30^\circ = -392.50$

$y = 785 \cos 30^\circ = -679.8299$

$\Sigma F_x = 0 \quad -1589.0333 + 756 - 392.50 + F_{Ax} = 0$

$-1225.5333 + F_{Ax} = 0$

$F_{Ax} = 1225.5333$ lb

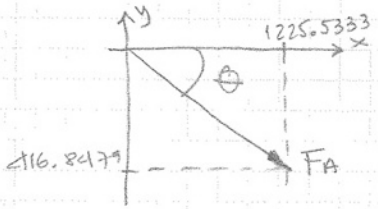
$\Sigma F_y = 529.6778 + 567. - 679.8299 - F_{Ay} = 0$

$416.8479 - F_{Ay} = 0$

$F_{Ay} = 416.8479$ lb

$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{(1225.5333)^2 + (416.8479)^2}$

$F_A = 1,294.4860$ lb

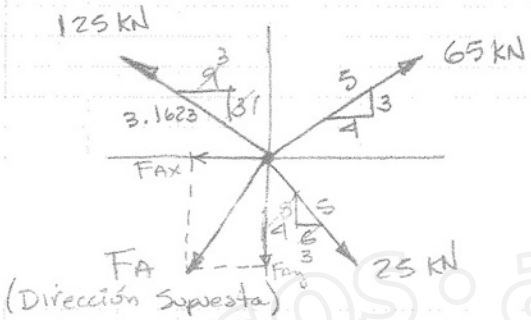


$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{416.8479}{1225.5333}\right) = \operatorname{tg}^{-1} 0.3401$

$\theta = 18.7850^\circ$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.24



$F_{Ax} = ?$

$F_{Ay} = ?$

$F_A = ?$

$x = 125\left(\frac{3}{3.1623}\right) = -118.5846$

$y = 125\left(\frac{1}{3.1623}\right) = +39.5282$

$x = 65\left(\frac{4}{5}\right) = +52.$

$y = 65\left(\frac{3}{5}\right) = +39.$

$x = 25\left(\frac{3}{5}\right) = +15.$

$y = 25\left(\frac{4}{5}\right) = -20.$

$\Sigma F_x = 0 \quad -118.5846 + 52 + 15 - F_{Ax} = 0$

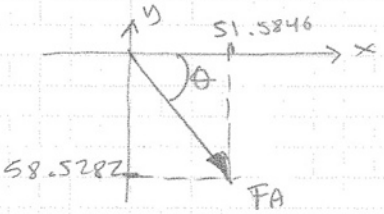
$F_{Ax} = -51.5846 \text{ kN}$ ($\Rightarrow$ cambiar la dirección)

$\Sigma F_y = 0 \quad +39.5282 + 39 - 20 - F_{Ay} = 0$

$F_{Ay} = 58.5282 \text{ kN}$

$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{(-51.5846)^2 + (58.5282)^2}$

$F_A = 78.0162 \text{ kN}$



$\theta = tg^{-1}\left(\frac{58.5282}{51.5846}\right) = tg^{-1}\,1.1346$

$\theta = 48.6082^\circ$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.25 $F_{AP} = 865$ Kips

$F_x = ?$ $\quad \theta_x = ?$
$F_y = ?$ $\quad \theta_y = ?$
$F_z = ?$ $\quad \theta_z = ?$

$$\overrightarrow{AP} = 20\text{ ft } i - 30\text{ ft } j + 60\text{ ft } k$$

$$|AP| = \sqrt{(20)^2 + (-30)^2 + (60)^2} = 70\text{ ft}$$

$$\frac{F_{AP}}{|AP|} = \frac{865}{70} = 12.3571 \text{ kips/ft}$$

$$\overrightarrow{F_{AP}} = 12.3571\left[20\text{ft } i - 30\text{ft } j + 60\text{ft } k\right]$$

$$\overrightarrow{F_{AP}} = 247.1420 \text{ kips } i - 370.7130 \text{ kips } j + 741.4260 \text{ kips } k$$

$F_{APx} = 247.1420$ kips

$F_{APy} = -370.7130$ kips

$F_{APz} = 741.4260$ kips

$$\cos\theta_x = \frac{F_{APx}}{F} = \frac{247.1420}{865} = 0.2857$$

$$\cos\theta_y = \frac{F_{APy}}{F} = \frac{-370.7130}{865} = -0.4286$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_{APz}}{F} = \frac{741.4260}{865} = 0.8571$$

$$\theta_x = \cos^{-1} 0.2857 = 73.3985^\circ$$

$$\theta_y = \cos^{-1} -0.4286 = 115.3768^\circ$$

$$\theta_z = \cos^{-1} 0.8571 = 31.0030^\circ$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.26 $F_{AP} = 81\,315\,N = 81.315\,kN$

$F_x = ?$ $\quad \theta_x = ?$
$F_y = ?$ $\quad \theta_y = ?$
$F_z = ?$ $\quad \theta_z = ?$

$$\overrightarrow{AP} = 7m\,i - 15m\,j + 25m\,k$$

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(7)^2 + (-15)^2 + (25)^2} = 29.9833\,m$$

$$\frac{F_{AP}}{|AP|} = \frac{81.315}{29.9833} = 2.7120\ kN/m$$

$$\overrightarrow{F_{AP}} = 2.7120\left[7m\,i - 15m\,j + 25m\,k\right]$$

$$\overrightarrow{F_{AP}} = 18.9840\,kN\,i - 40.6800\,kN\,j + 67.8000\,kN\,k$$

$F_{APx} = 18.9840\ kN$

$F_{APy} = -40.68\ kN$

$F_{APz} = 67.80\ kN$

$$\cos\theta_x = \frac{18.9840}{81.315} = 0.2335$$

$$\cos\theta_y = \frac{-40.68}{81.315} = -0.5003$$

$$\cos\theta_z = \frac{67.80}{81.315} = 0.8338$$

$\theta_x = \cos^{-1} 0.2335 = 76.4990°$

$\theta_y = \cos^{-1} -0.5003 = 120.0183°$

$\theta_z = \cos^{-1} 0.8338 = 33.5095°$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.27 $T_{AP} = 985\ kN$ $P_z = ?$ — es vertical P_k

$\vec{AP} = +5m\,i - 15m\,j - 35m\,k$

$\vec{BP} = +7m\,i + 20m\,j - 35m\,k$

$\vec{CP} = -10m\,i + 3m\,j - 35m\,k$

$|\vec{AP}| = \sqrt{(5)^2 + (-15)^2 + (-35)^2} = 38.4057\ m$

$|BP| = \sqrt{(7)^2 + (20)^2 + (-35)^2} = 40.9145\ m$

$|CP| = \sqrt{(-10)^2 + (3)^2 + (-35)^2} = 36.5240\ m$

$\vec{F_{AP}} = \frac{T_{AP}}{38.4057}[5i - 15j - 35k]$

$\vec{F_{BP}} = \frac{T_{BP}}{40.9145}[7i + 20j - 35k]$

$\vec{F_{CP}} = \frac{T_{CP}}{36.5240}[-10i + 3j - 35k]$

$\vec{F_{AP}} = (0.1302\,i - 0.3906\,j - 0.9113\,k)\,T_{AP}$

$\vec{F_{BP}} = (0.1711\,i + 0.4888\,j - 0.8554\,k)\,T_{BP}$

$\vec{F_{CP}} = (-0.2738\,i + 0.0821\,j - 0.9583\,k)\,T_{CP}$

$\vec{F_{AP}} = 0.1302\,T_{AP}\,i - 0.3906\,T_{AP}\,j - 0.9113\,T_{AP}\,k$

$\vec{F_{BP}} = 0.1711\,T_{BP}\,i + 0.4888\,T_{BP}\,j - 0.8554\,T_{BP}\,k$

$\vec{F_{CP}} = -0.2738\,T_{CP}\,i + 0.0821\,T_{CP}\,j - 0.9583\,T_{CP}\,k$

$\sum F_{xi} = 0 \quad 0.1302\,T_{AP} + 0.1711\,T_{BP} - 0.2738\,T_{CP} = 0$

$\sum F_{yj} = 0 \quad -0.3906\,T_{AP} + 0.4888\,T_{BP} + 0.0821\,T_{CP} = 0$

$\sum F_{zk} = 0 \quad -0.9113\,T_{AP} - 0.8554\,T_{BP} - 0.9583\,T_{CP} + P_z = 0$

Si sustituimos $T_{AP} = 985\ kN$ tenemos:

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.64 CONT.

$\Sigma F_x = 0 \quad 128.2470 + 0.1711\, T_{BP} - 0.2738\, T_{CP} = 0$ ——— (1)

$\Sigma F_y = 0 \quad -384.7410 + 0.4888\, T_{BP} + 0.0821\, T_{CP} = 0$ ——— (2)

$\Sigma F_z = 0 \quad -897.6305 - 0.8555\, T_{BP} - 0.9583\, T_{CP} + P_z = 0$ ——— (3)

$$T_{BP} = \frac{-128.2470}{0.1711} + \frac{0.2738\, T_{CP}}{0.1711}$$

$$T_{BP} = -749.5441 + 1.6002\, T_{CP}$$

$$-384.7410 + 0.4888\,[-749.5441 + 1.6002\, T_{CP}] + 0.0821\, T_{CP} = 0$$

$$-384.7410 - 366.3772 + 0.7822\, T_{CP} + 0.0821\, T_{CP} = 0$$

$$-751.1182 + 0.8643\, T_{CP} = 0$$

$$T_{CP} = \frac{751.1182}{0.8643} = 869.0480 \text{ KN}$$

$$T_{BP} = -749.5441 + 1.6002(869.0480)$$

$$T_{BP} = -749.5441 + 1.390.6506$$

$$T_{BP} = 641.1065 \text{ KN}$$

$$P_z = 897.6305 + 0.8555\, T_{BP} + 0.9583\, T_{CP}$$

$$P_z = 897.6305 + 0.8555(641.1065) + 0.9583(869.0480)$$

$$P_z = 897.6305 + 548.4666 + 832.8087$$

$$P_z = 2,278.9058 \text{ KN}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.28 $T_{BP} = 746\ kN$ $P_y = ?$

$\vec{AP} = 7m\,i - 20m\,j - 40m\,k$

$\vec{BP} = 9m\,i + 25m\,j - 40m\,k$

$\vec{CP} = -12m\,i + 5m\,j - 40m\,k$

$|\vec{AP}| = \sqrt{(7)^2 + (-20)^2 + (-40)^2} = 45.2659$

$|\vec{BP}| = \sqrt{(9)^2 + (25)^2 + (-40)^2} = 48.0208$

$|\vec{CP}| = \sqrt{(-12)^2 + (5)^2 + (-40)^2} = 42.0595$

$\vec{F}_{AP} = \frac{T_{AP}}{45.2659}[7m\,i - 20m\,j - 40m\,k]$

$\vec{F}_{BP} = \frac{T_{BP}}{48.0208}[9m\,i + 25m\,j - 40m\,k]$

$\vec{F}_{CP} = \frac{T_{CP}}{42.0595}[-12m\,i + 5m\,j - 40m\,k]$

$\vec{F}_{AP} = 0.1546\,T_{AP}\,i - 0.4418\,T_{AP}\,j - 0.8837\,T_{AP}\,k$

$\vec{F}_{BP} = 0.1874\,T_{BP}\,i + 0.5206\,T_{BP}\,j - 0.8330\,T_{BP}\,k$

$\vec{F}_{CP} = -0.2853\,T_{CP}\,i + 0.1189\,T_{CP}\,j - 0.9510\,T_{CP}\,k$

$\Sigma F_x i = 0 \quad 0.1546\,T_{AP} + 0.1874\,T_{BP} - 0.2853\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_y j = 0 \quad -0.4418\,T_{AP} + 0.5206\,T_{BP} + 0.1189\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_z k = 0 \quad -0.8837\,T_{AP} - 0.8330\,T_{BP} - 0.9510\,T_{CP} + P_z = 0$

Sustituyendo el valor de $T_{BP} = 746\ kN$ tenemos

$0.1546\,T_{AP} + 0.1874(746) - 0.2853\,T_{CP} = 0$

$-0.4418\,T_{AP} + 0.5206(746) + 0.1189\,T_{CP} = 0$

$-0.8837\,T_{AP} - 0.8330(746) - 0.9510\,T_{CP} + P_z = 0$

$0.1546\,T_{AP} + 139.8004 - 0.2853\,T_{CP} = 0$ ——— (1)

$-0.4418\,T_{AP} + 388.3676 + 0.1189\,T_{CP} = 0$ ——— (2)

$-0.8837\,T_{AP} - 621.4180 - 0.9510\,T_{CP} + P_z = 0$ ——— (3)

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.28 continuación

$$T_{AP} = \frac{-139.8004}{0.1546} + \frac{0.2853\,T_{CP}}{0.1546}$$

$$T_{AP} = -904.2717 + 1.8454\,T_{CP}$$

$$-0.4418\,[-904.2717 + 1.8454\,T_{CP}] + 388.3676 + 0.1189\,T_{CP} = 0$$

$$+399.5072 - 0.8153\,T_{CP} + 388.3676 + 0.1189\,T_{CP} = 0$$

$$787.8748 - 0.6964\,T_{CP} = 0$$

$$\frac{787.8748}{0.6964} = T_{CP} \quad \therefore T_{CP} = 1,131.3538\ kN$$

$$T_{AP} = -904.2717 + 1.8454\,(1131.3538)$$

$$T_{AP} = -904.2717 + 2087.8003 = 1,183.5286\ kN$$

$$-0.8837\,(1183.5286) - 621.4180 - 0.9510\,(1131.3538) + P_z = 0$$

$$-1045.8842 - 621.4180 - 1075.9175 + P_z = 0$$

$$\therefore P_z = 2,743.2197\ kN$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.29 $T_{CP} = 1075\ kN \qquad P_z = ?$

$\vec{AP} = 6m\,i - 23m\,j - 38m\,k$

$\vec{BP} = 11m\,i + 27m\,j - 38m\,k$

$\vec{CP} = -14m\,i + 7m\,j - 38m\,k$

$|\vec{AP}| = \sqrt{(6)^2 + (-23)^2 + (-38)^2} = 44.8219$

$|\vec{BP}| = \sqrt{(11)^2 + (27)^2 + (-38)^2} = 47.8957$

$|\vec{CP}| = \sqrt{(-14)^2 + (7)^2 + (-38)^2} = 41.0974$

$\vec{F_{AP}} = \frac{T_{AP}}{44.8219}[6m\,i - 23m\,j - 38m\,k]$

$\vec{F_{BP}} = \frac{T_{BP}}{47.8957}[11m\,i + 27m\,j - 38m\,k]$

$\vec{F_{CP}} = \frac{T_{CP}}{41.0974}[-14m\,i + 7m\,j - 38m\,k]$

$\vec{F_{AP}} = 0.1339\,T_{AP}\,i - 0.5131\,T_{AP}\,j - 0.8478\,T_{AP}\,k$

$\vec{F_{BP}} = 0.2297\,T_{BP}\,i + 0.5637\,T_{BP}\,j - 0.7934\,T_{BP}\,k$

$\vec{F_{CP}} = -0.3407\,T_{CP} + 0.1703\,T_{CP}\,j - 0.9246\,T_{CP}\,k$

$\Sigma F_{xi} = 0 \quad 0.1339\,T_{AP} + 0.2297\,T_{BP} - 0.3407\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{yj} = 0 \quad -0.5131\,T_{AP} + 0.5637\,T_{BP} + 0.1703\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{zk} = 0 \quad -0.8478\,T_{AP} - 0.7934\,T_{BP} - 0.9246\,T_{CP} + P_z = 0$

Si sustituimos el valor de $T_{CP} = 1075\ kN$ tenemos:

$0.1339\,T_{AP} + 0.2297\,T_{BP} - 0.3407(1075) = 0$

$-0.5131\,T_{AP} + 0.5637\,T_{BP} + 0.1703(1075) = 0$

$-0.8478\,T_{AP} - 0.7934\,T_{BP} - 0.9246(1075) + P_z = 0$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.29 continuación

$$0.1339\,T_{AP} + 0.2297\,T_{BP} - 366.2525 = 0$$
$$-0.5131\,T_{AP} + 0.5637\,T_{BP} + 183.0725 = 0$$
$$-0.8478\,T_{AP} - 0.7934\,T_{BP} - 993.9450 + P_z = 0$$

$$T_{AP} = \frac{-0.2297\,T_{BP}}{0.1339} + \frac{366.2525}{0.1339}$$

$$T_{AP} = -1.7155\,T_{BP} + 2735.2689$$

$$-0.5131\left[-1.7155\,T_{BP} + 2735.2689\right] + 0.5637\,T_{BP} + 183.0725 = 0$$

$$+0.8802\,T_{BP} - 1403.4665 + 0.5637\,T_{BP} + 183.0725 = 0$$

$$1.4439\,T_{BP} - 1220.3940 = 0$$

$$\therefore\ T_{BP} = \frac{1220.3940}{1.4439} = 845.2067$$

$$T_{BP} = 845.2067\ \text{kN}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$T_{AP} = 3,245$ Kips

1.30

$\vec{AP} = +12ft\,i - 67ft\,j - 120\,ft\,k$

$\vec{BP} = +50\,ft\,i + 42ft\,j - 120\,ft\,k$

$\vec{CP} = -34ft\,i + 17ft\,j - 120ft\,k$

$|\vec{AP}| = \sqrt{(12)^2 + (-67)^2 + (-120)^2} = 137.9601$

$|\vec{BP}| = \sqrt{(50)^2 + (42)^2 + (-120)^2} = 136.6163$

$|\vec{CP}| = \sqrt{(-34)^2 + (17)^2 + (-120)^2} = 125.8769$

$\vec{F}_{AP} = \frac{T_{AP}}{137.9601}[12ft\,i - 67\,ft\,j - 120\,ft\,k]$

$\vec{F}_{BP} = \frac{T_{BP}}{136.6163}[50ft\,i + 42ft\,j - 120\,ft\,k]$

$\vec{F}_{CP} = \frac{T_{CP}}{125.8767}[-34\,ft\,i + 17\,ft\,j - 120\,ft\,k]$

$\vec{F}_{AP} = 0.0870\,T_{AP}\,i - 0.4856\,T_{AP}\,j - 0.8698\,T_{AP}\,k$

$\vec{F}_{BP} = 0.3660\,T_{BP}\,i + 0.3074\,T_{BP}\,j - 0.8784\,T_{BP}\,k$

$\vec{F}_{CP} = -0.2701\,T_{CP}\,i + 0.1351\,T_{CP}\,j - 0.9533\,T_{CP}\,k$

$\Sigma F_x i = 0 \quad 0.0870\,T_{AP} + 0.3660\,T_{BP} - 0.2701\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_y j = 0 \quad -0.4856\,T_{AP} + 0.3074\,T_{BP} + 0.1351\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_z = 0 \quad -0.8698\,T_{AP} - 0.8784\,T_{BP} - 0.9533\,T_{CP} + P_z = 0$

$-0.0870(3245) + 0.3660\,T_{BP} - 0.2701\,T_{CP} = 0$

$-0.4856(3245) + 0.3074\,T_{BP} + 0.1351\,T_{CP} = 0$

$-0.8698(3245) - 0.8784\,T_{BP} - 0.9533\,T_{CP} + P_z = 0$

$-282.3150 + 0.3660\,T_{BP} - 0.2701\,T_{CP} = 0$ ——— (1)

$-1575.7720 + 0.3074\,T_{BP} + 0.1351\,T_{CP} = 0$ ——— (2)

$-2822.5010 - 0.8784\,T_{BP} - 0.9533\,T_{CP} + P_z = 0$ ——— (3)

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.30 continuación

$$0.3660\,T_{BP} = 0.2701\,T_{CP} + 282.3150$$

$$T_{BP} = \frac{0.2701\,T_{CP}}{0.3660} + \frac{282.3150}{0.3660}$$

$$T_{BP} = 0.7380\,T_{CP} + 771.3525$$

$$-1575.7720 + 0.3074\left[0.7380\,T_{CP} + 771.3525\right] + 0.1351\,T_{CP} = 0$$

$$-1575.7720 + 0.2269\,T_{CP} + 237.1138 + 0.1351\,T_{CP} = 0$$

$$-1338.6582 + 0.3620\,T_{CP} = 0$$

$$T_{CP} = \frac{1338.6582}{0.3620}$$

$$T_{CP} = 3{,}697.9508 \text{ Kips}$$

$$T_{BP} = 0.7380\,(3697.9508) + 771.3525$$

$$T_{BP} = 2729.0877 + 771.3525$$

$$T_{BP} = 3{,}500.4402 \text{ Kips}$$

$$-2822.5010 - 0.8784\,(3500.4402) - 0.9533\,(3697.9508) + P_z = 0$$

$$-2822.5010 - 3074.7867 - 3525.2565 + P_z = 0$$

$$-9{,}422.5442 + P_z = 0$$

$$\therefore P_z = 9{,}422.5442 \text{ Kips}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.31 Placa $W_z = (3\,545\ kg)(9.81\ m/s^2) = 34\,776.45\ N$

$W_z = 34.776\ kN$

$\Sigma F_x = 0 \quad -T_{AP}\,sen\,45^\circ \cos 10^\circ + T_{BP}\,sen\,45^\circ\,sen\,35^\circ + T_{CP}\,sen\,45^\circ \cos 65^\circ = 0$ ——— ①

$\Sigma F_y = 0 \quad T_{AP}\,sen\,45^\circ \cos 80^\circ + T_{BP}\,sen\,45^\circ \cos 35^\circ - T_{CP}\,sen\,45^\circ\,sen\,65^\circ = 0$ ——— ②

$\Sigma F_z = 0 \quad -T_{AP}\cos 45^\circ - T_{BP}\cos 45^\circ - T_{CP}\cos 45^\circ + 34.776 = 0$ ——— ③

$-0.6964\,T_{AP} + 0.4056\,T_{BP} + 0.2988\,T_{CP} = 0$ ——— ①

$0.1228\,T_{AP} + 0.5792\,T_{BP} - 0.6409\,T_{CP} = 0$ ——— ②

$-0.7071\,T_{AP} - 0.7071\,T_{BP} - 0.7071\,T_{CP} + 34.776 = 0$

$-T_{AP} - T_{BP} - T_{CP} + 49.1807 = 0$ ——— ③

Despejamos T_{AP} de la ec ③ y sustituimos en la ec ①:

$T_{AP} = -T_{BP} - T_{CP} + 49.1809$

$-0.6964\,[-T_{BP} - T_{CP} + 49.1809] + 0.4056\,T_{BP} + 0.2988\,T_{CP} = 0$

$+0.6964\,T_{BP} + 0.6964\,T_{CP} - 34.2496 + 0.4056\,T_{BP} + 0.2988\,T_{CP} = 0$

$1.1020\,T_{BP} + 0.9952\,T_{CP} - 34.2496 = 0$

$1.1020\,T_{BP} = 34.2496 - 0.9952\,T_{CP}$

$T_{BP} = \frac{34.2496}{1.1020} - \frac{0.9952\,T_{CP}}{1.1020}$

$T_{BP} = 31.0795 - 0.9031\,T_{CP}$

$0.1228\,[-T_{BP} - T_{CP} + 49.1809] + 0.5792\,[31.0795 - 0.9031\,T_{CP}] - 0.6409\,T_{CP} = 0$

$-0.1228\,T_{BP} - 0.1228\,T_{CP} + 6.0394 + 18.0012 - 0.5231\,T_{CP} - 0.6409\,T_{CP} = 0$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.31 continuación

$$-0.1228\,T_{BP} - 1.2868\,T_{CP} + 24.0406 = 0$$

Si sustituimos el valor de T_{BP} tenemos:

$$-0.1228\,[31.0795 - 0.9031\,T_{CP}] - 1.2868\,T_{CP} + 24.0406 = 0$$

$$-3.8166 + 0.1109\,T_{CP} - 1.2868\,T_{CP} + 24.0406 = 0$$

$$20.2240 - 1.1759\,T_{CP} = 0$$

$$T_{CP} = \frac{20.2240}{1.1759} = \underline{17.1987\ KN}$$

$$T_{BP} = 31.0795 - 0.9031\,[17.1987]$$

$$T_{BP} = 31.0795 - 15.5321 = \underline{15.5474\ KN}$$

$$T_{AP} = -15.5474 - 17.1987 + 49.1809$$

$$T_{AP} = \underline{16.4348\ KN}$$

Recursos académicos en línea Grupo Editorial Patria

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.32 Placa $W_z = 7850$ lb

$$\Sigma F_x = 0 \quad -T_{AP}\,\text{sen}\,60^\circ \cos 20^\circ + T_{BP}\,\text{sen}\,60^\circ \,\text{sen}\,35^\circ - T_{CP}\,\text{sen}\,60^\circ \cos 65^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +T_{AP}\,\text{sen}\,60^\circ \cos 80^\circ + T_{BP}\,\text{sen}\,60^\circ \cos 35^\circ - T_{CP}\,\text{sen}\,60^\circ \,\text{sen}\,65^\circ = 0$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad -T_{AP}\cos 60^\circ - T_{BP}\cos 60^\circ - T_{CP}\cos 60^\circ + 7850 = 0$$

$$-0.8138\,T_{AP} + 0.4967\,T_{BP} + 0.3660\,T_{CP} = 0 \quad \text{(1)}$$

$$+0.1504\,T_{AP} + 0.7094\,T_{BP} - 0.7849\,T_{CP} = 0 \quad \text{(2)}$$

$$-0.50\,T_{AP} - 0.50\,T_{BP} - 0.50\,T_{CP} + 7850 = 0 \quad \text{(3)}$$

Si despejamos T_{AP} de la ec (1) y la sust. en la ec (2):

$$T_{AP} = \frac{0.4967\,T_{BP}}{0.8138} + \frac{0.3660\,T_{CP}}{0.8138}$$

$$T_{AP} = 0.6103\,T_{BP} + 0.4497\,T_{CP}$$

$$+0.1504\,[0.6103\,T_{BP} + 0.4497\,T_{CP}] + 0.7094\,T_{BP} - 0.7849\,T_{CP} = 0$$

$$0.0918\,T_{BP} + 0.0676\,T_{CP} + 0.7094\,T_{BP} - 0.7849\,T_{CP} = 0$$

$$0.8012\,T_{BP} - 0.7173\,T_{CP} = 0$$

$$T_{BP} = \frac{0.7173}{0.8012}\,T_{CP} = 0.8953\,T_{CP}$$

$$T_{AP} = 0.6103\,(0.8953\,T_{CP}) + 0.4497\,T_{CP}$$

$$T_{AP} = 0.5464\,T_{CP} + 0.4497\,T_{CP}$$

$$T_{AP} = 0.9961\,T_{CP}$$

$$-0.50\,[0.9961\,T_{CP}] - 0.50\,[0.8953\,T_{CP}] - 0.50\,T_{CP} + 7850 = 0$$

$$-0.4981\,T_{CP} - 0.4477\,T_{CP} - 0.50\,T_{CP} + 7850 = 0$$

$$-1.4458\,T_{CP} + 7850 = 0$$

$$T_{CP} = \frac{7850}{1.4458} = \underline{5{,}429.52\ \text{lb}}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.32 continuación

$$T_{AP} = 0.9961\,(5429.52) = 5,408.3449\ lb$$

$$T_{BP} = 0.8953\,(5429.52) = 4,861.0493\ lb$$

1.33 $W_z = 3964\ N$

$$\vec{AP} = 0.30m\,i - 0.8m\,j - 2m\,k$$

$$\vec{BP} = 0.75m\,i + 0.7m\,j - 2m\,k$$

$$\vec{CP} = -0.5m\,i + 0.7m\,j - 2m\,k$$

$$|\vec{AP}| = \sqrt{(0.3)^2 + (-0.8)^2 + (-2)^2} = 2.1749$$

$$|\vec{BP}| = \sqrt{(0.75)^2 + (0.7)^2 + (-2)^2} = 2.2478$$

$$|\vec{CP}| = \sqrt{(-0.5)^2 + (0.7)^2 + (-2)^2} = 2.1772$$

$$U_{\vec{AP}} = \frac{0.30}{2.1749}\,i - \frac{0.80}{2.1749}\,j - \frac{2}{2.1749}\,k = 0.1379\,i - 0.3678\,j - 0.9196$$

$$U_{\vec{BP}} = \frac{0.75}{2.2478}\,i + \frac{0.70}{2.2478}\,j - \frac{2}{2.2478}\,k = 0.3337\,i + 0.3114\,j - 0.8898k$$

$$U_{\vec{CP}} = \frac{-0.5}{2.1772}\,i + \frac{0.70}{2.1772}\,j - \frac{2}{2.1772}\,k = -0.2297\,i + 0.3215\,j - 0.9186$$

$$\vec{T_{AP}} = T_{AP}\,(0.1379\,i - 0.3678\,j - 0.9196k)$$

$$\vec{T_{AP}} = 0.1379\,T_{AP}\,i - 0.3678\,T_{AP}\,j - 0.9196\,T_{AP}\,k$$

$$\vec{T_{BP}} = T_{BP}\,(0.3337\,i + 0.3114\,j - 0.8898k)$$

$$\vec{T_{BP}} = 0.3337\,T_{BP}\,i + 0.3114\,T_{BP}\,j - 0.8898\,T_{BP}\,k$$

$$\vec{T_{CP}} = T_{CP}\,(-0.2297\,i + 0.3215\,j - 0.9186\,k)$$

$$\vec{T_{CP}} = -0.2297\,T_{CP}\,i + 0.3215\,T_{CP}\,j - 0.9186\,T_{CP}\,k$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.33 continuación

$\Sigma F_{xi}=0 \quad 0.1379\,T_{AP} + 0.3337\,T_{BP} - 0.2297\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{yj}=0 \quad -0.3678\,T_{AP} + 0.3114\,T_{BP} + 0.3215\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{zk}=0 \quad -0.9196\,T_{AP} - 0.8898\,T_{BP} - 0.9186\,T_{CP} + 3964 = 0$

$$T_{AP} = \frac{-0.3337\,T_{BP}}{0.1379} + \frac{0.2297\,T_{CP}}{0.1379}$$

$$T_{AP} = -2.4199\,T_{BP} + 1.6657\,T_{CP}$$

$$-0.9196\left[-2.4199\,T_{BP} + 1.6657\,T_{CP}\right] - 0.8898\,T_{BP} - 0.9186\,T_{CP} + 3964 =$$

$$+2.2253\,T_{BP} - 1.5318\,T_{CP} - 0.8898\,T_{BP} - 0.9186\,T_{CP} + 3964 = 0$$

$$1.3355\,T_{BP} - 2.4504\,T_{CP} + 3964 = 0$$

$$T_{BP} = \frac{2.4504}{1.3355}\,T_{CP} - \frac{3964}{1.3355} = 1.8348\,T_{CP} - 2968.1767$$

$$T_{AP} = -2.4199\left[1.8348\,T_{CP} - 2968.1767\right] + 1.6657\,T_{CP}$$

$$T_{AP} = -4.44\,T_{CP} + 7182.6908 + 1.6657\,T_{CP}$$

$$T_{AP} = -2.7743\,T_{CP} + 7182.6908$$

$$-0.3678\left[-2.7743\,T_{CP} + 7182.6908\right] + 0.3114\left[1.8348\,T_{CP} - 2968.1767\right]$$

$$+ 0.3215\,T_{CP} = 0$$

$$+1.0204\,T_{CP} - 2641.7937 + 0.5714\,T_{CP} - 924.2902 + 0.3215\,T_{CP} = 0$$

$$1.9133\,T_{CP} - 3566.0839 = 0$$

$$T_{CP} = \frac{3566.0839}{1.9133} = \underline{1863.8394\ N}$$

$$T_{AP} = -2.7743\,(1863.8394) + 7182.6908 = \underline{2011.8412\ N}$$

$$T_{BP} = 1.8348\,(1863.8394) - 2968.1767 = \underline{451.5958\ N}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.34 $W = 8{,}750\,lb \quad \therefore P_z = 8750\,lb$

$\vec{AP} = +12in\,i - 35in\,j - 80in\,k$

$\vec{BP} = +33in\,i + 30in\,j - 80in\,k$

$\vec{CP} = -20in\,i + 30in\,j - 80in\,k$

$|\vec{AP}| = \sqrt{(12)^2 + (-35)^2 + (-80)^2} = 88.1419$

$|\vec{BP}| = \sqrt{(33)^2 + (30)^2 + (-80)^2} = 91.5915$

$|\vec{CP}| = \sqrt{(-20)^2 + (30)^2 + (-80)^2} = 87.7496$

$\vec{T_{AP}} = \frac{T_{AP}}{88.1419}\left[12in\,i - 35in\,j - 80in\,k\right]$

$\vec{T_{AP}} = 0.1361\,T_{AP}\,i - 0.3971\,T_{AP}\,j - 0.9076\,T_{AP}\,k$

$\vec{T_{BP}} = \frac{T_{BP}}{91.5915}\left[33in\,i + 30in\,j - 80in\,k\right]$

$\vec{T_{BP}} = 0.3603\,T_{BP}\,i + 0.3275\,T_{BP}\,j - 0.8734\,T_{BP}\,k$

$\vec{T_{CP}} = \frac{T_{CP}}{87.7496}\left[-20in\,i + 30in\,j - 80in\,k\right]$

$\vec{T_{CP}} = -0.2279\,T_{CP}\,i + 0.3419\,T_{CP}\,j - 0.9117\,T_{CP}\,k$

$\Sigma F_x i = 0 \quad 0.1361\,T_{AP} + 0.3603\,T_{BP} - 0.2279\,T_{CP} = 0$ ——— (1)

$\Sigma F_y j = 0 \quad -0.3971\,T_{AP} + 0.3275\,T_{BP} + 0.3419\,T_{CP} = 0$ ——— (2)

$\Sigma F_z k = 0 \quad -0.9076\,T_{AP} - 0.8734\,T_{BP} - 0.9117\,T_{CP} + P_z = 0$ ——— (3)

Si despejamos T_{AP} de la ec. (1) tenemos

$$T_{AP} = -\frac{0.3603}{0.1361}T_{BP} + \frac{0.2279\,T_{CP}}{0.1361}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.34 continuación

$$T_{AP} = -2.6473\,T_{BP} + 1.6745\,T_{CP}$$

$$-0.3971\left[-2.6473\,T_{BP} + 1.6745\,T_{CP}\right] + 0.3275\,T_{BP} + 0.3419\,T_{CP} = 0$$

$$+1.0512\,T_{BP} - 0.6649\,T_{CP} + 0.3275\,T_{BP} + 0.3419\,T_{CP} = 0$$

$$1.3787\,T_{BP} - 0.3230\,T_{CP} = 0$$

$$T_{BP} = \frac{0.3230\,T_{CP}}{1.3787} = 0.2343\,T_{CP}$$

$$T_{AP} = -2.6473(0.2343\,T_{CP}) + 1.6745\,T_{CP}$$

$$T_{AP} = -0.6203\,T_{CP} + 1.6745\,T_{CP} = 1.0542\,T_{CP}$$

$$-0.9076(1.0542\,T_{CP}) - 0.8734(0.2343\,T_{CP}) - 0.9117\,T_{CP} + 8750 = 0$$

$$-0.9568\,T_{CP} - 0.2046\,T_{CP} - 0.9117\,T_{CP} + 8750 = 0$$

$$-2.0731\,T_{CP} + 8750 = 0$$

$$T_{CP} = \frac{8750}{2.0731} = 4220.7322\ \text{lb}$$

$$T_{BP} = 0.2343\,T_{CP} = 0.2343(4220.7322) = 988.9176\ \text{lb}$$

$$T_{AP} = 1.0542\,T_{CP} = 1.0542(4220.7322) = 4,449.4959\ \text{lb}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.35

$$\vec{AP} = 74\,kN\,[\cos 25^\circ \cos 35^\circ \,i + \cos 25^\circ \operatorname{sen} 35^\circ \,j - \operatorname{sen} 25^\circ \,k]$$
$$\vec{AP} = 74\,kN\,[0.7424\,i + 0.5198\,j - 0.4226\,k]$$
$$\vec{AP} = 54.9376\,kN\,i + 38.4652\,kN\,j - 31.2724\,kN\,j$$

a) $AP_x = 54.9376\ kN$

$AP_y = 38.4652\ kN$

$AP_z = -31.2724\ kN$

b) $\cos\theta_x = \frac{AP_x}{F_{AP}} = \frac{54.9376}{74} = 0.7424$ $\quad \theta_x = \cos^{-1} 0.7424$

$\theta_x = 42.0637^\circ$

$\cos\theta_y = \frac{AP_y}{F_{AP}} = \frac{38.4652}{74} = 0.5198$ $\quad \theta_y = \cos^{-1} 0.5198$

$\theta_y = 58.6812^\circ$

$\cos\theta_z = \frac{AP_z}{F_{AP}} = \frac{-31.2724}{74} = -0.4226$ $\quad \theta_z = \cos^{-1} -0.4226$

$\theta_z = 114.9988^\circ$

1.36 $\vec{BP} = 12.5\,kN\,[-\cos 60^\circ \operatorname{sen} 20^\circ \,i + \cos 60^\circ \cos 20^\circ \,j - \operatorname{sen} 60^\circ \,k]$

$\vec{BP} = 12.5\,kN\,[-0.1710\,i + 0.4698\,j - 0.8660\,k]$

$\vec{BP} = -2.1375\,kN\,i + 5.8725\,kN\,j - 10.8250\,kN\,k$

a) $BP_x = -2.1375\ kN$

$BP_y = +5.8725\ kN$

$BP_z = -10.8250\ kN$

b) $\cos\theta_x = \frac{BP_x}{F_{BP}} = \frac{-2.1375}{12.5} = -0.1710$ $\quad \theta_x = \cos^{-1} -0.1710 = 99.8460^\circ$

$\cos\theta_y = \frac{BP_y}{F_{BP}} = \frac{+5.8725}{12.5} = 0.4698$ $\quad \theta_y = \cos^{-1} 0.4698 = 61.9787^\circ$

$\cos\theta_z = \frac{BP_z}{F_{BP}} = \frac{-10.8250}{12.5} = -0.8660$ $\quad \theta_z = \cos^{-1} -0.8660 = 149.9971^\circ$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.37 $T_{AP} = 85$ kips

a) El peso de la caja $P_z = ?$

$\vec{AP} = 0\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$ (ft)

$\vec{BP} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ (ft)

$\vec{CP} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ (ft)

$|\vec{AP}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = 7.0711$

$|\vec{BP}| = \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-5)^2} = 6.7082$

$|\vec{CP}| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (-5)^2} = 6.1644$

$\vec{T_{AP}} = \frac{T_{AP}}{7.0711}(0\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}) = -0.7071\,T_{AP}\vec{j} - 0.7071\,T_{AP}\vec{k}$

$\vec{T_{BP}} = \frac{T_{BP}}{6.7080}(4\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}) = 0.5963\,T_{BP}\vec{i} + 0.2982\,T_{BP}\vec{j} - 0.7454\,T_{BP}\vec{k}$

$\vec{T_{CP}} = \frac{T_{CP}}{6.1644}(-3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}) = -0.4867\,T_{CP}\vec{i} + 0.3244\,T_{CP}\vec{j} - 0.8111\,T_{CP}\vec{k}$

$\Sigma F_x\vec{i} = 0 \quad +0.5963\,T_{BP} - 0.4867\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_y\vec{j} = 0 \quad -0.7071\,T_{AP} + 0.2982\,T_{BP} + 0.3244\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_z\vec{k} = 0 \quad -0.7071\,T_{AP} - 0.7454\,T_{BP} - 0.8111\,T_{CP} + P_z = 0$

$0.5963\,T_{BP} - 0.4867\,T_{CP} = 0$ ——— (1)

$-0.7071(85) + 0.2982\,T_{BP} + 0.3244\,T_{CP} = 0$

$-60.1035 + 0.2982\,T_{BP} + 0.3244\,T_{CP} = 0$ ——— (2)

$-0.7071(85) - 0.7454\,T_{BP} - 0.8111\,T_{CP} + P_z = 0$

$-60.1035 - 0.7454\,T_{BP} - 0.8111\,T_{CP} + P_z = 0$ ——— (3)

$T_{BP} = \frac{0.4867\,T_{CP}}{0.5963} = 0.8162\,T_{CP}$

$-60.1035 + 0.2982(0.8162\,T_{CP}) + 0.3244\,T_{CP} = 0$

$-60.1035 + 0.2434\,T_{CP} + 0.3244\,T_{CP} = 0$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.37 continuación

$$-60.1035 + 0.5678\,T_{CP} = 0$$

$$T_{CP} = \frac{60.1035}{0.5678} = 105.8533 \text{ Kips}$$

$$T_{BP} = 0.8162\,T_{CP} = 0.8162(105.8533) = 86.3975 \text{ Kips}$$

$$-60.1035 - 0.7454(86.3975) - 0.8111(105.8533) + P_z = 0$$

$$-60.1035 - 64.4007 - 85.8576 + P_z = 0$$

$$\therefore P_z = 210.3618 \text{ Kips}$$

1.38 $T_{BP} = 135$ Kips

$\sum F_{xi} = 0$ $\quad 0.5963\,T_{BP} - 0.4867\,T_{CP} = 0$

$\sum F_{yj} = 0$ $\quad -0.7071\,T_{AP} + 0.2982\,T_{BP} + 0.3244\,T_{CP} = 0$

$\sum F_{zk} = 0$ $\quad -0.7071\,T_{AP} - 0.7454\,T_{BP} - 0.8111\,T_{CP} + P_z = 0$

$$0.5963(135) - 0.4867\,T_{CP} = 0$$

$$T_{CP} = \frac{80.5005}{0.4867} = 165.4007 \text{ Kips}$$

$$-0.7071\,T_{AP} + 0.2982(135) + 0.3244(165.4007) = 0$$

$$-0.7071\,T_{AP} + 40.2570 + 53.6560 = 0$$

$$T_{AP} = \frac{93.9130}{0.7071} = 132.8143 \text{ Kips}$$

$$-0.7071(132.8143) - 0.7454(135) - 0.8111(165.4007) + P_z = 0$$

$$-93.9130 - 100.6290 - 134.1565 + P_z = 0$$

$$\therefore P_z = 328.6985 \text{ Kips}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.39 $T_{CP} = 64$ kips

$\Sigma F_{xi}=0$ $0.5963\,T_{BP} - 0.4867\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{yj}=0$ $-0.7071\,T_{AP} + 0.2982\,T_{BP} + 0.3244\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{zk}=0$ $-0.7071\,T_{AP} - 0.7454\,T_{BP} - 0.8111\,T_{CP} + P_z = 0$

$$0.5963\,T_{BP} - 0.4867(64) = 0$$

$$T_{BP} = \frac{31.1488}{0.5963} = \underline{52.2368 \text{ kips}}$$

$$-0.7071\,T_{AP} + 0.2982(52.2368) + 0.3244(64) = 0$$

$$-0.7071\,T_{AP} + 15.5770 + 20.7616 = 0$$

$$T_{AP} = \frac{36.3386}{0.7071} = \underline{51.3910 \text{ kips}}$$

$$-0.7071(51.3910) - 0.7454(52.2368) - 0.8111(64) + P_z = 0$$

$$-36.3386 - 38.9373 - 51.9104 + P_z = 0$$

$$\therefore \quad P_z = \underline{127.1863 \text{ kips}}$$

1.40 $P_z = 1645$ lb

$\Sigma F_{xi}=0$ $0.5963\,T_{BP} - 0.4867\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{yj}=0$ $-0.7071\,T_{AP} + 0.2982\,T_{BP} + 0.3244\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{zk}=0$ $-0.7071\,T_{AP} - 0.7454\,T_{BP} - 0.8111\,T_{CP} + 1645 = 0$

$$T_{BP} = \frac{0.4867\,T_{CP}}{0.5963} = 0.8162\,T_{CP}$$

$$-0.7071\,T_{AP} + 0.2982(0.8162\,T_{CP}) + 0.3244\,T_{CP} = 0$$

$$-0.7071\,T_{AP} + 0.2434\,T_{CP} + 0.3244\,T_{CP} = 0$$

$$-0.7071\,T_{AP} + 0.5678\,T_{CP} = 0$$

$$T_{AP} = \frac{0.5678\,T_{CP}}{0.7071} = 0.8030\,T_{CP}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.40 continuación

$$-0.7071(0.8030\,T_{CP}) - 0.7454(0.8162\,T_{CP}) - 0.8111\,T_{CP} + 1645 = 0$$

$$-0.5678\,T_{CP} - 0.6084\,T_{CP} - 0.8111\,T_{CP} + 1645 = 0$$

$$-1.9873\,T_{CP} + 1645 = 0$$

$$T_{CP} = \frac{1645}{1.9873} = 827.7563\ lb$$

$$T_{BP} = 0.8162\,T_{CP} = 0.8162(827.7563) = \underline{675.6147\ lb}$$

$$T_{AP} = 0.8030\,T_{CP} = 0.8030(827.7563) = \underline{664.6883\ lb}$$

1.41 $T_{AP} = 45\ kN$

$\vec{AP} = 0\,i - 1.65\,j - 1.75\,k$ (m)

$\vec{BP} = 1.5\,i + 0.6\,j - 1.75\,k$ (m)

$\vec{CP} = -1.2\,i + 0.6\,j - 1.75\,k$ (m)

$$|\vec{AP}| = \sqrt{(-1.65)^2 + (-1.75)^2} = 2.4052$$

$$|\vec{BP}| = \sqrt{(1.5)^2 + (0.6)^2 + (-1.75)^2} = 2.3817$$

$$|\vec{CP}| = \sqrt{(-1.2)^2 + (0.6)^2 + (-1.75)^2} = 2.2051$$

$$\vec{T}_{AP} = \frac{T_{AP}}{2.4052}\left[-1.65\,j - 1.75\,k\right] = -0.6860\,T_{AP}\,j - 0.7276\,T_{AP}\,k$$

$$\vec{T}_{BP} = \frac{T_{BP}}{2.3817}\left[1.5\,i + 0.6\,j - 1.75\,k\right] = 0.6298\,T_{BP}\,i + 0.2519\,T_{BP}\,j - 0.7348\,T_{BP}\,k$$

$$\vec{T}_{CP} = \frac{T_{CP}}{2.2051}\left[-1.2\,i + 0.6\,j - 1.75\,k\right] = -0.5442\,T_{CP}\,i + 0.2721\,T_{CP}\,j - 0.7936\,T_{CP}\,k$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.41 continuación $\Sigma F_{xi}=0 \quad 0.6298\,T_{BP} - 0.5442\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{yj}=0 \quad -0.6860\,T_{AP} + 0.2519\,T_{BP} + 0.2721\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{zk}=0 \quad -0.7276\,T_{AP} - 0.7348\,T_{BP} - 0.7936\,T_{CP} + P_z = 0$

$0.6298\,T_{BP} - 0.5442\,T_{CP} = 0$

$T_{BP} = \frac{0.5442\,T_{CP}}{0.6298} = 0.8641\,T_{CP}$

$-0.6860(45) + 0.2519(0.8641\,T_{CP}) + 0.2721\,T_{CP} = 0$

$-30.870 + 0.2177\,T_{CP} + 0.2721\,T_{CP} = 0$

$0.4898\,T_{CP} = 30.870$

$T_{CP} = \frac{30.870}{0.4898} = 63.0257 \text{ kN}$

$T_{BP} = 0.8641(63.0257) = 54.4605 \text{ kN}$

$-0.7276(45) - 0.7348(54.4605) - 0.7936(63.0257) + P_z = 0$

$-32.7420 - 40.0176 - 50.0172 + P_z = 0$

$\therefore P_z = 122.7768 \text{ kN}$

1.42 $T_{BP} = 76 \text{ kN}$

$\Sigma F_{xi}=0 \quad 0.6298(76) - 0.5442\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{yj}=0 \quad -0.6860\,T_{AP} + 0.2519(76) + 0.2721\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{zk}=0 \quad -0.7276\,T_{AP} - 0.7348(76) - 0.7936\,T_{CP} + P_z = 0$

$47.8648 = 0.5442\,T_{CP}$

$\frac{47.8648}{0.5442} = T_{CP} \quad \therefore T_{CP} = 87.9544 \text{ kN}$

$-0.6860\,T_{AP} + 19.1444 + 0.2721(87.9544) = 0$

$19.1444 + 23.9324 = 0.6860\,T_{AP}$

$43.0768 = T_{AP} \quad \therefore T_{AP} = 62.7942 \text{ kN}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.42 continuación

$$-0.7276(62.7942) - 0.7348(76) - 0.7936(87.9544) + P_z = 0$$

$$-45.6891 - 55.8448 - 69.8006 + P_z = 0$$

$$P_z = \underline{171.3345 \text{ kN}}$$

1.43 $T_{CP} = 94$ kN

$\sum F_{xi} = 0$ $\quad 0.6298\, T_{BP} - 0.5442(94) = 0$

$\sum F_{yj} = 0$ $\quad -0.6860\, T_{AP} + 0.2519\, T_{BP} + 0.2721(94) = 0$

$\sum F_{zk} = 0$ $\quad -0.7276\, T_{AP} - 0.7348\, T_{BP} - 0.7936(94) + P_z = 0$

$$T_{BP} = \frac{51.1548}{0.6298} = \underline{81.2239 \text{ kN}}$$

$$-0.6860\, T_{AP} + 0.2519(81.2239) + 0.2721(94) = 0$$

$$-0.6860\, T_{AP} + 20.4603 + 25.5774 = 0$$

$$T_{AP} = \frac{46.0377}{0.6860} = \underline{67.1103 \text{ kN}}$$

$$-0.7276(67.1103) - 0.7348(81.2239) - 0.7936(94) + P_z = 0$$

$$-48.8295 - 59.6833 - 74.5984 + P_z = 0$$

$$\therefore P_z = \underline{183.1112 \text{ kN}}$$

1.44 $P_z = 146$ kN

$\sum F_{xi} = 0$ $\quad 0.6298\, T_{BP} - 0.5442\, T_{CP} = 0$

$\sum F_{yj} = 0$ $\quad -0.6860\, T_{AP} + 0.2519\, T_{BP} + 0.2721\, T_{CP} = 0$

$\sum F_{zk} = 0$ $\quad -0.7276\, T_{AP} - 0.7348\, T_{BP} - 0.7936\, T_{CP} + 146 = 0$

$$T_{BP} = \frac{0.5442\, T_{CP}}{0.6298} = 0.8641\, T_{CP}$$

$$-0.6860\, T_{AP} + 0.2519(0.8641\, T_{CP}) + 0.2721\, T_{CP} = 0$$

$$-0.6860\, T_{AP} + 0.2177\, T_{CP} + 0.2721\, T_{CP} = 0$$

$$-0.6860\, T_{AP} + 0.4898\, T_{CP} = 0 \qquad T_{AP} = \frac{0.4898\, T_{CP}}{0.6860} = 0.7140\, T_{CP}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

.44 CONT

$$-0.7276(0.7140T_{CP}) - 0.7348(0.8641T_{CP}) - 0.7936T_{CP} + 146 = 0$$

$$-0.5195T_{CP} - 0.6349T_{CP} - 0.7936T_{CP} + 146 = 0$$

$$-1.9480T_{CP} + 146 = 0$$

$$\therefore T_{CP} = \frac{146}{1.9480} = 74.9487 \text{ kN}$$

$$T_{AP} = 0.7140(74.9487) = 53.5134 \text{ kN}$$

$$T_{BP} = 0.8641(74.9487) = 64.7632 \text{ kN}$$

1.45

$T_{AP} = 235$ N

$T_{BQ} = 145$ N

$\vec{AP} = 4m\,i + 4m\,j - 2.5m\,k$

$\vec{BQ} = -3m\,i + 3.25m\,j + 0.5m\,k$

$|\vec{AP}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2.5)^2} = 6.1847$

$|\vec{BQ}| = \sqrt{(-3)^2 + (3.25)^2 + (0.5)^2} = 4.4511$

$$\vec{T}_{AP} = \frac{235}{6.1847}[4i + 4j - 2.5k] = 37.9970[4i + 4j - 2.5k]$$

$$\vec{T}_{AP} = 151.9880\,i + 151.9880\,j - 94.9925k \text{ (N)}$$

$$\vec{T}_{BQ} = \frac{145}{4.4511}[-3i + 3.25j + 0.5k] = 32.5762[-3i + 3.25j + 0.5k]$$

$$\vec{T}_{BQ} = -97.7286\,i + 105.8729\,j + 16.2881k \text{ (N)}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1
A = 39.37

2.2
A = 63.6318

2.3
A = 38.6975

2.4
A = 58.5769

2.5
a) –120.25
b) –205.00
c) 82.00
d) 125.00
e) –52.00
f) –79.00

2.6
$\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$

$\vec{A} \times \vec{B} = 82 m^2 \hat{k}$

$\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = 738 m^3$

2.7
$\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$

$\vec{A} \times \vec{B} = 53.758720 = 0i - 17j - 51k$

$\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = -459 m^3$

2.8
$\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$

$\vec{A} \times \vec{B} = 595.5065 \quad -44\hat{i} - 294\hat{j} - 516\hat{k}$

$\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = -4796 in^3$

2.9
$\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$

$\vec{A} \times \vec{B} = 63.1981 \quad 13\hat{i} + 24\hat{j} - 57\hat{k}$

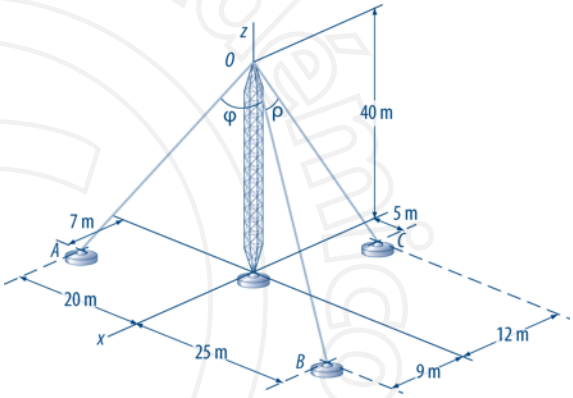
$\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = -110 ft^3$

2.10
$\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$

$\vec{A} \times \vec{B} = 172.51086 \quad 16\hat{i} + 80\hat{j} + 152\hat{k}$

$\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = 2840 ft^3$

2.11
ϕ = 57.6540°
ϱ = 47.4041°
∝ = 41.9480°



$\overrightarrow{OA} = +7i - 20j - 40k \ (m)$

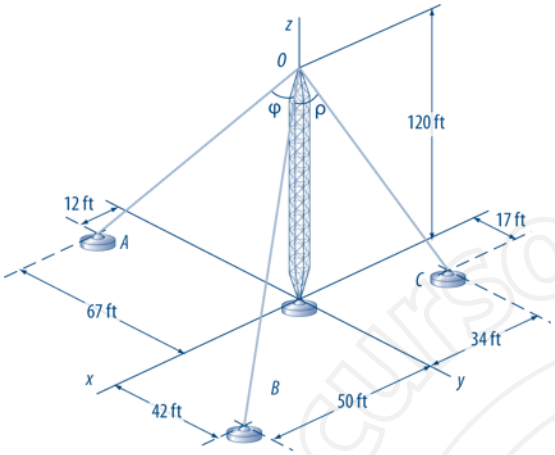
$\overrightarrow{OB} = +9i + 25j - 40k$

$\overrightarrow{OC} = -12i + 5j - 40k$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.12

$\phi = 49.7177°$
$\varrho = 38.7369°$
$\propto = 42.2580°$



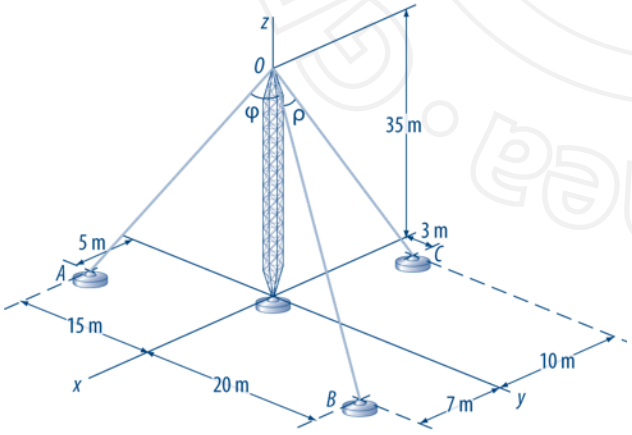
$\overrightarrow{OA} = +12i - 67j - 120k \ (ft)$

$\overrightarrow{OB} = +50i + 42j - 120k$

$\overrightarrow{OC} = -34i + 17j - 120k$

2.13

$\phi = 52.3426°$
$\varrho = 35.6044°$
$\propto = 36.3344°$



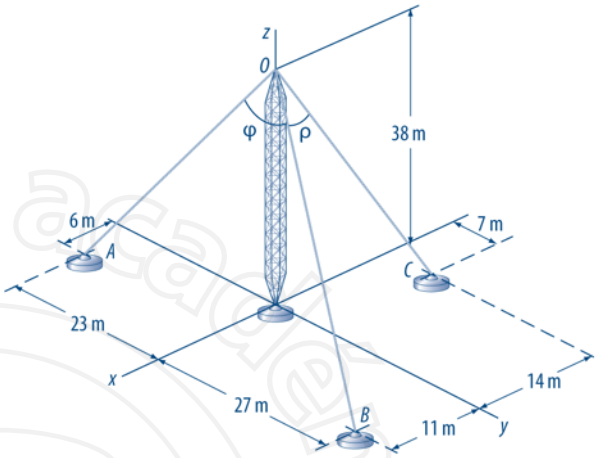
$\overrightarrow{OA} = +5i - 15j - 35k$

$\overrightarrow{OB} = +7i + 20j - 35k$

$\overrightarrow{OC} = -10i + 3j - 35k$

2.14

$\phi = 65.5367°$
$\varrho = 41.2904°$
$\propto = 49.3905°$

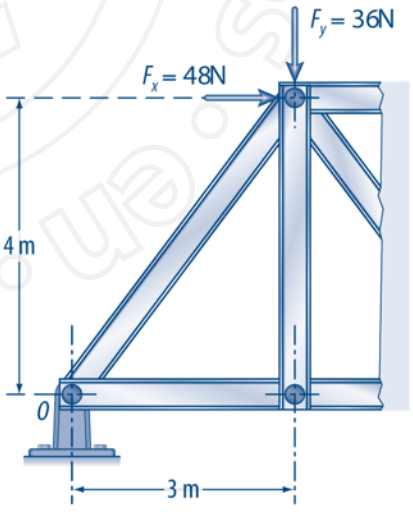


$\overrightarrow{OA} = +6i - 23j - 38k$

$\overrightarrow{OB} = +11i + 27j - 38k$

$\overrightarrow{OC} = -14i + 7j - 38k$

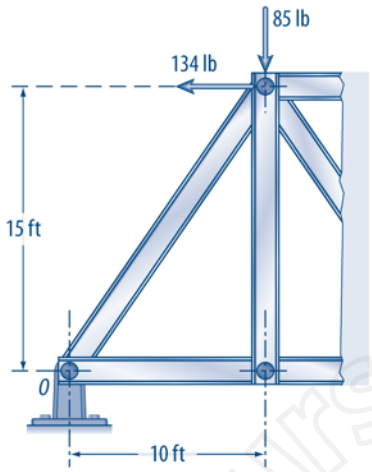
2.15



$M_0 = -(36)(3) - (48)(4) = -108 - 192 = 300$ N-m

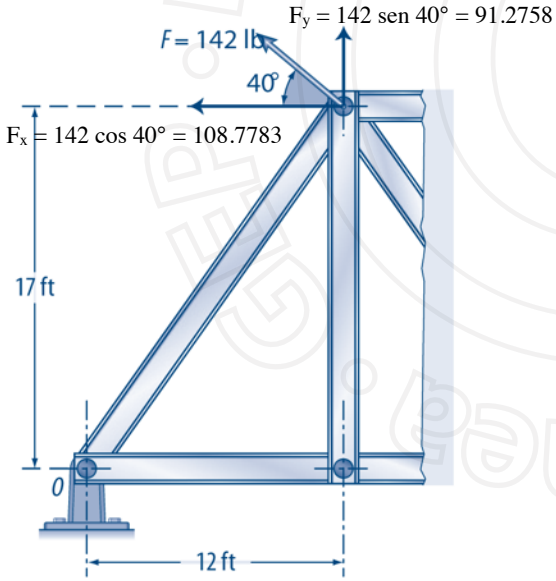
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.16



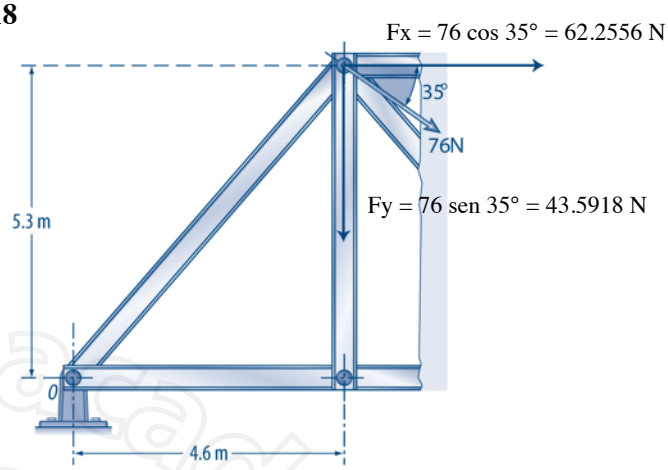
$M_0 = -(85)(10) + (134)(15)$
$M_0 = -850 + 2010$
$M_0 = 1\ 160$ lb-ft

2.17



$M_0 = +(108.7783)(17) + (91.2758)(12)$
$M_0 = 1\ 849.2311 + 1\ 095.3096$
$M_0 = 2\ 944.5407$ lb-ft

2.18



$M_0 = -(62.2556)(5.3) - (43.5918)(4.6)$
$M_0 = -329.9547$
$\quad -200.5223$
$M_0 = -530.4770$ N-m

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problema 2.19

$\vec{F} = 85N\,\hat{i} + 64N\,\hat{j} - 36N\,\hat{k}$

$M_o = ?$

$\vec{\rho} = 0\hat{i} + 3.5\hat{j} + 5.5\hat{k}$ (mts)

$M_o = \vec{\rho} \times \vec{F}$

$$M_o = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3.5 & 5.5 \\ 85 & 64 & -36 \end{vmatrix} = \begin{matrix} +[(3.5)(-36) - (64)(5.5)]\hat{i} \\ -[(0)(-36) - (85)(5.5)]\hat{j} \\ +[(0)(64) - (85)(3.5)]\hat{k} \end{matrix}$$

$M_o = (-126 - 352)\hat{i} + (468)\hat{j} - (298)\hat{k}$

$M = -478\hat{i} + 468\hat{j} - 298\hat{k}$ (N-m)

Problema 2.20

$\vec{F} = 132\,lb\,\hat{i} - 73\,lb\,\hat{j} - 394\,lb\,\hat{k}$

$M_o = ?$

$\vec{\rho} = 0\hat{i} + 15\,ft\,\hat{j} + 21\,ft\,\hat{k}$

$M_o = \vec{\rho} \times \vec{F}$

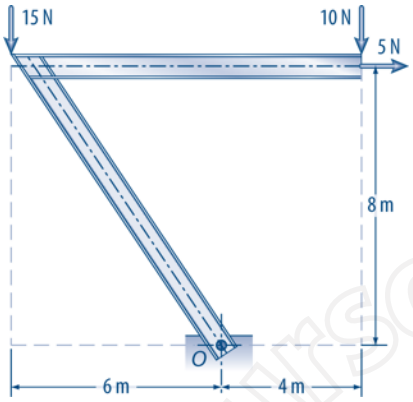
$$M_o = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 15 & 21 \\ 132 & -73 & -394 \end{vmatrix} = \begin{matrix} +[(15)(-394) - (-73)(21)]\hat{i} \\ -[(0)(-394) - (132)(21)]\hat{j} \\ +[(0)(-73) - (132)(15)]\hat{k} \end{matrix}$$

$M_o = (-5910 + 1533)\hat{i} + 2772\hat{j} - 1980\hat{k}$

$M_o = -4377\hat{i} + 2772\hat{j} - 1980\hat{k}$ (lb - ft)

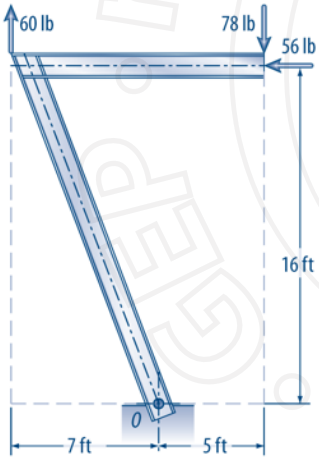
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.21



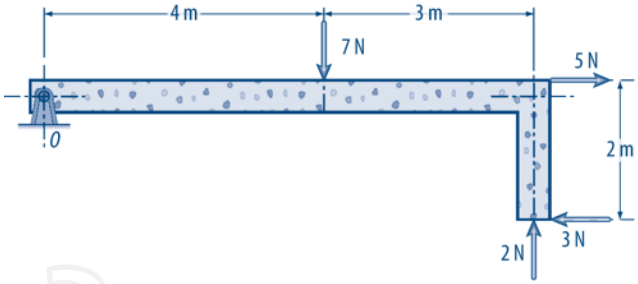
$\sum M_0 = (15)(6) - (10)(4) - (5)(8)$
$\sum M_0 = 90 - 40 - 40$
$M_0 = 10$ N-m

2.22



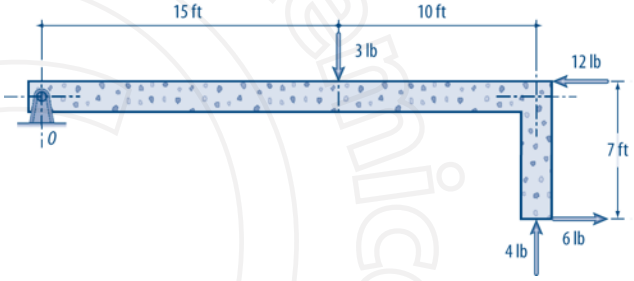
$\sum M_0 = (-60)(7) - (78)(5) + (56)(16)$
$\sum M_0 = -420 - 390 + 896$
$M_0 = 86$ lb-ft

2.23



$\sum M_0 = (-7)(4) - (3)(2) + (2)(7)$
$M_0 = -28 - 6 + 14$
$M_0 = -20$ N-m

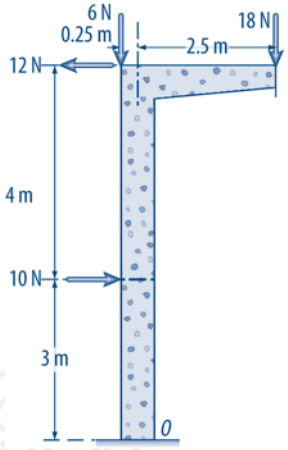
2.24



$\sum M_0 = (-3)(15) - (6)(7) + (4)(25)$
$M_0 = -45 + 42 + 100$
$M_0 = 97$ lb-ft

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

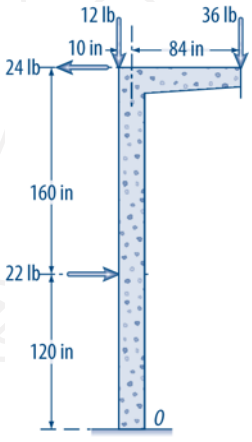
2.25



$\sum F_x = 0$ $\quad -12 + 10 + Ox = 0$ $\quad Ox = 12 - 10 = 2N$
$\sum F_y = 0$ $\quad -6 - 18 + Oy = 0$ $\quad Oy = 24N$
$\sum M_0 = 0$ $\quad M_0 - (10)(3) + (12)(7) + (6)(0.25) - (18)(2.5) = 0$

$M_0 - 30 + 84 + 1.5 - 45 = 0$
$M_0 = +30 - 84 - 1.5 + 45$
$M_0 = -10.5$ N-m

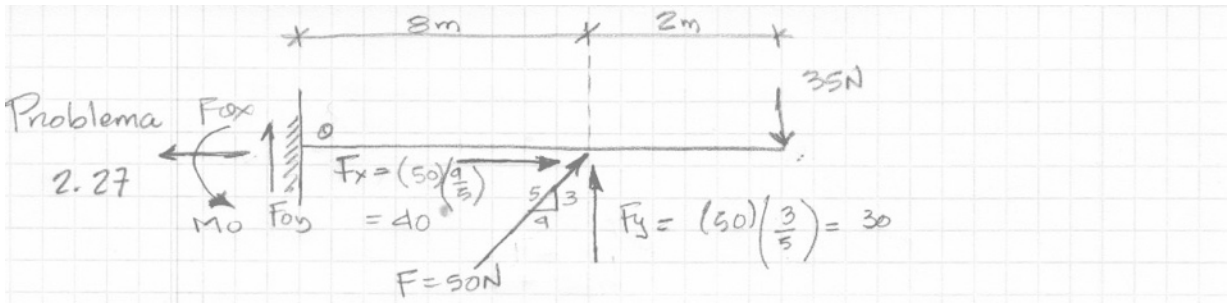
2.26



$\sum F_x = 0$ $\quad -24 + 22 + Ox = 0$ $\quad Ox = 24 - 22 = 2$ lb
$\sum F_y = 0-$ $\quad 36 - 12 + Oy = 0$ $\quad Oy = 36 + 12 = 48$ lb
$\sum M_0 = 0$ $\quad + M_0 - (22)(120) + (24)(280) + (12)(10) - (36)(84) = 0$

$M_0 - 2\,640 + 6\,720 + 120 - 3\,024 = 0$
$M_0 = 2\,640 - 6\,720 - 120 + 3\,024$
$M_0 = -1\,176$ lb-in

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.



Si aplicamos las ecuaciones de equilibrio tenemos:

$\Sigma Fx = 0 \quad -Fox + Fx = 0$ ——— (1)

$\Sigma Fy = 0 \quad Foy + Fy - 35 = 0$ ——— (2)

$\Sigma Mo = 0 \quad -(35)(10) + (30)(8) + Mo = 0$ ——— (3)

$-Fox + 40 = 0$ ——— DE (1)

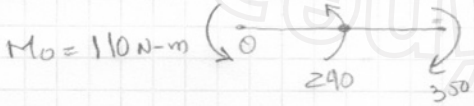
$Fox = \underline{40N}$

$Foy + 30 - 35 = 0$ ——— DE (2)

$Foy = -30 + 35 = \underline{5N}$

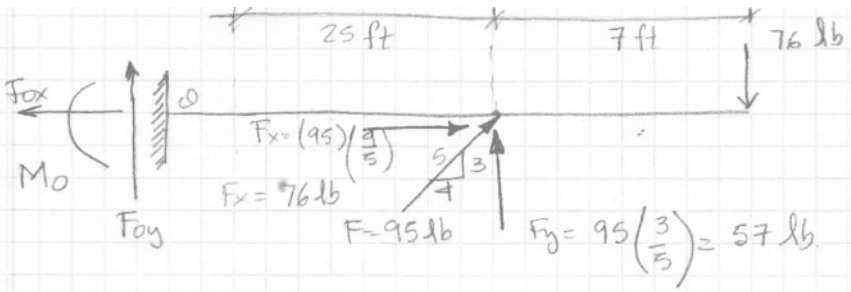
$-350 + 240 + Mo = 0$

$Mo = +350 - 240 = \underline{110\ N\text{-}m}$ (+)



D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problema 2.28.-



Si aplicamos las ecuaciones de equilibrio tenemos:

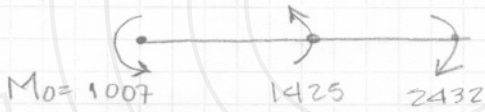
$\Sigma Fx = 0 \quad Foy + Fy - 76 = 0 \quad Foy + 57 - 76 = 0 \quad Foy = 19\ lb$

$\Sigma Fy = 0 \quad -Fox + 76 = 0 \quad Fox = 76\ lb$

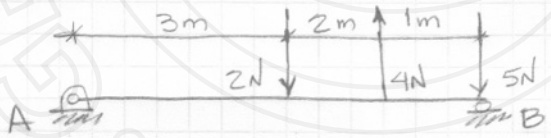
$\Sigma M_O = 0 \quad +57(25) - 76(32) + M_O = 0$

$1425 - 2432 + M_O = 0$

$M_O = -1425 + 2432 = \underline{1,007\ lb\text{-}ft}$ +

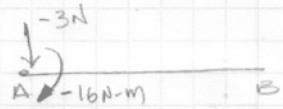


2.29.-



NOTA: Para calcular los incisos a) y b) NO deberán incluirse las reacciones de los apoyos.

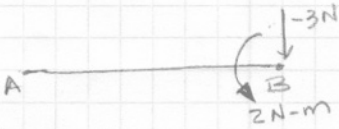
a) $\Sigma Fx = 0$



$\Sigma Fy = -2 + 4 - 5 = -3\ N$

$\Sigma M_A = -(2)(3) + (4)(5) - (5)(6) = -6 + 20 - 30 = -16\ N\text{-}m$

b) $\Sigma Fx = 0$



$\Sigma Fy = -5 + 4 - 2 = -3N$

$\Sigma M_B = (2)(3) - (4)(1) = 6 - 4 = 2\ N\text{-}m$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Continuación del 2.29.-

C) $\Sigma F_x = 0 \qquad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \qquad A_y - 2 + 4 - 5 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \qquad -(2)(3) + (4)(5) - (5)(6) + 6B_y = 0$

$-6 + 20 - 30 + 6B_y = 0$

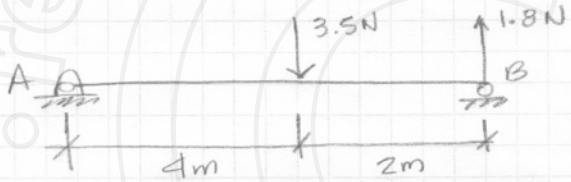
$6B_y = +6 - 20 + 30 = 16$

$B_y = \frac{16}{6} = 2.6667\,N$

$\therefore A_y = 2 - 4 + 5 - B_y = 3 - B_y = 3 - 2.6667$

$A_y = 0.3333\,N$

2.30.-



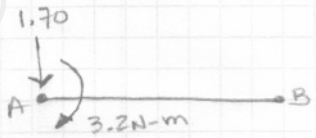
NOTA: Para calcular los incisos a) y b) NO deberán incluirse las Reacciones de los Apoyos.

a) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -3.5 + 1.8 = -1.70\,N$

$\Sigma M_A = -(3.5)(4) + (1.8)(6)$

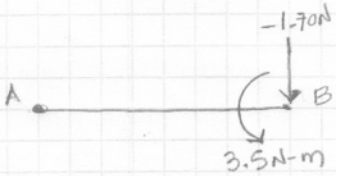
$= -14 + 10.8 = -3.2$



b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -3.5 + 1.8 = -1.70N$

$\Sigma M_B = (3.5)(2) = 7\,N-m$



D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Continuación 2.30

c) $\Sigma F_x = 0$ $\quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$ $\quad A_y - 3.5 + 1.8 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0$ $\quad -(3.5)(4) + (1.8)(6) + 6B_y = 0$

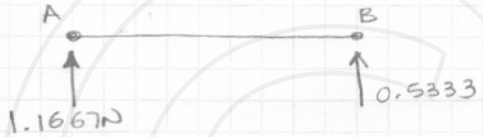
$-14 + 10.8 + 6B_y = 0$

$6B_y = 14 - 10.8 = 3.2$

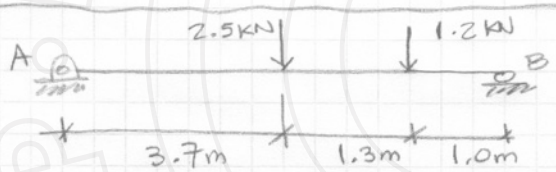
$B_y = \frac{3.2}{6} = \underline{0.5333\ N}$

$\therefore A_y = 3.5 - 1.8 - B_y = 3.5 - 1.8 - 0.533$

$A_y = \underline{1.1667\ N}$



2.31

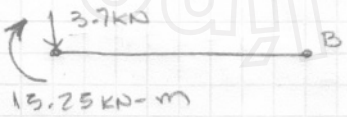


NOTA: Para calcular los incisos a) y b) NO deberán incluirse las reacciones en los apoyos.

a) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -2.5 - 1.2 = -3.7\ kN$

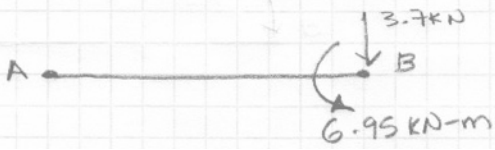
$\Sigma M_A = -(2.5)(3.7) - (1.2)(5) = -9.25 - 6 = -15.25\ kN\text{-}m$



b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -2.5 - 1.2 = -3.7\ kN$

$\Sigma M_B = +(1.2)(1.0) + (2.5)(2.3) = 1.2 + 5.75 = 6.95\ kN\text{-}m$



D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.31 continuación

c) $\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 2.5 - 1.2 + B_y = 0$

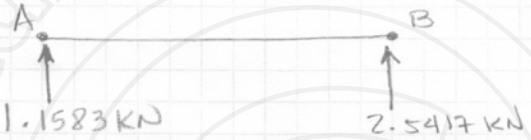
$\Sigma M_A = 0 \quad -(2.5)(3.7) - (1.2)(5) + 6B_y = 0$

$-9.25 - 6 + 6B_y = 0$

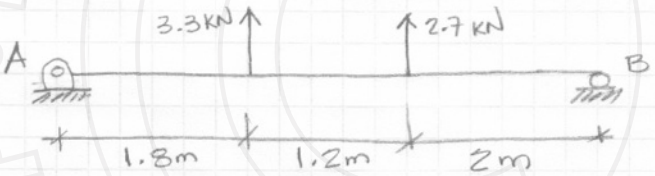
$B_y = \frac{15.25}{6} = 2.5417 \text{ kN}$

$\therefore \quad A_y = 2.5 + 1.2 - B_y = 2.5 + 1.2 - 2.5417$

$A_y = 1.1583 \text{ kN}$



2.32

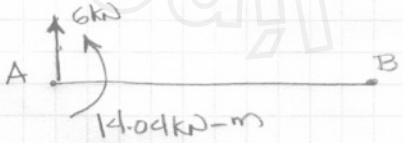


NOTA: para calcular los incisos a) y b) no deberán incluirse las reacciones en los apoyos.

a) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 3.3 + 2.7 = 6 \text{ kN}$

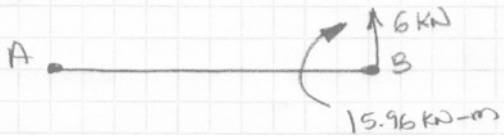
$\Sigma M_A = +(3.3)(1.8) + (2.7)(3) = 5.94 + 8.1 = 14.04 \text{ kN-m}$



b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 3.3 + 2.7 = 6 \text{ kN}$

$\Sigma M_B = -(3.3)(3.2) - (2.7)(2) = -10.56 - 5.40 = -15.96 \text{ kN-m}$



D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.32 continuación

c) $\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

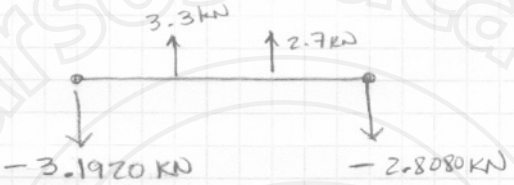
$\Sigma F_y = 0 \quad A_y + 3.3 + 2.7 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad +(3.3)(1.8) + (2.7)(3) + 5B_y = 0$

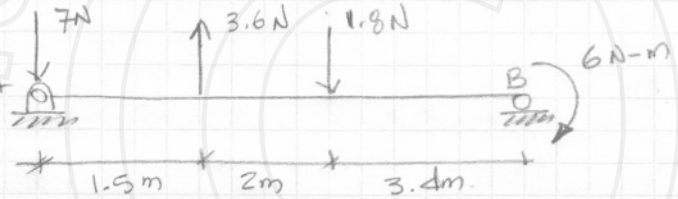
$5.94 + 8.10 + 5B_y = 0$

$B = \frac{-14.04}{5} = -2.8080\ kN$

$\therefore A_y = -3.3 - 2.7 - (-2.8080) = -3.1920\ kN$



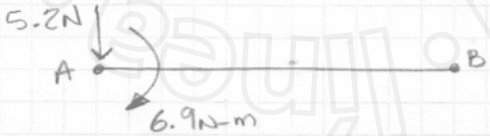
2.33.-



a) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -7 + 3.6 - 1.8 = -5.2N$

$\Sigma M_A = (3.6)(1.5) - (1.8)(3.5) - 6 = 5.4 - 6.3 - 6 = -6.9N\text{-}m$

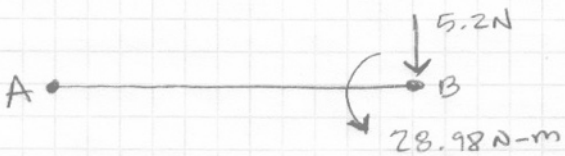


b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -7 - 3.6 - 1.8 = -5.2N$

$\Sigma M_B = 0 \quad (7)(6.9) - (3.6)(5.4) + (1.8)(3.4) - 6 =$

$= 48.3 - 19.44 + 6.12 - 6 = 28.98N\text{-}m$



D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.33.- continuación

c) $\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

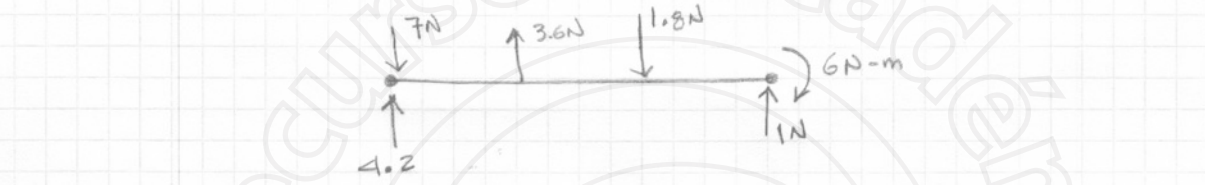
$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 7 + 3.6 - 1.8 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad 4(3.6)(1.5) - (1.8)(3.5) - 6 + 6.9\,B_y = 0$

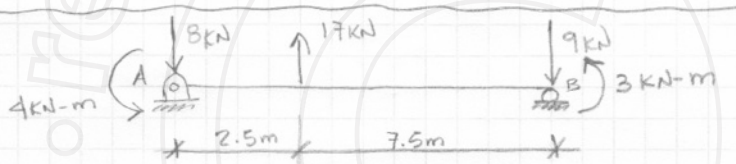
$5.4 - 6.3 - 6 + 6.9\,B_y = 0$

$B_y = \frac{6.9}{6.9} = 1\ N$

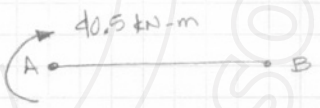
$A_y = 7 - 3.6 + 1.8 - B_y = 5.2 - 1 = 4.2N$



2.34



a) $\Sigma F_x = 0$



$\Sigma F_y = -8 + 17 - 9 = 0$

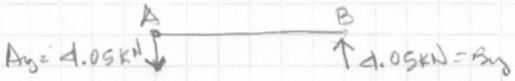
$\Sigma M_A = 4 + (17)(2.5) - (9)(10) + 3 = 4 + 42.5 - 90 + 3 = -40.5\ KN\text{-}m$

b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -8 + 17 - 9 = 0$

$\Sigma M_B = 0 \quad +3 - (17)(7.5) + (8)(10) + 4 = +3 - 127.5 + 80 + 4 = -40.5\ KN\text{-}m$

c) $\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$



$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 8 + 17 - 9 + B_y = 0 \quad A_y + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad +4 + (17)(2.5) - (9)(10) + 3 + 10\,B_y = 0$

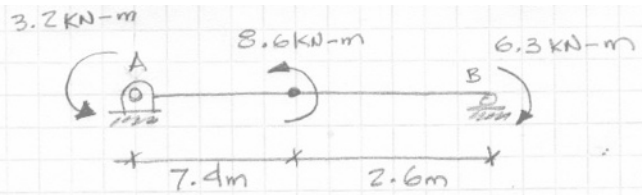
$4 + 42.5 - 90 + 3 + 10\,B_y = 0$

$10\,B_y = 40.5 \quad \therefore B_y = \frac{40.5}{10.} = 4.05\ KN$

$A_y = -B_y = -4.05KN$

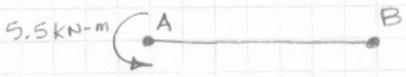
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.35.-



a) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$



$\Sigma M_A = +3.2 + 8.6 - 6.3 = 5.5\ KN\text{-}m$

b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma M_B = 0 \quad +3.2 + 8.6 - 6.3 = 5.5\ KN\text{-}m$

c) $\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

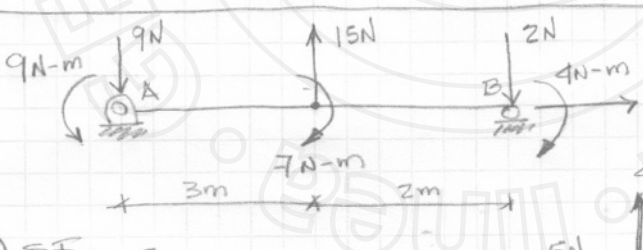
$\Sigma F_y = 0 \quad A_y + B_y = 0$

$\Sigma M_A = +3.2 + 8.6 - 6.3 + 10\,B_y = 0$

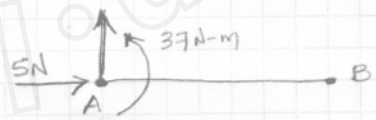
$5.5 + 10\,B_y = 0 \quad \therefore B_y = \frac{-5.5}{10} = -0.55\ KN$

$A_y = -B_y = -(-0.55) = +0.55\ KN$

2.36.-



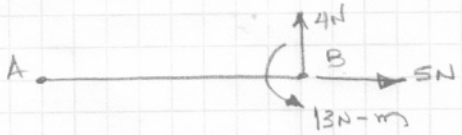
a) $\Sigma F_x = 5$



$\Sigma F_y = -9 + 15 - 2 = +4\ N$

$\Sigma M_A = 0 \quad +9 - 7 + (15)(3) - (2)(5) - 4 = 9 - 7 + 45 - 10 = 37\ N\text{-}m$

b) $\Sigma F_x = 0$



$\Sigma F_y = -9 + 15 - 2 = +4N$

$\Sigma M_B = 0 \quad -4 - 15(2) - 7 + (9)(5) + 9 = -4 - 30 - 7 + 45 + 9 = 13\ N\text{-}m$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.36.- continuación

c) $\Sigma F_x = 0 \quad -A_x + 5 = 0 \quad A_x = 5\,N$

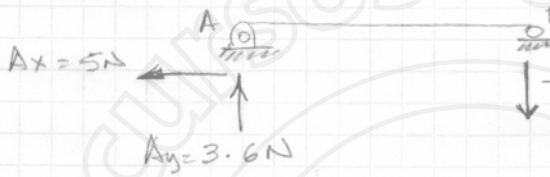
$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 9 + 15 - 2 + B_y = 0 \quad A_y + 4 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad +9 - 7 + (15)(3) - (2)(5) - 4 + 5B_y = 0$

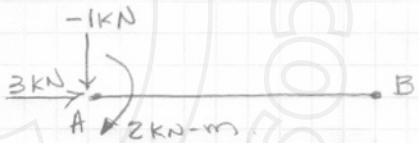
$9 - 7 + 14 - 10 - 4 + 5B_y = 0$

$2 + 5B_y = 0 \quad B_y = -\frac{2}{5} = -0.40\,N$

$A_y = -4 - B_y = -4 - (-0.40) = 3.6\,N$



2.37.- 3kN A 3kN B 16kN-m 2kN 6m



a) $\Sigma F_x = 3\,kN$

$\Sigma F_y = +2 - 3 = -1\,kN$

$\Sigma M_A = 0 \quad -(3)(6) + 16 = -18 + 16 = -2\,kN\text{-}m$

b) $\Sigma F_x = 3\,kN$

$\Sigma F_y = +2 - 3 = -1\,kN$

$\Sigma M_B = -(2)(6) + 16 = -12 + 16 = 4\,kN\text{-}m$

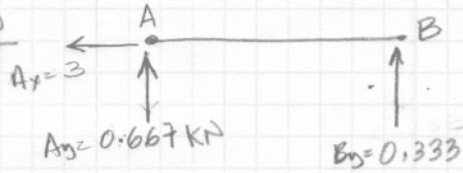
c) $\Sigma F_x = 0 \quad -A_x + 3 = 0 \quad A_x = 3\,kN$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y + 2 - 3 + B_y = 0 \quad A_y - 1 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad -(3)(6) + 16 + 6B_y = 0 \quad -18 + 16 + 6B_y = 0$

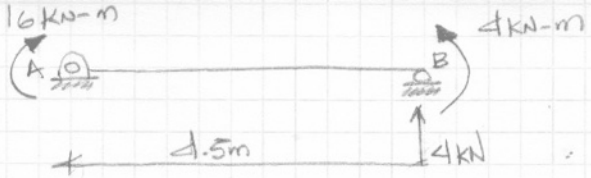
$-2 + 6B_y = 0 \quad \therefore B_y = \frac{+2}{6} = +0.333\,kN$

$A_y = +1 - (+0.333) = 0.667\,kN$

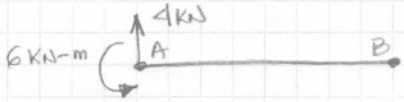


D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.38.-



a) $\Sigma F_x = 0$

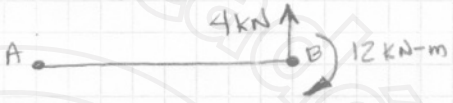


$\Sigma F_y = 4\ kN$

$\Sigma M_A = -16 + 4 + (4)(4.5) = -16 + 4 + 18 = 6\ kN\text{-}m$

b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 4\ kN$



$\Sigma M_B = 0 \quad -16 + 4 = -12\ kN\text{-}m$

c) $\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y + 4 + B_y = 0$

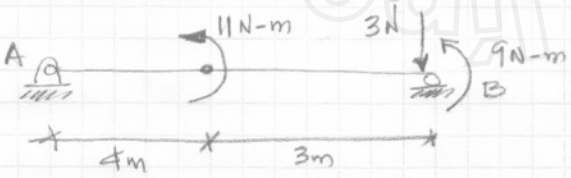
$\Sigma M_A = 0 \quad -16 + 4 + (4)(4.5) + 4.5\,B_y = 0$

$-16 + 4 + 18 + 4.5\,B_y = 0 \qquad 6 + 4.5\,B_y = 0$

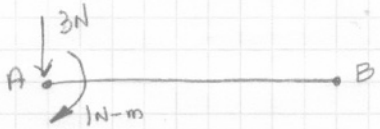
$B_y = \frac{-6}{4.5} = -1.333\ kN \qquad A_y = -4 - B_y = -4 - (-1.333)$

$A_y = -4 + 1.333 = -2.6670\ kN$

2.39.-



a) $\Sigma F_x = 0$



$\Sigma F_y = -3N$

$\Sigma M_A = +11 + 9 - (3)(7) = 11 + 9 - 21 = -1N\text{-}m$

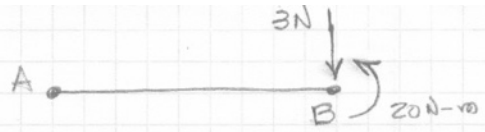
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.39.- continuación

b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -3N$

$\Sigma M_B = 0 \quad +11+9 = +20N\text{-}m$



c) $\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 3 + B_y = 0$

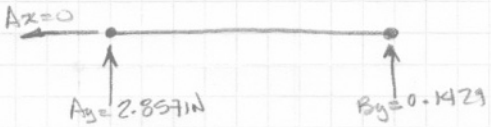
$\Sigma M_A = 0 \quad +11+9-(3)(7)+7B_y = 0$

$11+9-21+7B_y = 0$

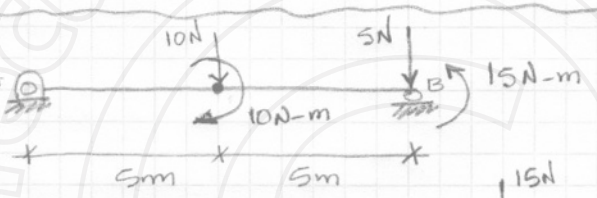
$-1+7B_y = 0$

$\therefore B_y = 1/7 = \underline{0.1429N}$

$A_y = 3 - B_y = 3 - 0.1429 = \underline{2.8571N}$



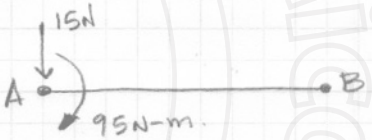
2.40.-



a) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -10-5 = -15N$

$\Sigma M_A = 0 \quad -10-(10)(5)-(5)(10)+15 = -10-50-50+15 = -95N\text{-}m$



b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -10-5 = -15N$

$\Sigma M_B = +(10)(5)-10+15 = 50-10+15 = +55N\text{-}m$

c) $\Sigma F_x = 0 \quad +A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 10 - 5 + B_y = 0 \quad A_y - 15 + B_y = 0$

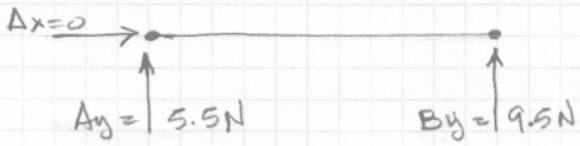
$\Sigma M_A = 0 \quad -10-(10)(5)-(5)(10)+15+10B_y = 0$

$-10-50-50+15+10B_y = 0$

$-95+10B_y = 0$

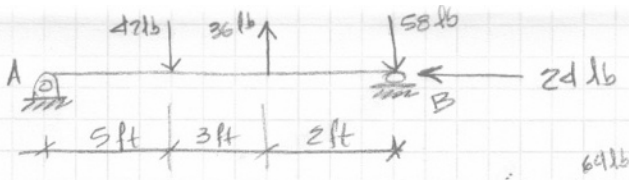
$B_y = \frac{95}{10} = \underline{9.5N}$

$A_y = 15 - B_y = 15 - 9.5 = \underline{5.5N}$

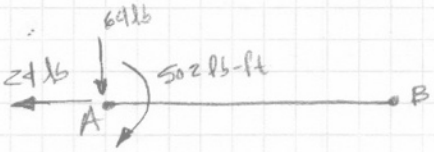


D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.41.-



a) $\Sigma F_x = -24\ lb$

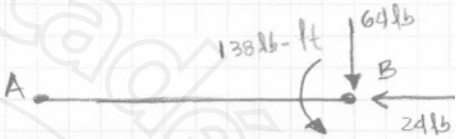


$\Sigma F_y = -42 + 36 - 58 = -64\ lb$

$\Sigma M_A = -(42)(5) + (36)(8) - (58)(10) = -210 + 288 - 580$

$M_A = -502\ lb\text{-}ft$

b) $\Sigma F_x = -24\ lb$



$\Sigma F_y = -42 + 36 - 58 = -64\ lb$

$\Sigma M_B = +(42)(5) - (36)(2) = 210 - 72 = 138\ lb\text{-}ft$

c) $\Sigma F_x = 0 \quad A_x - 24 = 0 \quad A_x = 24$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 42 + 36 - 58 + B_y = 0 \quad A_y - 64 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad -(42)(5) + (36)(8) - (58)(10) + 10B_y = 0$

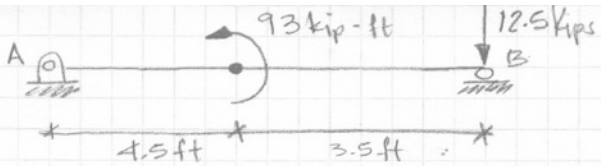
$-210 + 288 - 580 + 10B_y = 0$

$B_y = \frac{502}{10} = 50.2\ lb$

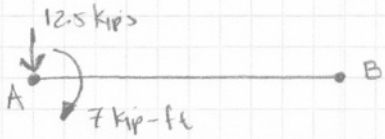
$\therefore A_y = 64 - B_y = 64 - 50.2 = 13.8\ lb$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.42.-



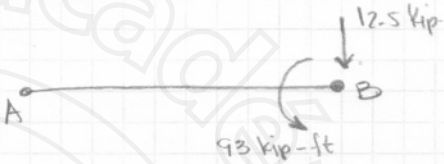
a) $\Sigma F_x = 0$



$\Sigma F_y = -12.5$ kips

$\Sigma M_A = +93 - (12.5)(8) = +93 - 100 = -7$ kip-ft

b) $\Sigma F_x = 0$



$\Sigma F_y = -12.5$ kips

$\Sigma M_B = +93$ kip-ft

c) $\Sigma F_x = 0$ $\quad A_x = 0$

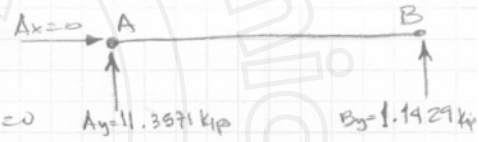
$\Sigma F_y = 0$ $\quad A_y - 12.5 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0$ $\quad +93 - (12.5)(8) + 8B_y = 0$

$+93 - 100 + 8B_y = 0$

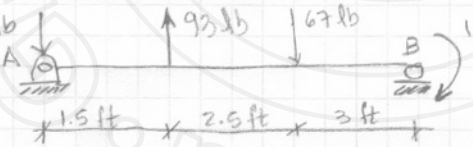
$-7 + 8B_y = 0$

$\therefore B_y = \frac{8}{7} = 1.1429$ kips

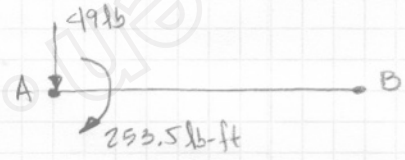


$A_y = 12.5 - B_y = 12.5 - 1.1429 = 11.3571$ kips

2.43.-



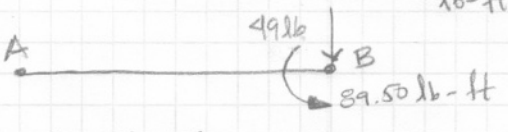
a) $\Sigma F_x = 0$



$\Sigma F_y = -75 + 93 - 67 = -49$ lb

$\Sigma M_a = +(93)(1.5) - (67)(4) - 125 = 139.5 - 268 - 125 = -253.5$ lb-ft

b) $\Sigma F_x = 0$



$\Sigma F_y = -75 + 93 - 67 = -49$ lb

$\Sigma M_B = -125 + (67)(3) - (93)(5.5) + (75)(7) =$

$-125 + 201 - 511.5 + 525 = 89.50$ lb-ft

c) $\Sigma F_x = 0$ $\quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$ $\quad A_y - 75 + 93 - 67 + B_y = 0$ $\quad A_y - 49 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0$ $\quad (93)(1.5) - (67)(4) - 125 + 7B_y = 0$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

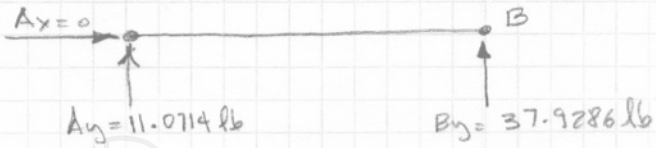
2.43 continuación

$139.5 - 280 - 125 + 7B_y = 0$

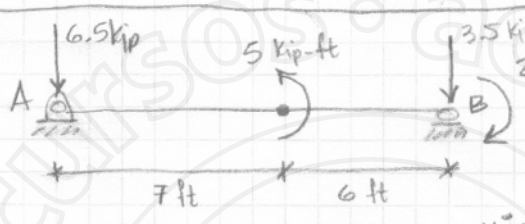
$-265.5 + 7B_y = 0$ $\quad B_y = \frac{265.5}{7} = 37.9286\ lb$

$A_y = 49 - B_y = 49 - 37.9286$

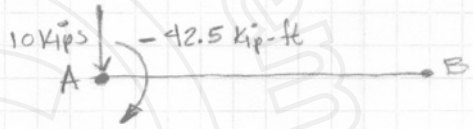
$A_y = 11.0714\ lb$



2.44.-



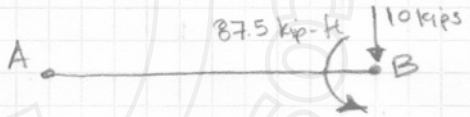
a) $\Sigma F_x = 0$



$\Sigma F_y = -6.5 - 3.5 = -10\ kips$

$\Sigma M_A = 0 \quad +5 - (3.5)(13) - 2 = +5 - 45.5 - 2 = -42.5\ kip\text{-}ft$

b) $\Sigma F_x = 0$



$\Sigma F_y = -6.5 - 3.5 = -10\ kips$

$\Sigma M_B = 0 \quad +(6.5)(13) + 5 - 2 = 84.5 + 5 - 2 = 87.5\ kip\text{-}ft$

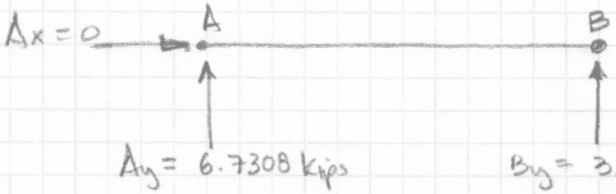
c) $\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 6.5 - 3.5 + B_y = 0 \quad A_y - 10 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad +5 - (3.5)(13) - 2 + 13B_y = 0$

$+5 - 45.5 - 2 + 13B_y = 0 \quad B = \frac{42.5}{13} = 3.2692$

$A_y = 10 - B_y = 10 - 3.2692 = 6.7308\ kips$



D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.49.-

Fuerza (N)$\hat{k}$	$dx\hat{i}$ (m)	$dy\hat{j}$ (m)	$Mx = F\,dy$ (N-m)	$My = F\,dx$ (N-m)
-7.5	0	0	0	0
+ 5.5	8	0	0	+ 44
- 6.0	8	1.5	-9.0	- 48
+ 3.5	0	4.0	+14.0	0
- 8.0	4.5	4.0	- 32.0	- 36
+ 9.0	8	4.0	+ 36	72
Σ = - 3.5	—	—	9.0 $\hat{i}$	32 $\hat{j}$

a) $\vec{F} = -3.5\,N\,\hat{k}$ $\quad \vec{M}_o = 9.0\,N\text{-}m\,\hat{i} + 32\,N\text{-}m\,\hat{j}$

b) $9\hat{i} + 32\hat{j} = (x\hat{i} + y\hat{j}) \times (-3.5\hat{k})$

$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & -3.5 \end{vmatrix} = [-3.5y - (0)(0)]\hat{i} - [-3.5x - (0)(0)]\hat{j} + [0x - 0y]\hat{k}$$

$$\vec{M}_o = -3.5y\,\hat{i} + 3.5x\,\hat{j}$$

$$+ 9\hat{i} + 32\hat{j} = -3.5y\,\hat{i} + 3.5x\,\hat{j}$$

$9 = -3.5y \qquad y = -\frac{9}{3.5} = -2.5714$

$32 = +3.5x \qquad x = \frac{32}{3.5} = 9.1429$

$\vec{R} = -3.5\,N\,\hat{k} \qquad (x, y) = (9.1429, -2.5714)\ mts$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.46.-

	Fuerza (lb) $\hat{j}$	dx $\hat{i}$ (ft)	dz $\hat{k}$ (ft)	$M_x = F\,dz$ (lb-ft)	$M_z = F\,dx$ (lb-ft)
	-92.	0	0	0	0
	-80	0	27	-2,160.	0
	+94	5	27	+2,538.	+470
	-24	13	0	- 0	-312
	+48	13	15	+ 720	+624
	-36	13	27	- 972	-468
$\Sigma =$	-90	—	—	+126.	+314.

a) $\vec{F} = -90\ lb\ \hat{j}$ $\quad \vec{M}_o = 126\ lb\text{-}ft\ \hat{i} + 314\ lb\text{-}ft\ \hat{k}$

b) $126\ \hat{i} + 314\ \hat{k} = (x\hat{i} + z\hat{k}) \times (-90\hat{j})$

$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & 0 & z \\ 0 & -90 & 0 \end{vmatrix} = [(0)(0) - (-90)(z)]\hat{i} - [(x)(0) - (0)(z)]\hat{j} + [(x)(-90) - (0)(0)]\hat{k}$$

$$\vec{M}_o = +90z\,\hat{i} - 90x\,\hat{k}$$

$$126\hat{i} + 314\hat{k} = 90z\,\hat{i} - 90x\,\hat{k}$$

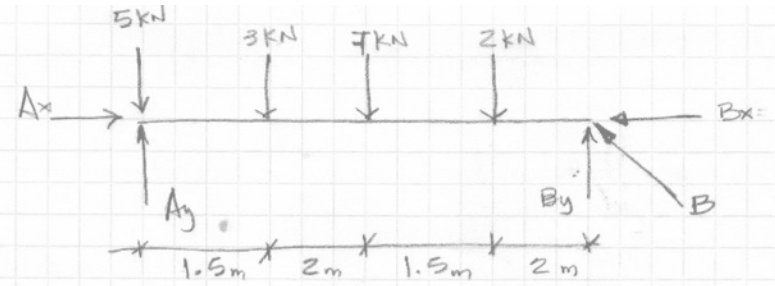
$$126 = 90z \qquad z = \frac{126}{90} = 1.40\ ft$$

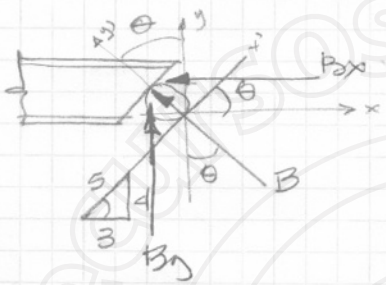
$$314 = -90x \qquad x = \frac{314}{-90} = -3.4889\ ft$$

$\vec{R} = -90\ lb\ \hat{j}$ $\quad (x, z) = (-3.4889,\ 1.40)\ ft$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

47.-





$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.1301^\circ$$

$$By = B\cos\theta$$

$$Bx = B\operatorname{sen}\theta$$

$$\Sigma Fx = 0 \qquad Ax - B\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\Sigma Fy = 0 \qquad Ay - 5 - 3 - 7 - 2 + B\cos\theta = 0$$

$$\Sigma MA = 0 \qquad -(3)(1.5) - (7)(3.5) - (2)(5) + 7B\cos\theta = 0$$

$$-4.5 - 24.5 - 10 + 7B\cos\theta$$

$$B = \frac{39}{7\cos\theta} = \frac{39}{7\cos 53.1301^\circ}$$

$$B = 9.2857 \text{ kN}$$

$$By = 9.2857\cos 53.1301^\circ = 5.5714 \text{ kN}$$

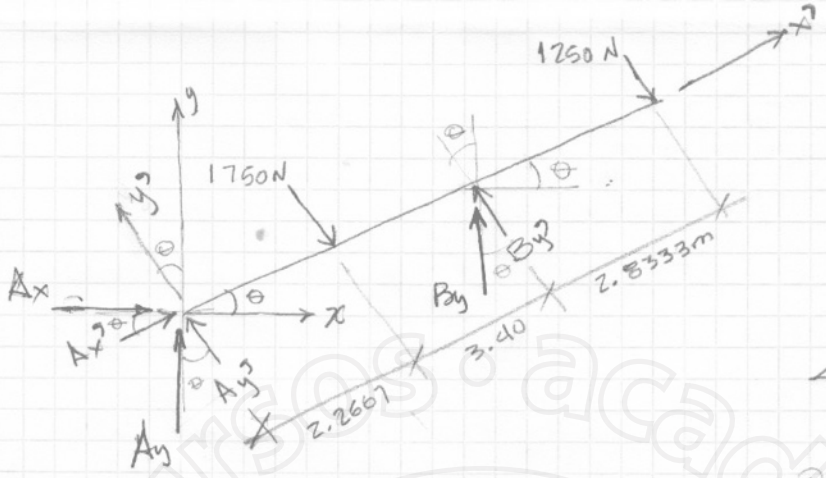
$$Bx = 9.2857\operatorname{sen} 53.1301^\circ = 7.4286 \text{ kN}$$

$$Ay = 17 - 9.2857\cos 53.1301^\circ = 11.4286 \text{ kN}$$

$$Ax = 9.2857\operatorname{sen} 53.1301^\circ = 7.4286 \text{ kN}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.48.-



$\theta = tg^{-1}\left(\frac{d}{7.5}\right) =$

$l_a \cos\theta = 2m \qquad l_a = \frac{2}{\cos 28.0775} = 2.2667m \qquad \theta = 28.0725°$

$l_b \cos\theta = 3m$

$l_c \cos\theta = 2.5m \qquad l_b = \frac{3}{\cos 28.0775°} = 3.40m$

$l_c = \frac{2.5}{\cos 28.0725°} = 2.8333m$

$\Sigma Fx' = 0 \quad Ax' = 0$

$\Sigma Fy' = 0 \quad Ay' - 1750 + By' - 1250 = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad -1750(2.2667) + By'(5.6667) - 1250(8.50) = 0$

$3\,966.7250 + 5.6667\,By - 10\,625 = 0$

$By' = \frac{14\,591.7250}{5.6667} = 2,574.9951\,N$

$Ay' = 1750 - 2574.9951 + 1250 = 425.0049N$

$By = By' \cos\theta = 2574.9951 \cos 28.0725° = \underline{2,272.05N}$

$Ay = Ay' \cos\theta = 425.0049 \cos 28.0725° = \underline{375.0043N}$

$Ax = Ay' \operatorname{sen}\theta = 425.0049 \operatorname{sen} 28.0725° = \underline{200.0024N}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.49.-

$F_1 = 1354\,N$ $\quad F_1 \operatorname{sen} 40^\circ = 1354 \operatorname{sen} 40^\circ = 870.3344\,N\,\hat{k}$

$F_1 \cos 40^\circ = 1354 \cos 40^\circ = 1037.2442\,N$

$(F_1 \cos 40^\circ)\cos 50^\circ = 1037.2442 \cos 50^\circ = 666.7277\,N\,\hat{j}$

$(F_1 \cos 40^\circ) \operatorname{sen} 50^\circ = 1037.2442 \operatorname{sen} 50^\circ = -794.5752\,N\,\hat{i}$

$F_2 = 793\,N$ $\quad F_2 \operatorname{sen} 35^\circ = 793 \operatorname{sen} 35^\circ = 454.8461\,N\,\hat{k}$

$F_2 \cos 35^\circ = 649.5876\,N$

$(F_2 \cos 35)\cos 60^\circ = 649.5876 \cos 60^\circ = -324.7938\,N\,\hat{j}$

$F_2 \cos 35^\circ) \operatorname{sen} 60^\circ = 649.5876 \operatorname{sen} 60^\circ = -562.5594\,N\,\hat{i}$

$$\rho_{\overrightarrow{O-F_1}} = 6(\operatorname{sen} 30^\circ \hat{k} + \cos 70^\circ \hat{j} - \operatorname{sen} 70^\circ \hat{i})$$
$$3\hat{k} + 2.0521\hat{j} - 5.6382\hat{i}$$

$$\rho_{\overrightarrow{O-F_2}} = 3(\operatorname{sen} 30^\circ \hat{k} + \cos 70^\circ \hat{j} - \operatorname{sen} 70^\circ \hat{i})$$
$$1.50\hat{k} + 1.0261\hat{j} - 2.8191\hat{i}$$

$M_O = \rho \times F$

$M_{O_1} = \rho_{\overrightarrow{O-F_1}} \times \overrightarrow{F_1}$

$$M_{O_1} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -5.6382 & 2.0521 & 3 \\ -794.5752 & 666.7277 & 870.3344 \end{vmatrix}$$

$$= +[(2.0521)(870.3344) - (666.7277)(3)]\hat{i}$$
$$-[(-5.6382)(870.3344) - (-794.5752)(3)]\hat{j}$$
$$+[(-5.6382)(666.7277) - (-794.5752)(2.0521)]\hat{k}$$

a) $M_{O_1} = -214.1699\,\hat{i} + 2{,}523.3938\,\hat{j} - 2128.5964\,\hat{k}$

$M_{O_2} = \rho_{\overrightarrow{O-F_2}} \times \overrightarrow{F_2}$

$$M_{O_2} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2.8191 & 1.0261 & 1.50 \\ -562.5594 & -324.7938 & 454.8461 \end{vmatrix}$$

$$= +[(1.0261)(454.8461) - (-324.7938)(1.50)]\hat{i}$$
$$-[(-2.8191)(454.8461) - (-562.5594)(1.50)]\hat{j}$$
$$+[(-2.8191)(-324.7938) - (-562.5594)(1.0261)]\hat{k}$$

b) $M_{O_2} = 953.9083\,\hat{i} + 438.4175\,\hat{j} + 1{,}492.8684\,\hat{k}$

c) $M_O = 739.7384\,\hat{i} + 2{,}961.8113\,\hat{j} - 635.7280\,\hat{k}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.50.- $L = 30\ ft$ $L/4 = 30/4 = 7.5\ ft$ $3L/4 = 3/4(30) = 22.5\ ft$

$F_1 = 675\ lb$

$F_2 = 3971\ lb$

$\vec{F}_1 = 675\ lb\,(\operatorname{sen}45^\circ \hat{k} + \cos 45^\circ \cos 55^\circ \hat{j} - \cos 45^\circ \operatorname{sen} 55^\circ \hat{i})$

$\vec{F}_1 = 477.2971\,\hat{k} + 273.7664\,\hat{j} - 390.9789\,\hat{i}\ \ (lb)$

$\vec{F}_2 = 3971\,lb(\operatorname{sen}30^\circ \hat{k} - \cos 30^\circ \cos 50^\circ \hat{j} - \cos 30^\circ \operatorname{sen} 50^\circ \hat{i})$

$\vec{F}_2 = 1985.5\,\hat{k} - 2{,}210.5382\,\hat{j} - 2{,}634.4168\,\hat{i}\ \ (lb)$

$\vec{\rho}_{O-1} = 22.5\ ft\,(\operatorname{sen}25^\circ \hat{k} + \cos 25^\circ \cos 60^\circ \hat{j} - \cos 25^\circ \operatorname{sen} 60^\circ \hat{i})$

$\vec{\rho}_{O-1} = 9.5089\,\hat{k} + 10.1960\,\hat{j} - 17.6599\,\hat{i}$

$\vec{\rho}_{O-2} = 7.5\ ft\,(\operatorname{sen}25^\circ \hat{k} + \cos 25^\circ \cos 60^\circ \hat{j} - \cos 25^\circ \operatorname{sen} 60^\circ \hat{i})$

$\vec{\rho}_{O-2} = 3.1696\,\hat{k} + 3.3987\,\hat{j} - 5.8866\,\hat{i}$

$$\vec{M}_{O-1} = \vec{\rho}_{O-1} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} +\hat{i} & -\hat{j} & +\hat{k} \\ -17.6599 & +10.1960 & +9.5089 \\ -390.9789 & 273.7664 & 477.2971 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{M}_{O-1} = [(10.1960)(477.2971) - (273.7664)(9.5089)]\,\hat{i} - [(-17.6599)(477.2971) - (-390.9789)(9.5089)]\,\hat{j} + [(-17.6599)(273.7664) - (-390.9789)(10.1960)]\,\hat{k}$$

a) $\vec{M}_{O-1} = 2\,263.3039\,\hat{i} + 4{,}711.2398\,\hat{j} - 848.2664\,\hat{k}\ \ (lb\text{-}ft)$

$$\vec{M}_{O-2} = \begin{vmatrix} +\hat{i} & -\hat{j} & +\hat{k} \\ -5.8866 & 3.3987 & 3.1696 \\ -2634.4168 & -2210.5382 & 1985.5 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{M}_{O-2} = [(3.3987)(1985.5) - (-2210.5382)(3.1696)]\,\hat{i} - [(-5.8866)(1985.5) - (-2634.4168)(3.1696)]\,\hat{j} + [(-5.8866)(-2210.5382) - (-2634.4168)(3.3987)]\,\hat{k}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.50 continuación

b) $\vec{M}_{O-2} = 13,754.6407\,\hat{i} + 3,337.7968\,\hat{j} + 21,966.1465\,\hat{k}$ (lb-ft)

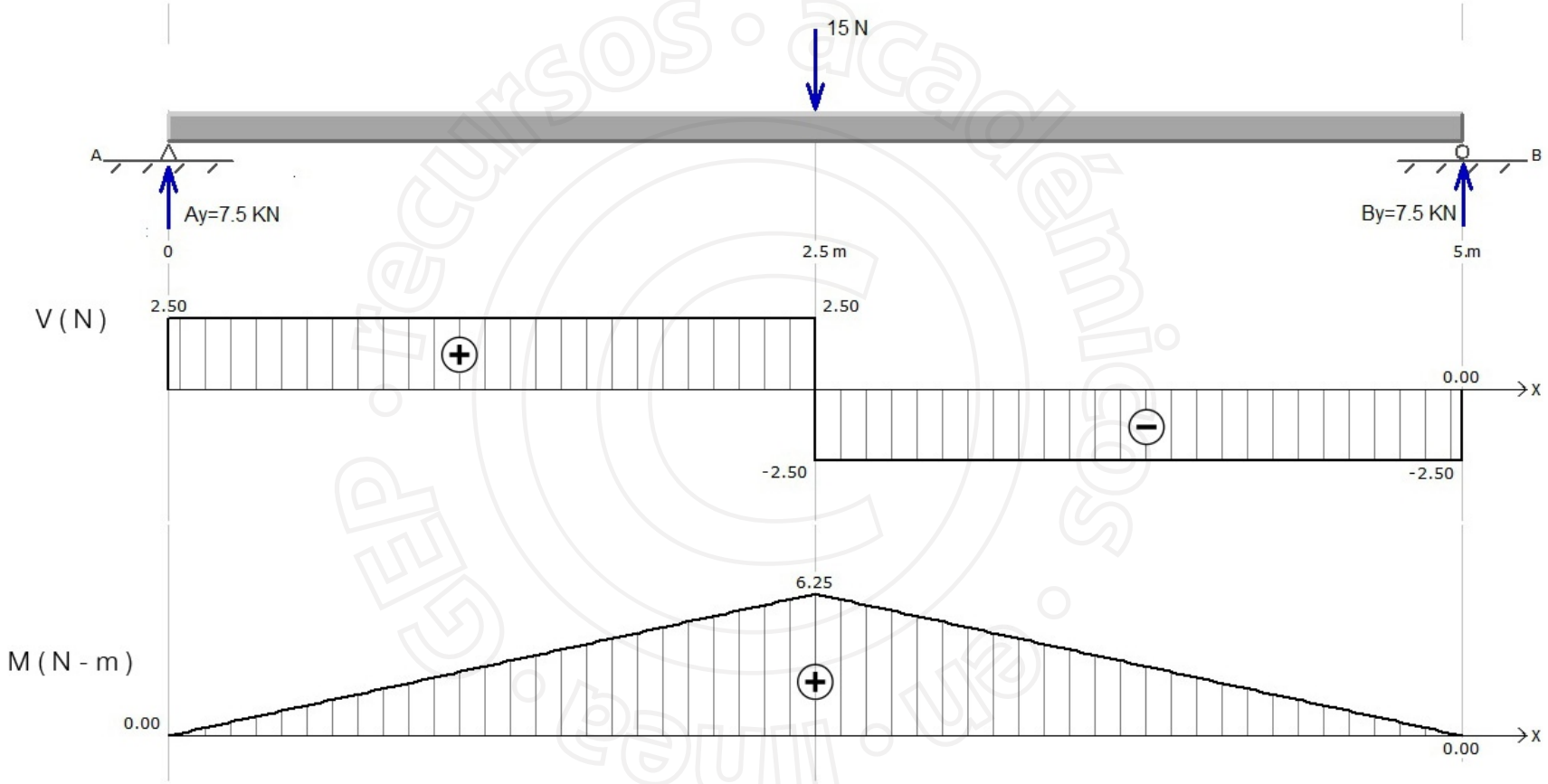
c) $\vec{M}_O = 16,017.9446\,\hat{i} + 8,049.0366\,\hat{j} + 21,117.8801\,\hat{k}$ (lb-ft)

recursos · académicos · en · línea · Cengage

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

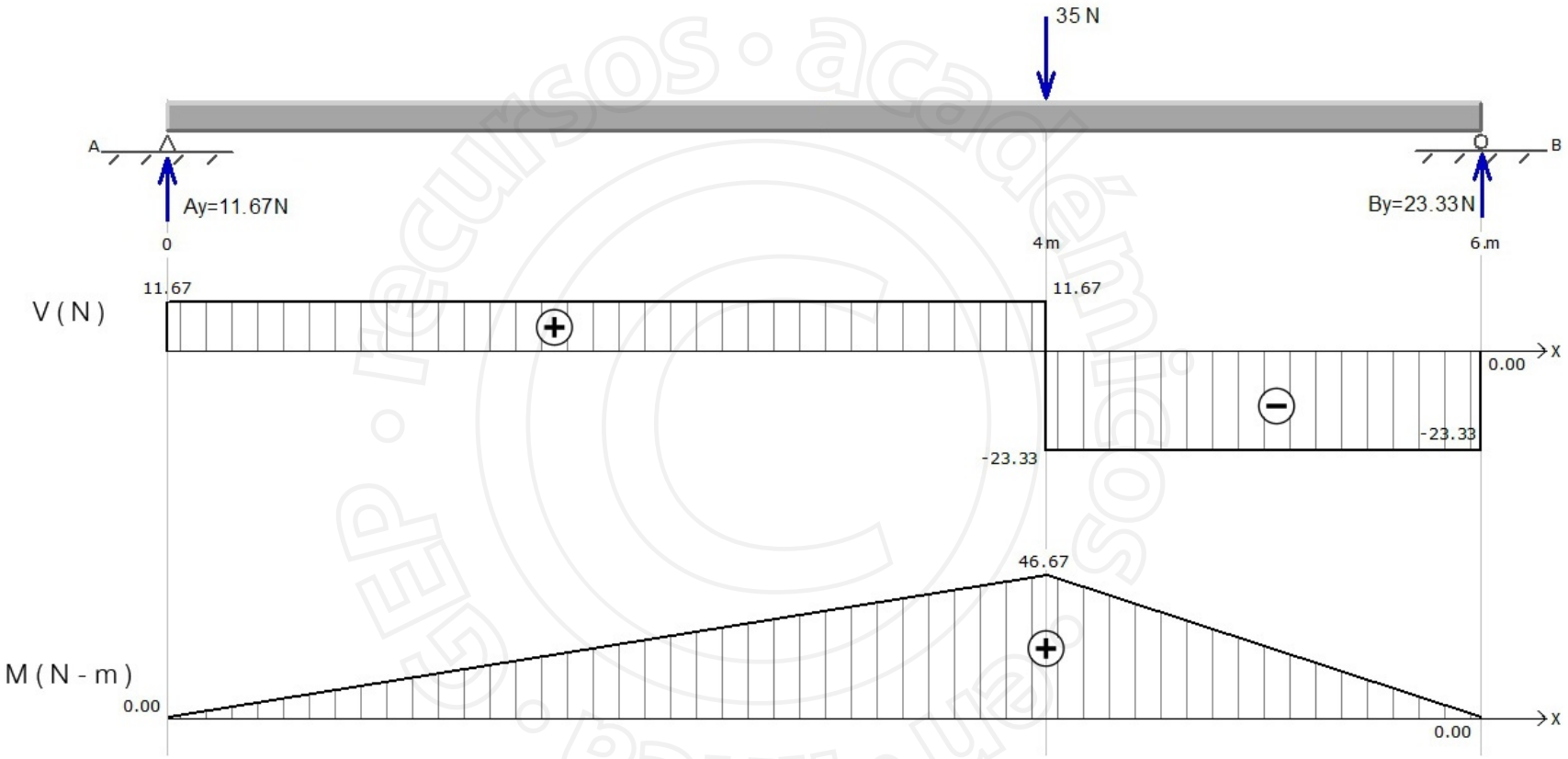
A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1



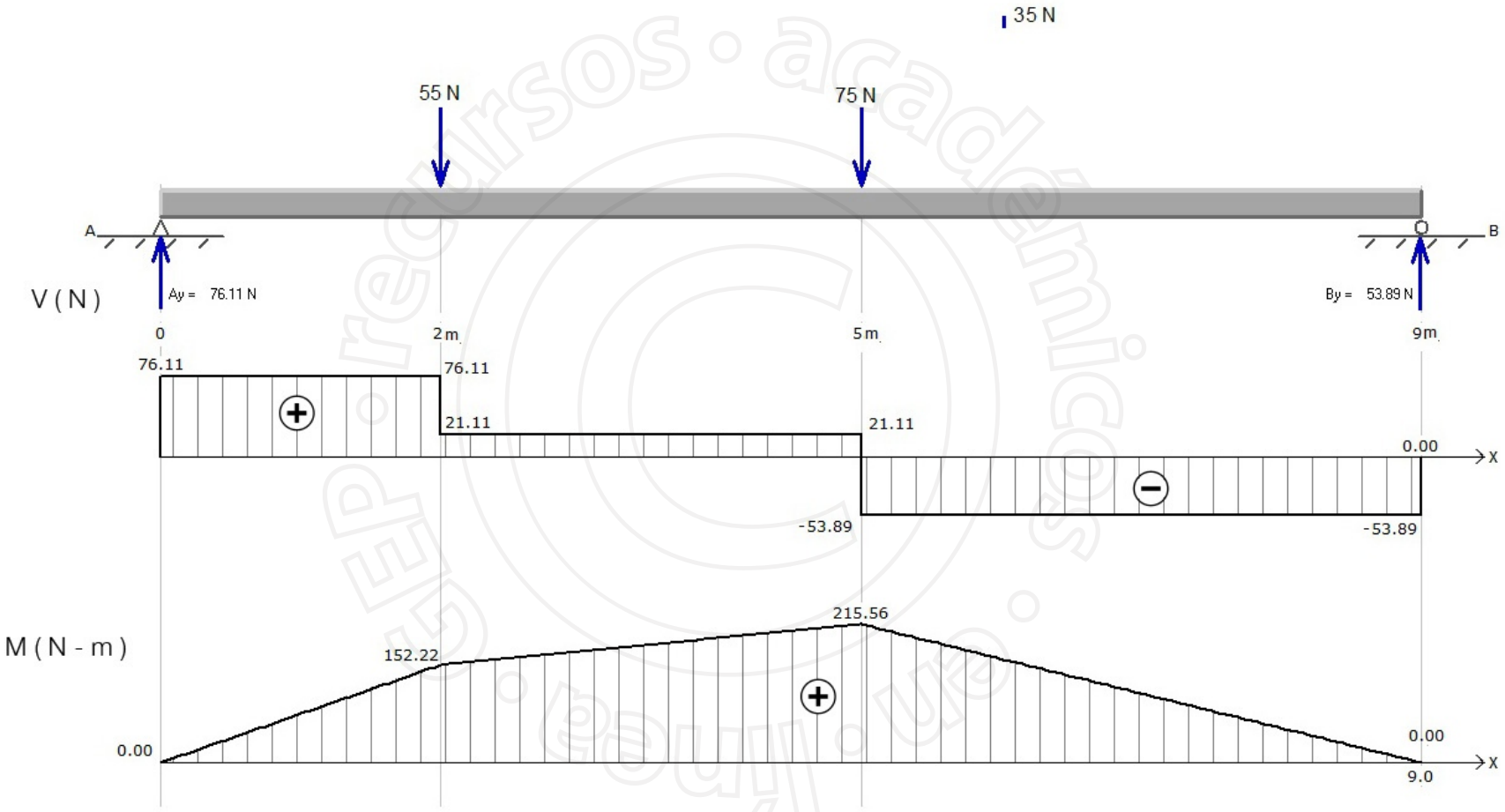
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.2



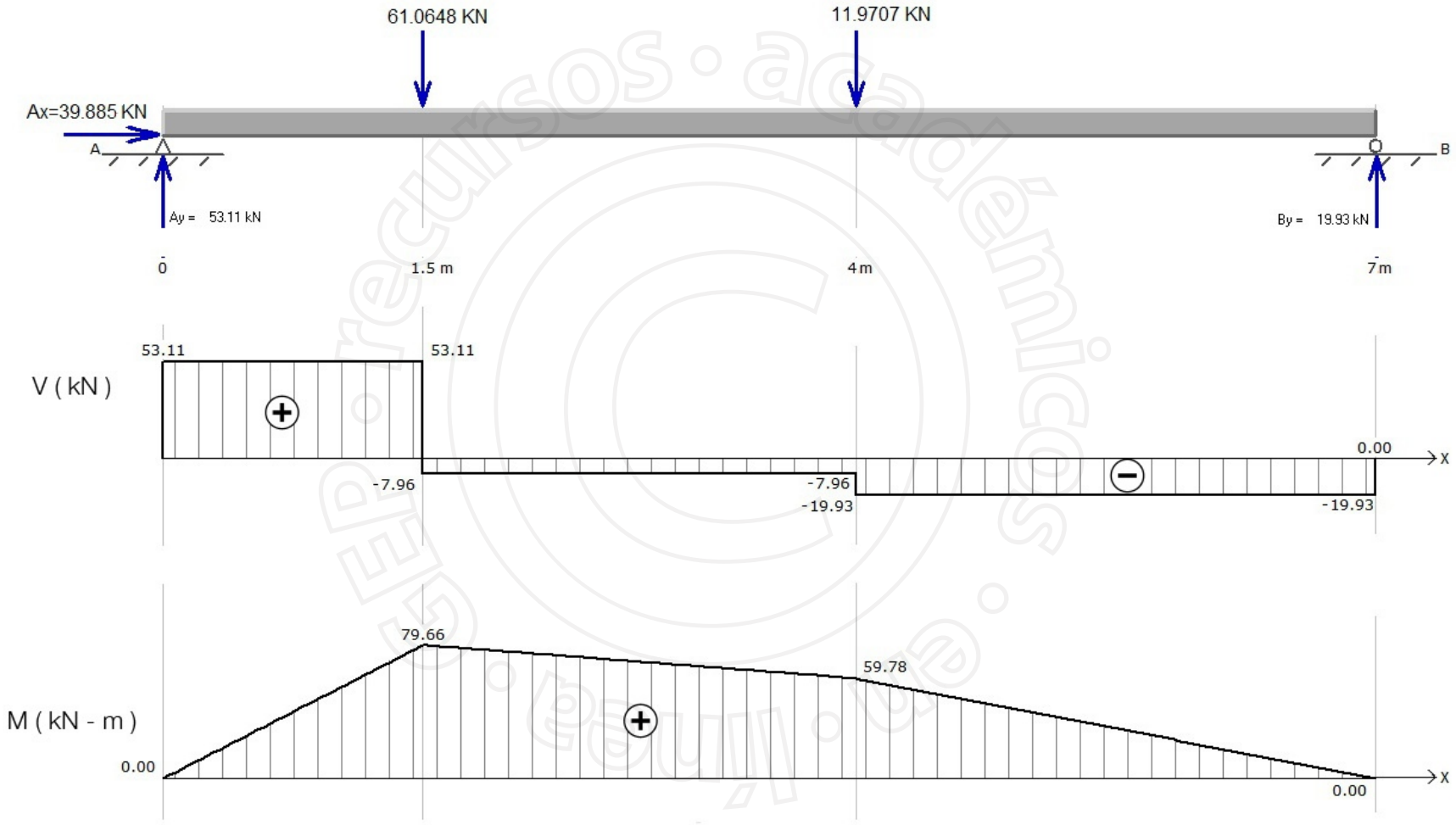
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.3



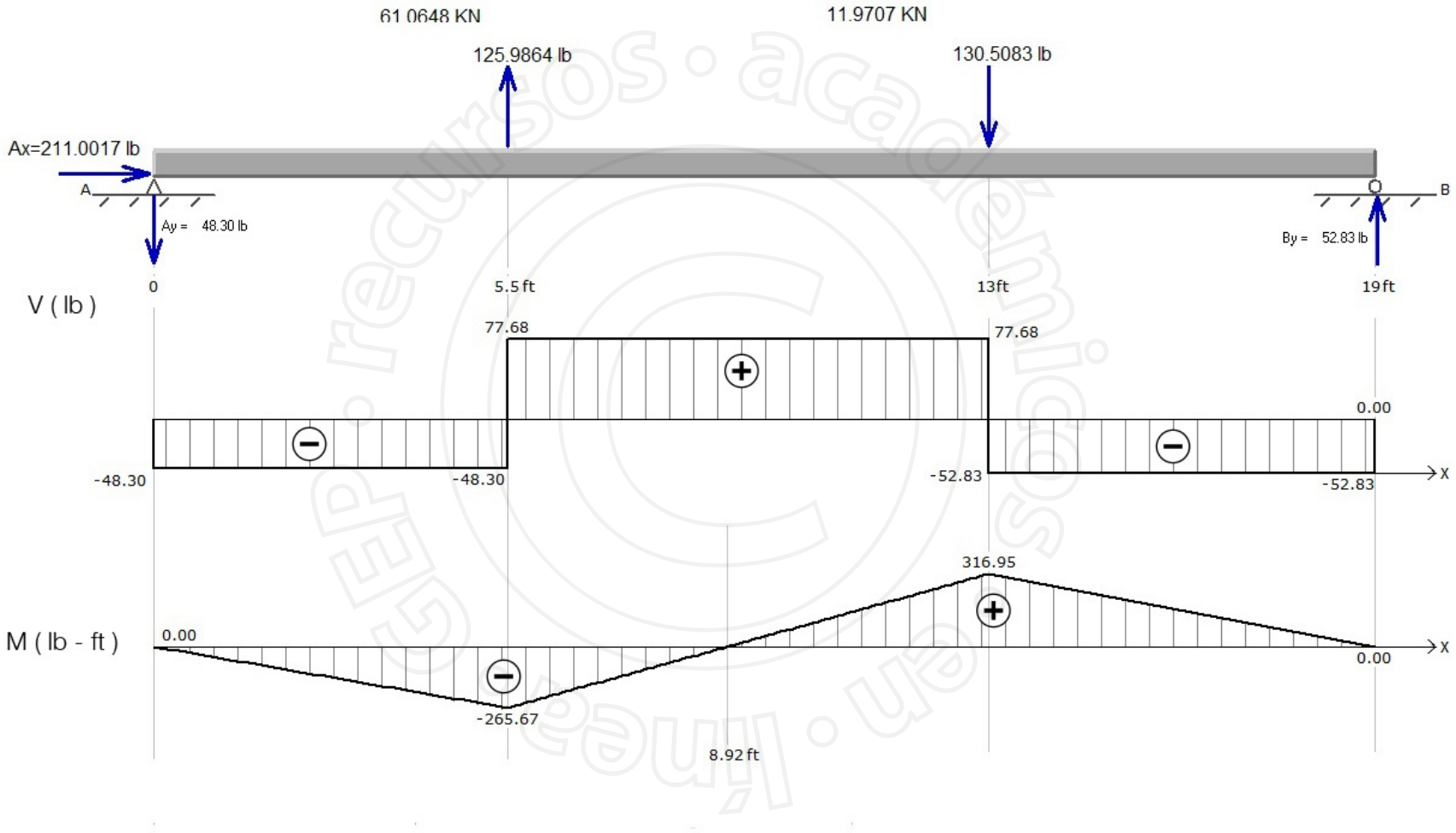
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.4



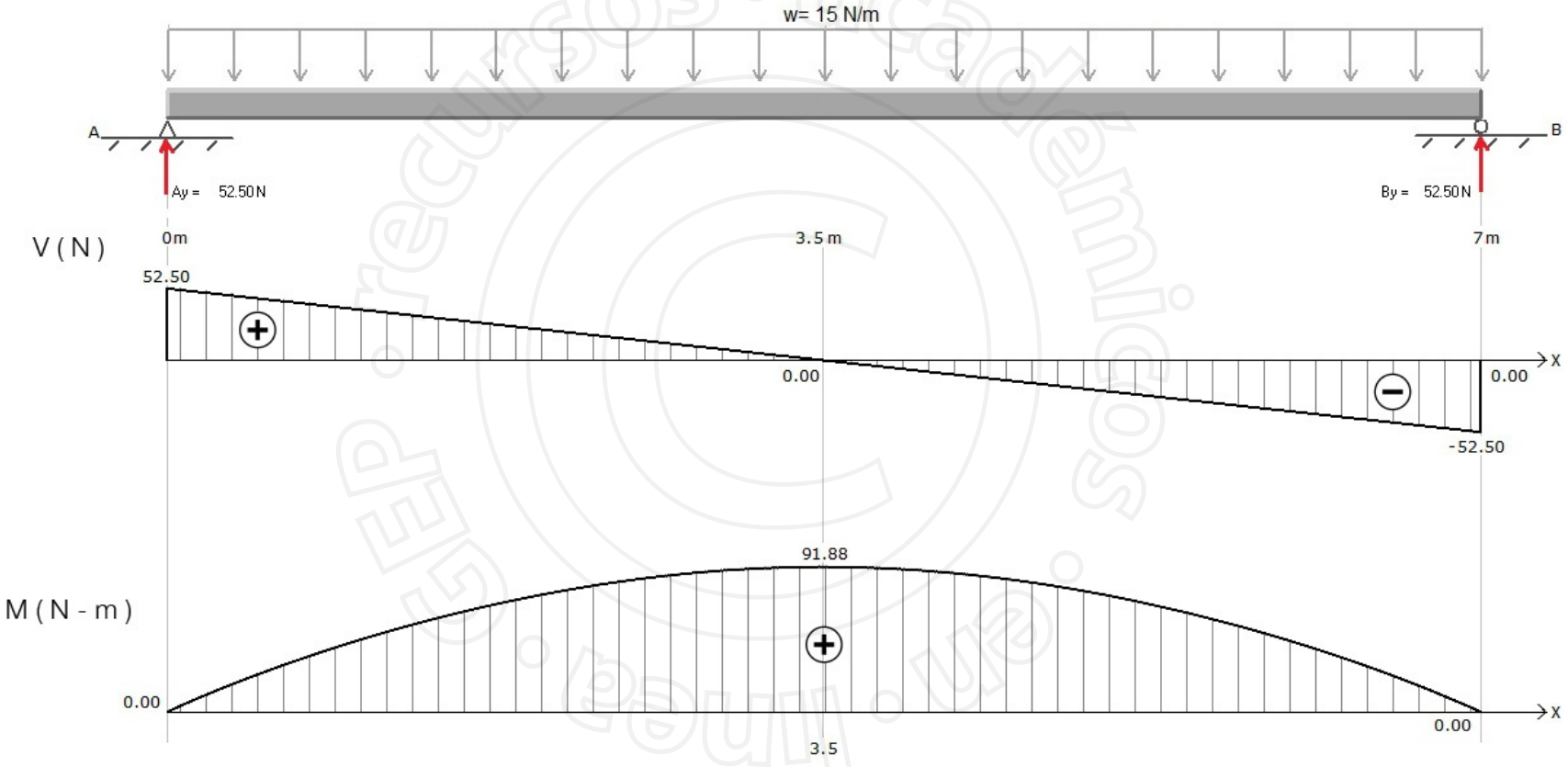
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.5



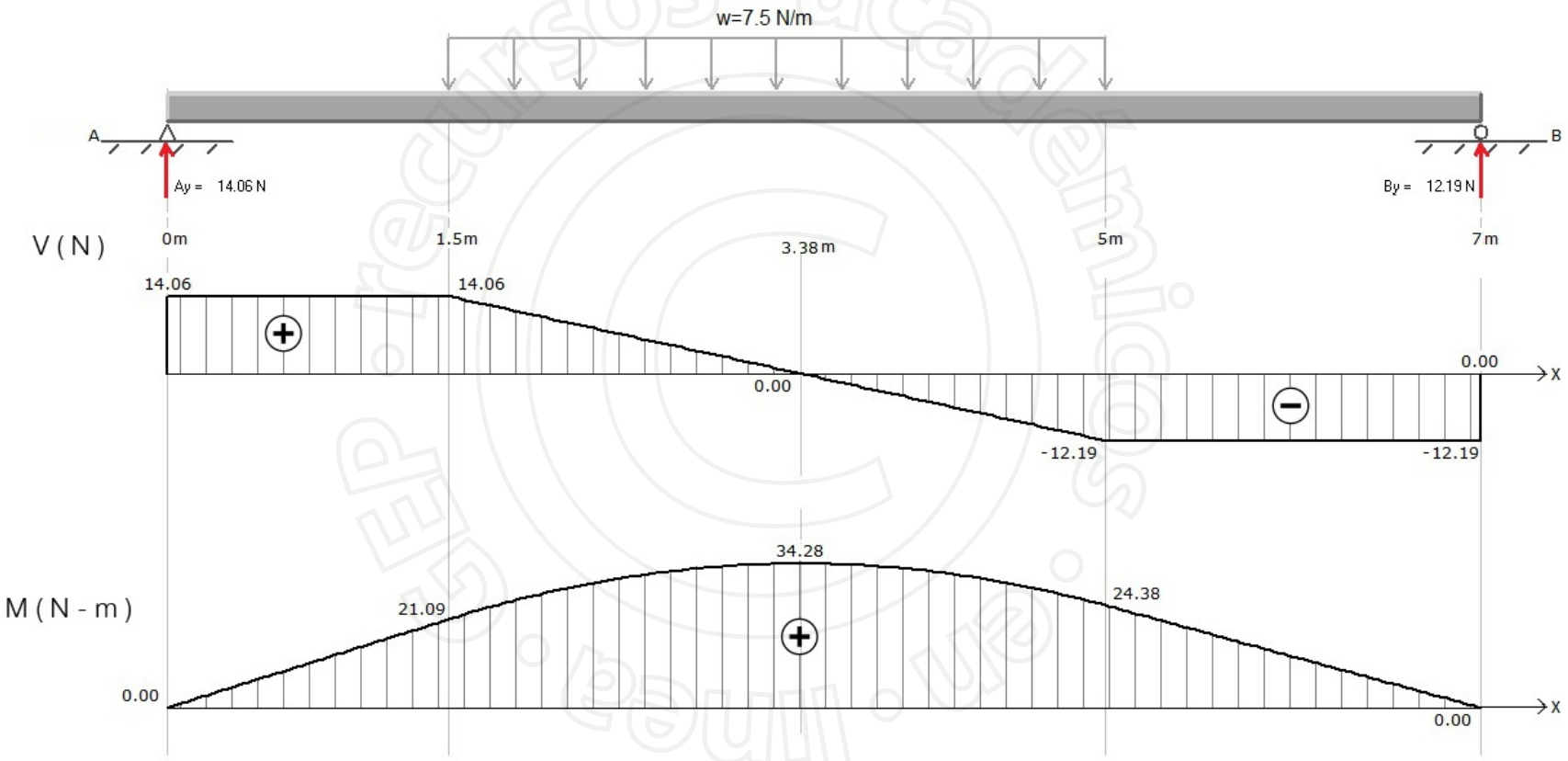
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.6



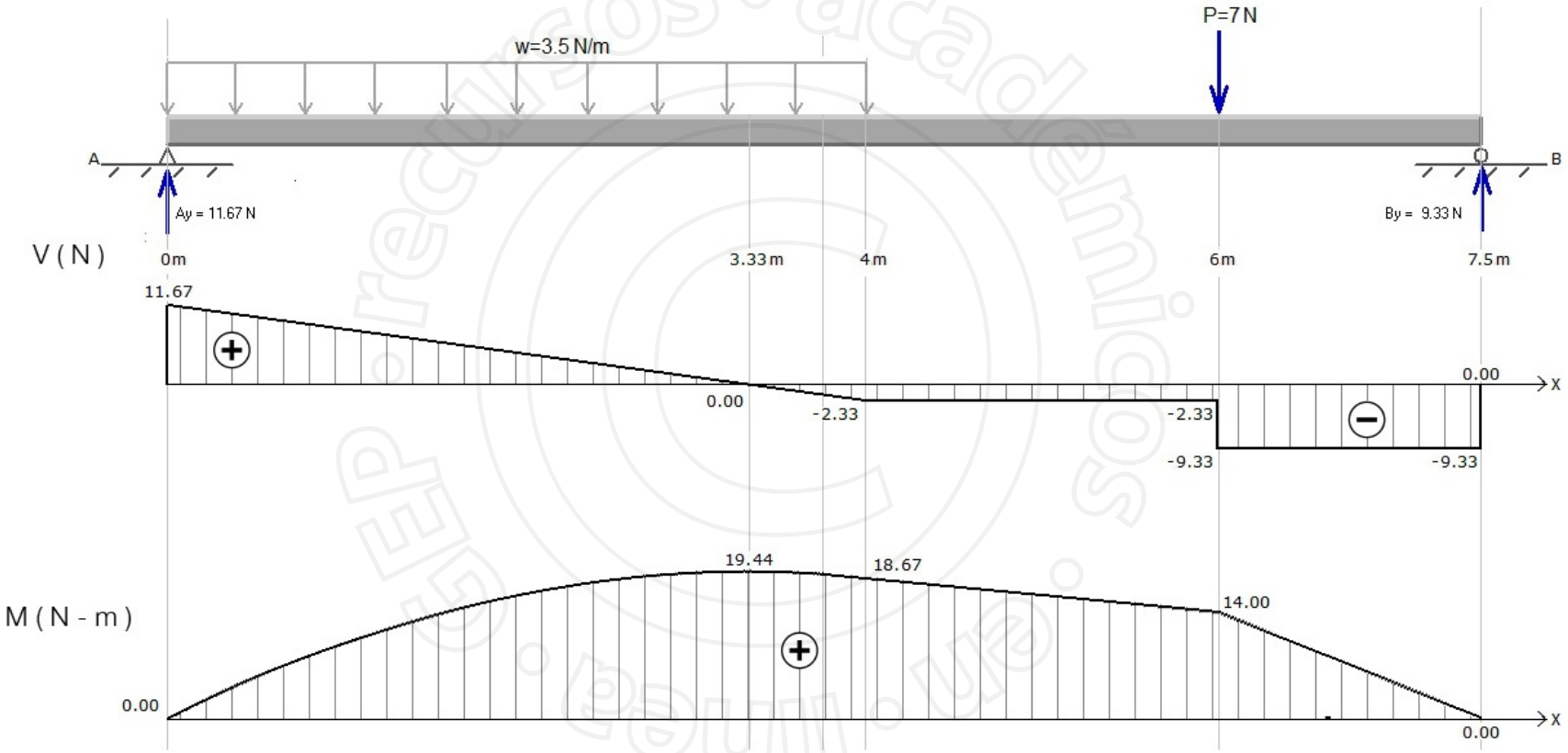
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.7



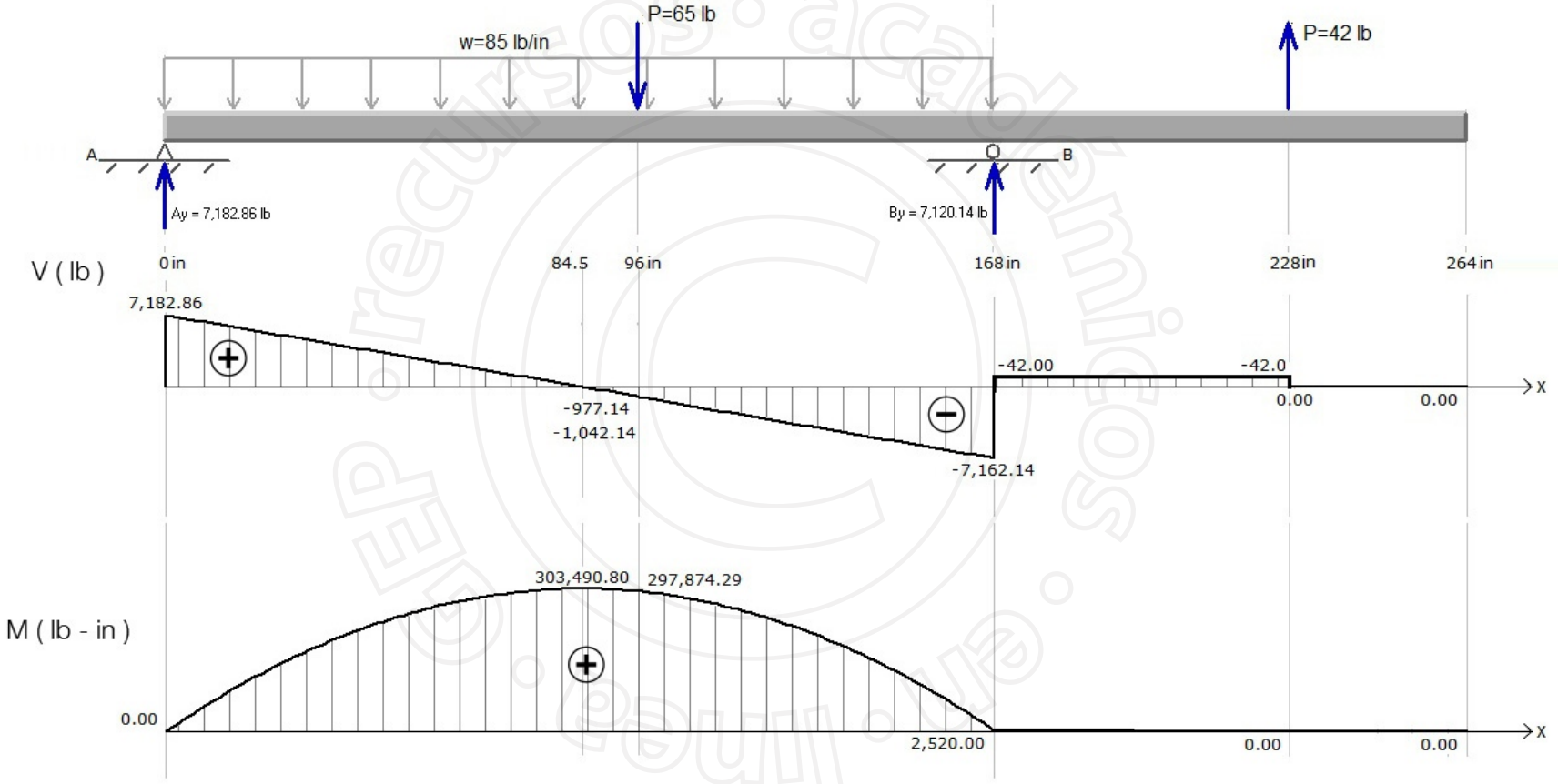
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.8



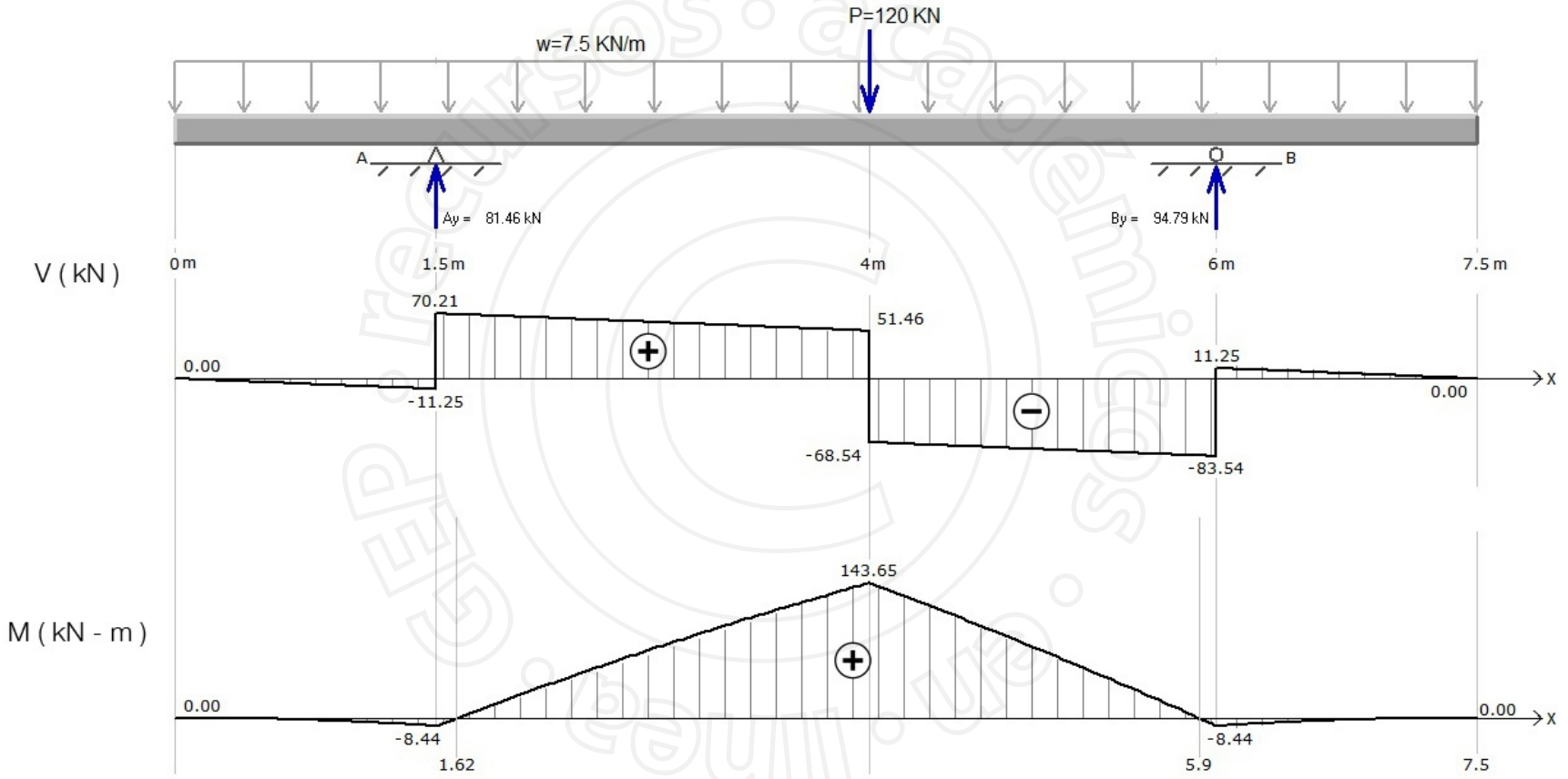
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.9



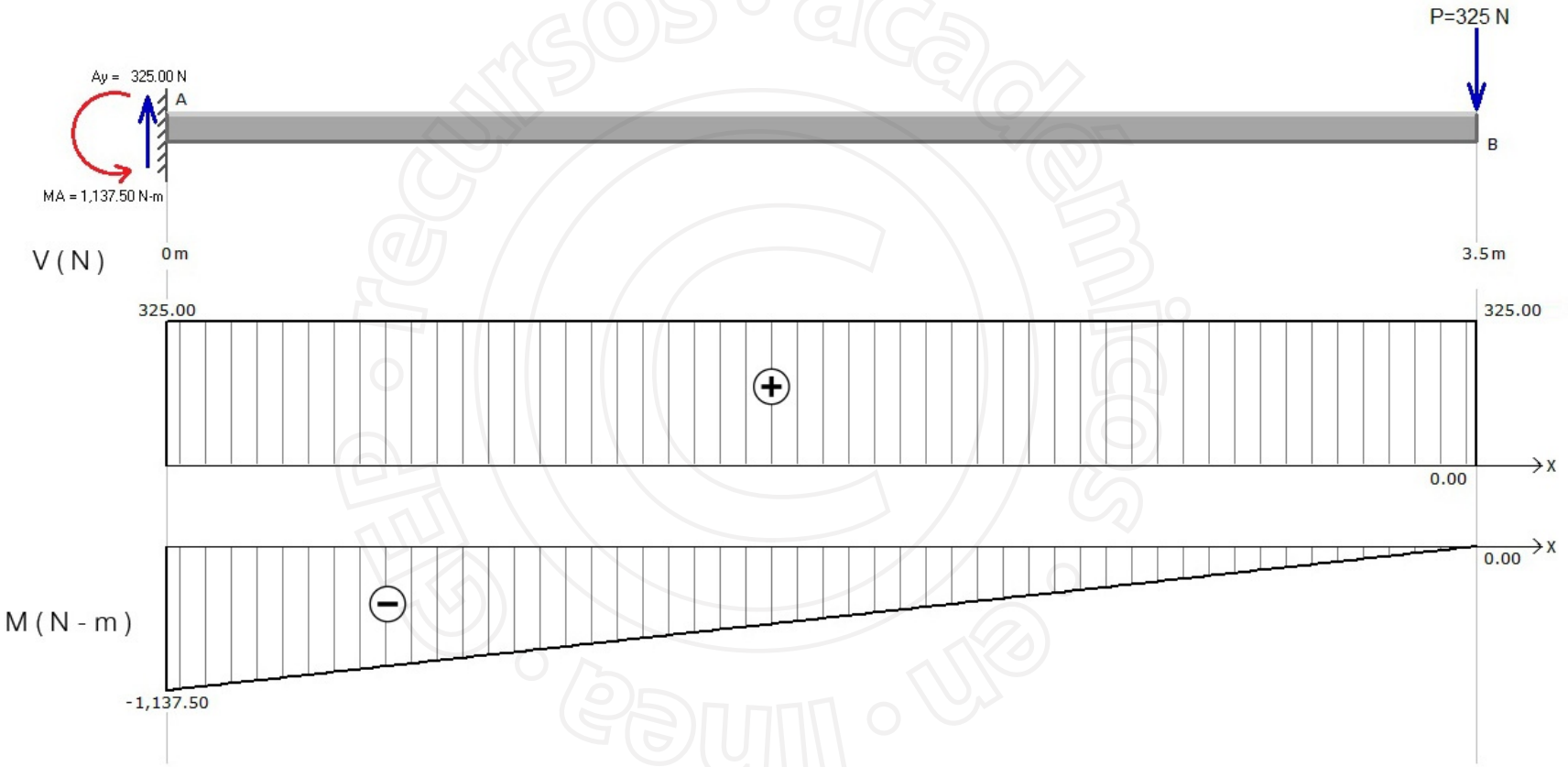
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.10



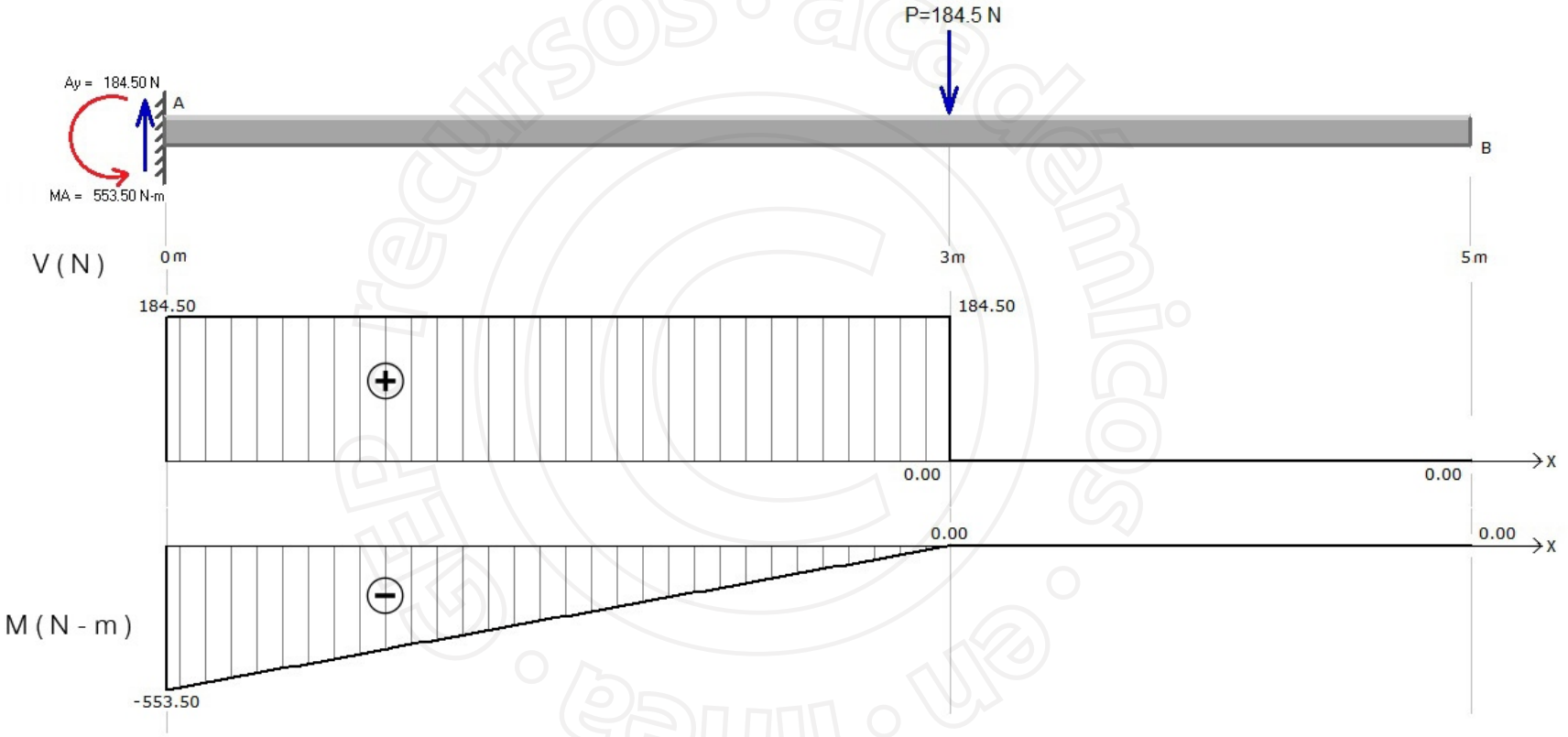
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.11



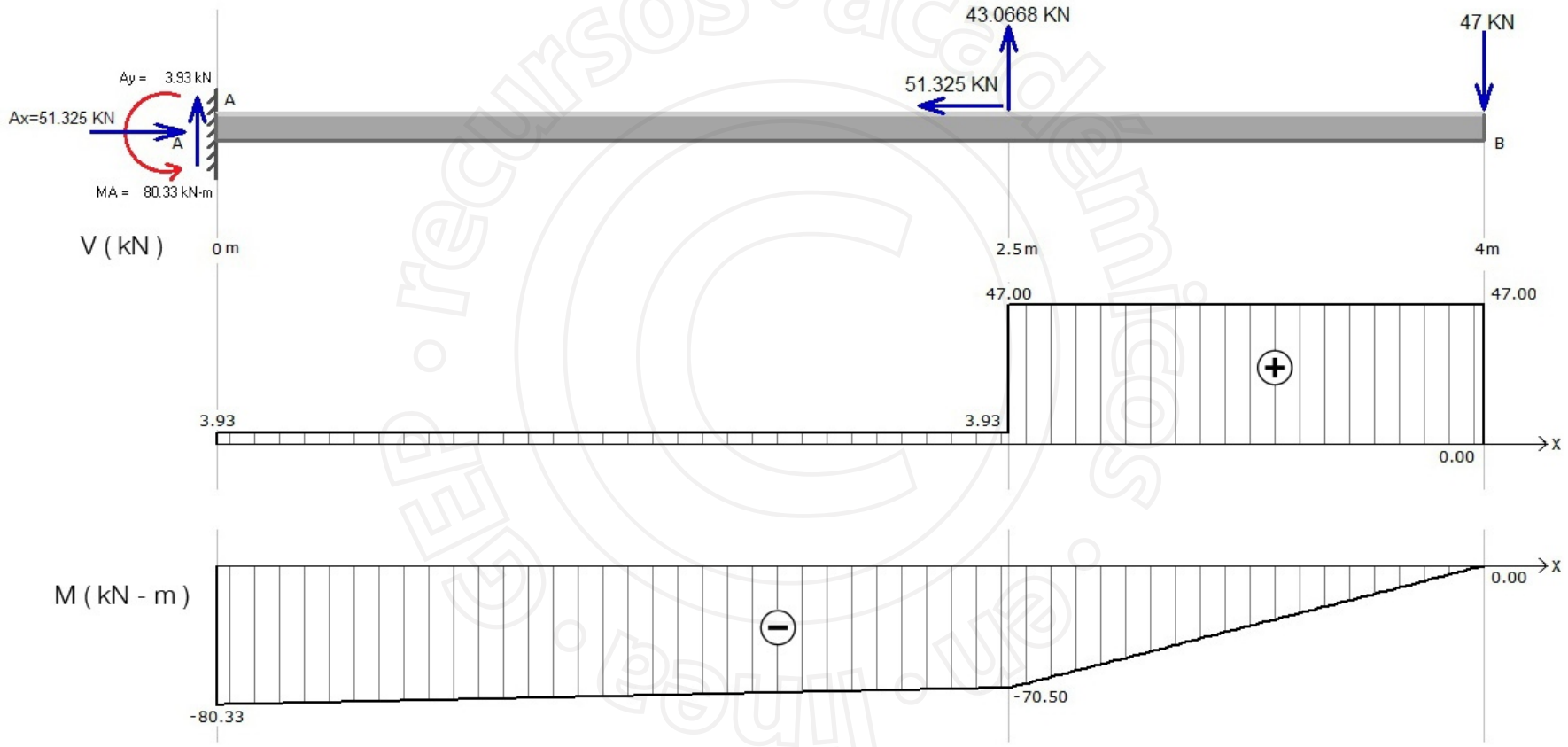
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.12



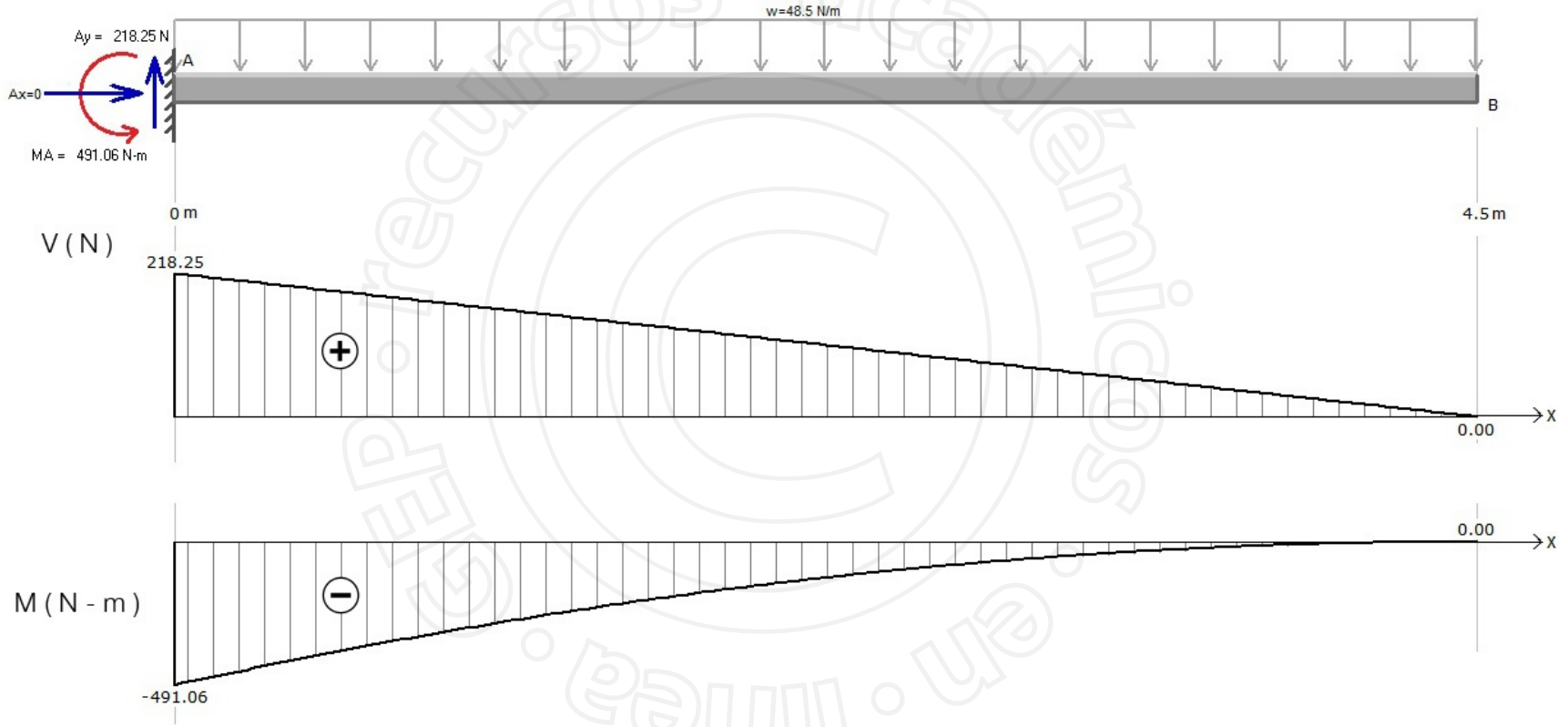
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.13



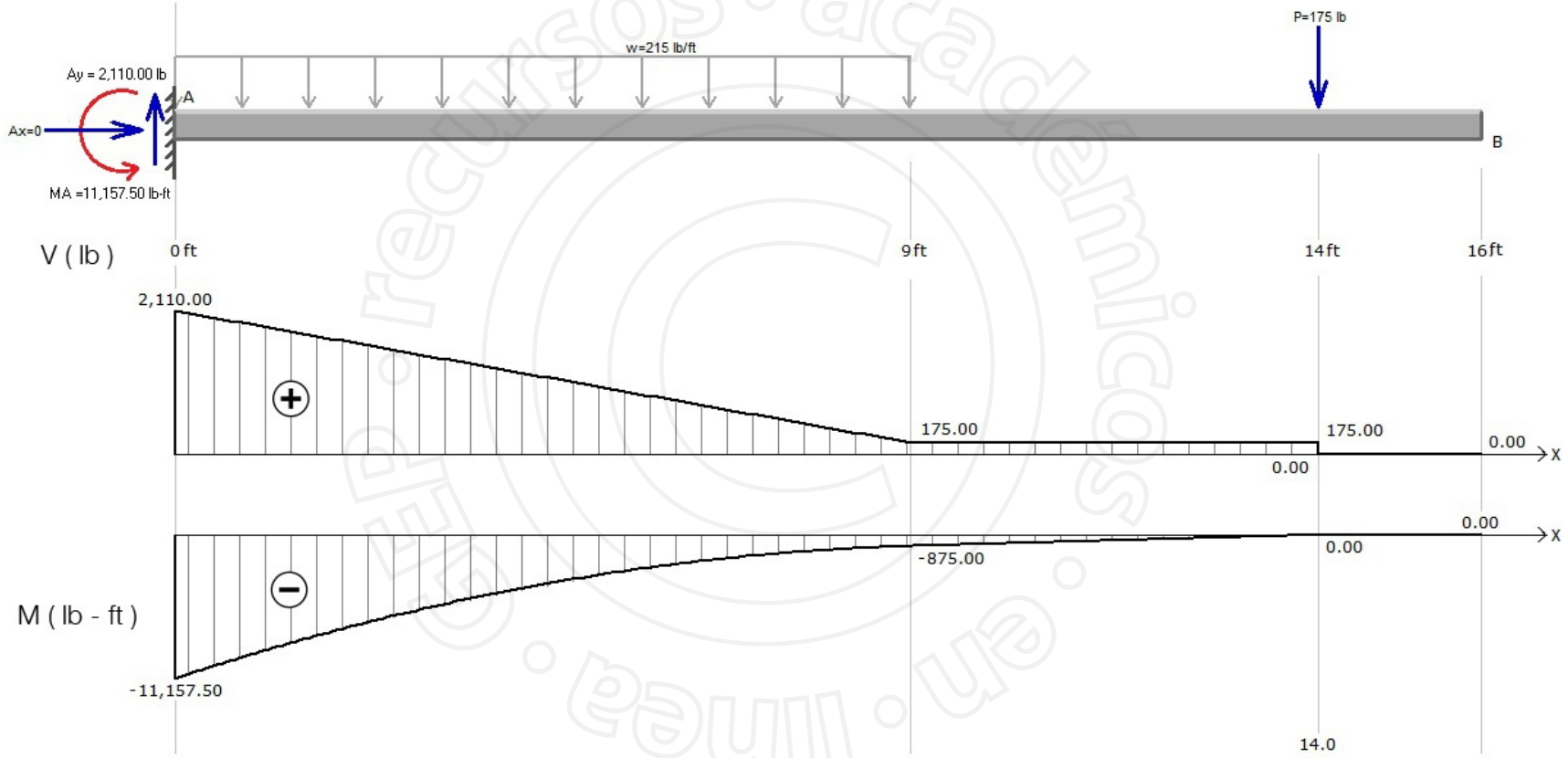
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.14



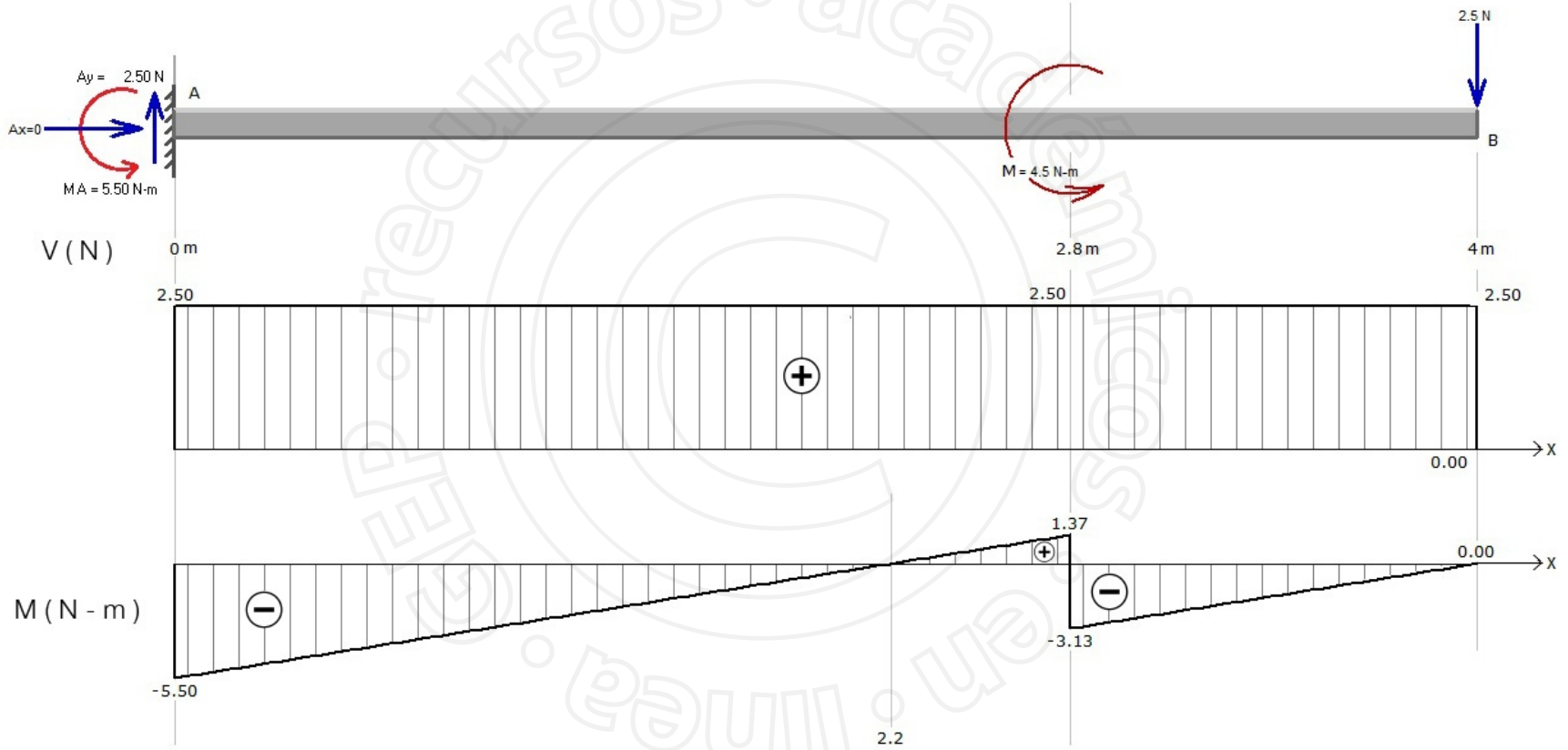
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.15



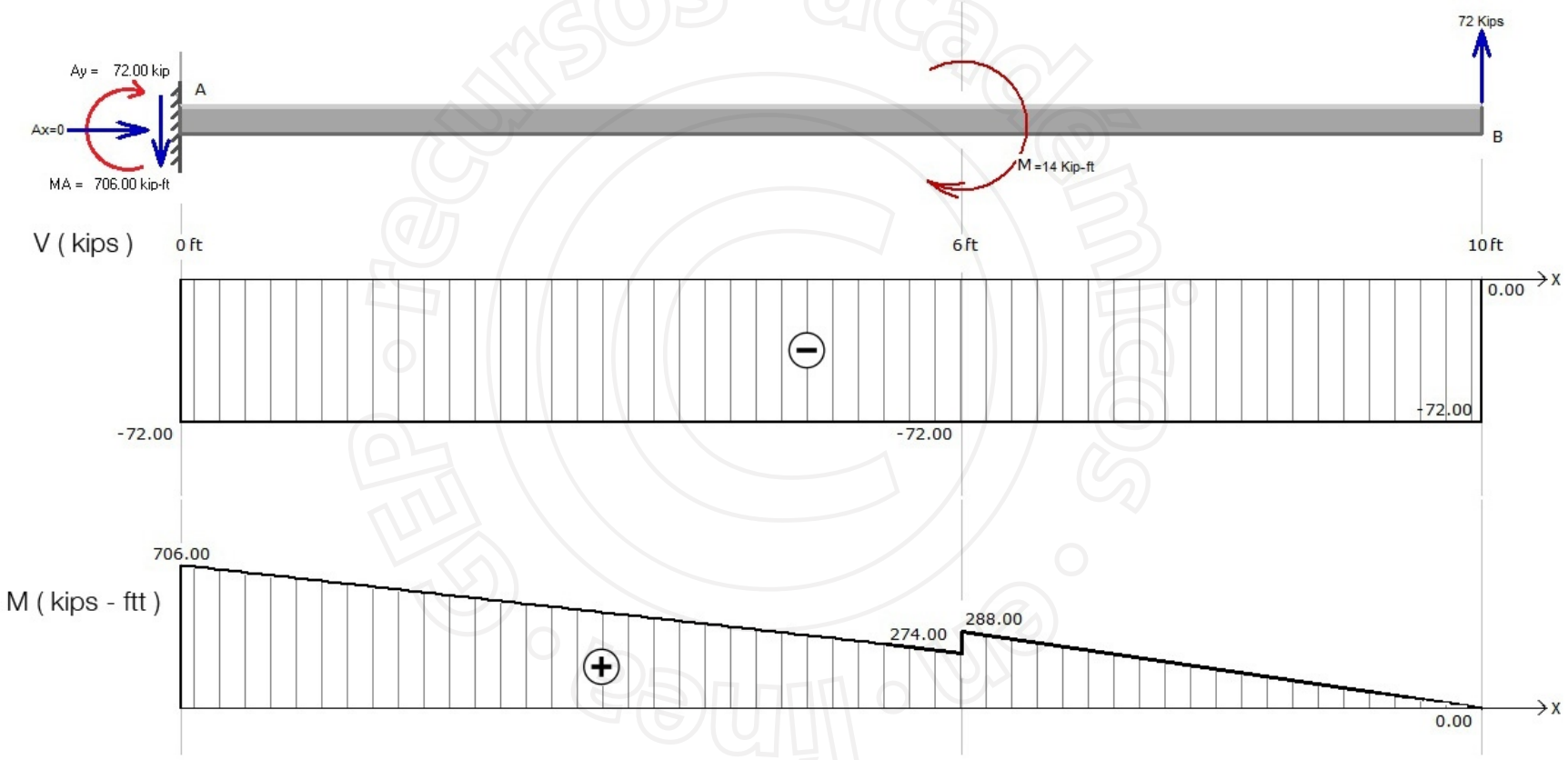
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.16



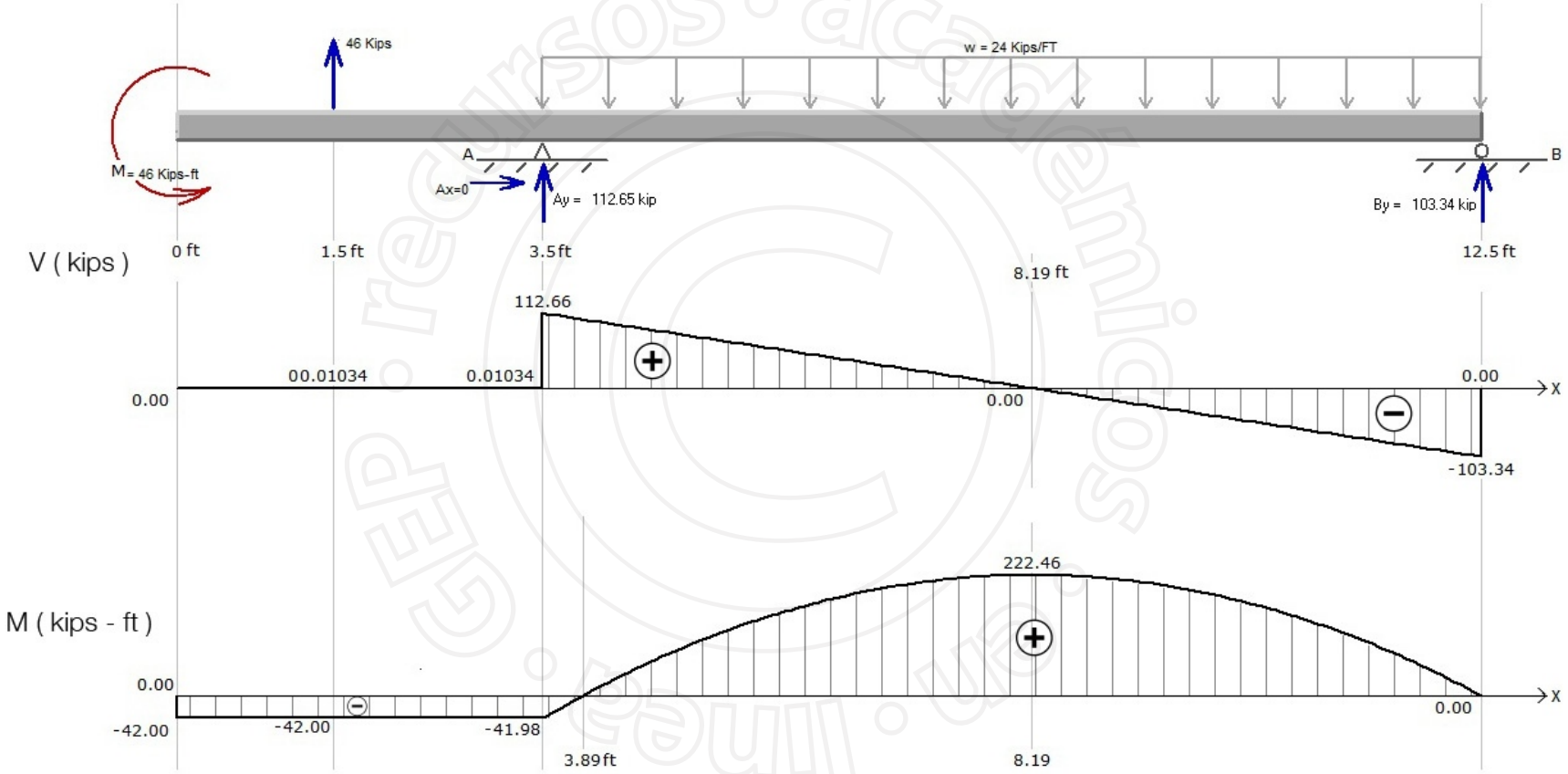
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.17



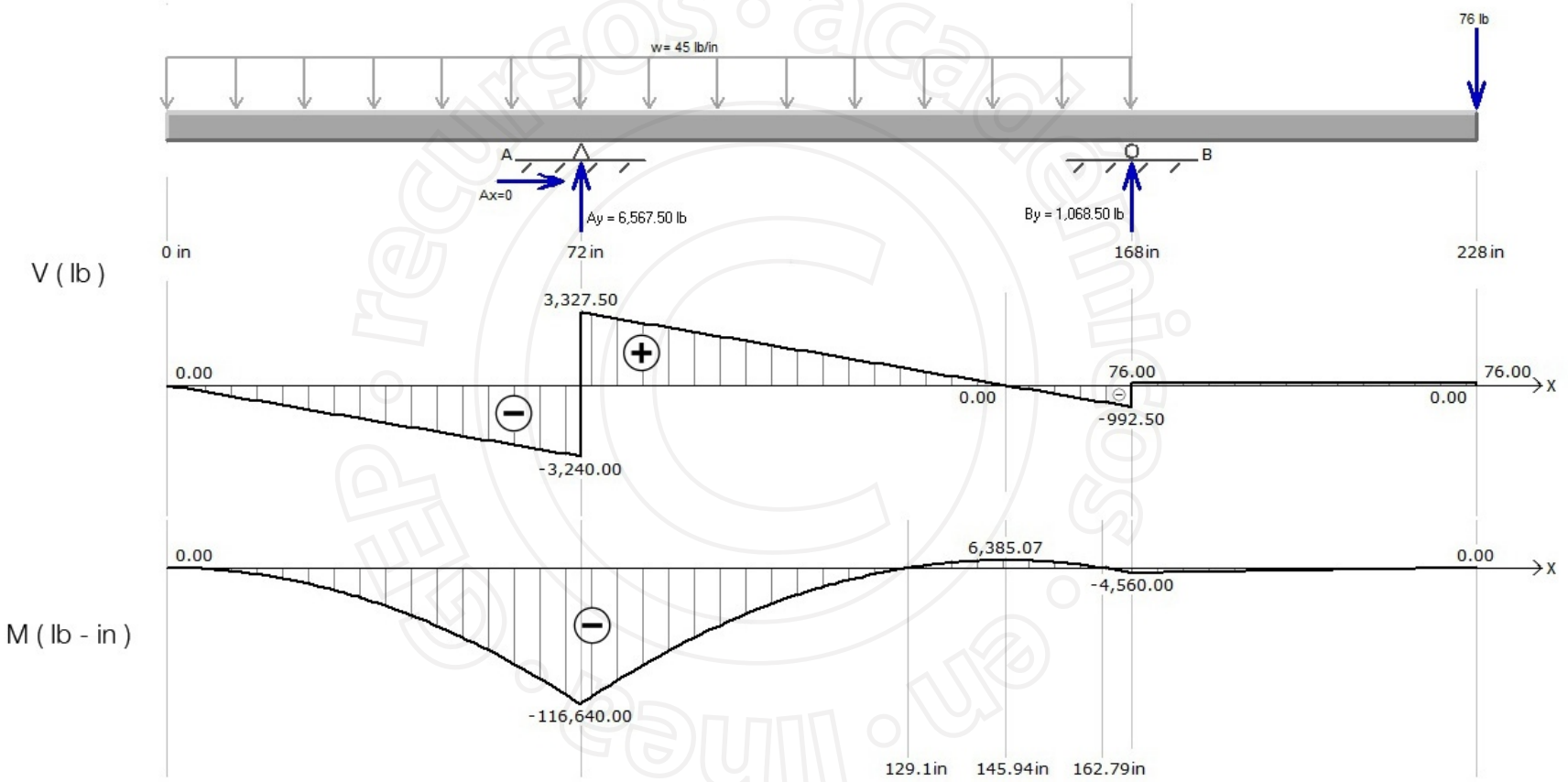
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.18



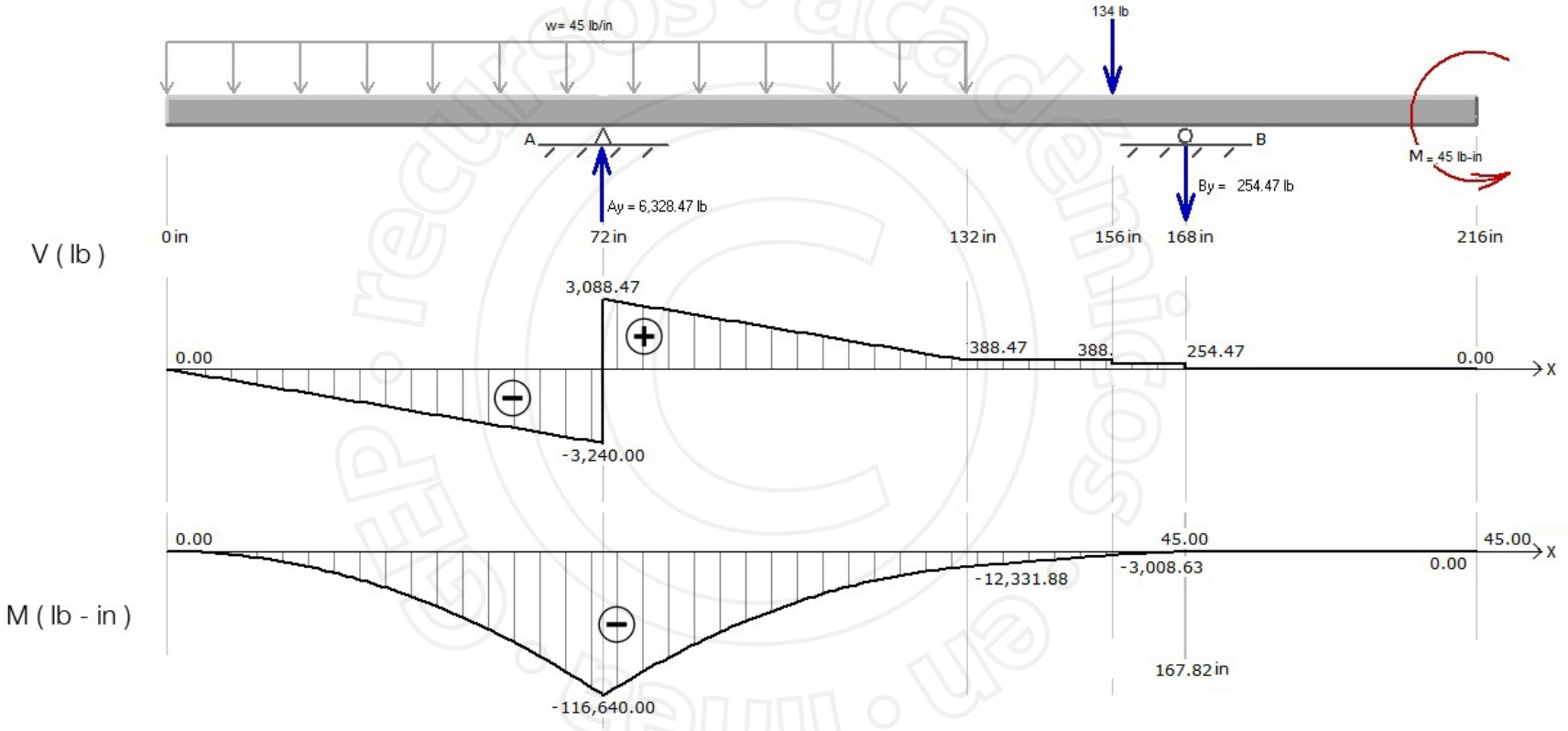
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.19



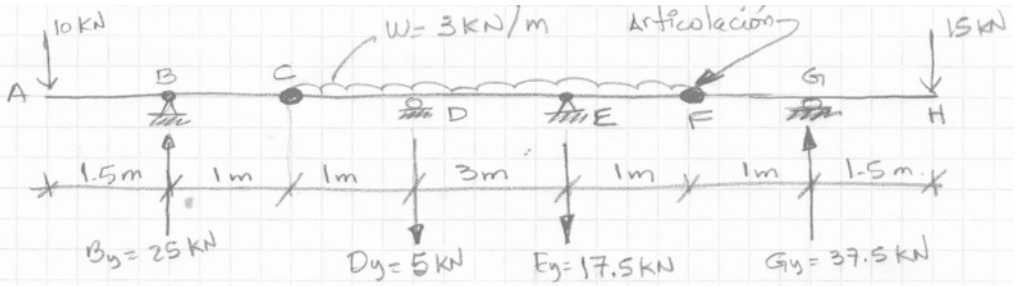
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.20



D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.21.-



$\sum M_{izq\ C} = 0 \quad +(10)(2.5) - (1)B_y = 0 \qquad B_y = 25\ kN$

$\sum M_{der\ F} = 0 \quad +(1)G_y - (15)(2.5) = 0 \qquad G_y = 37.5\ kN$

Para el tramo $\overline{CF}$ tenemos:

$\sum F_x = 0$

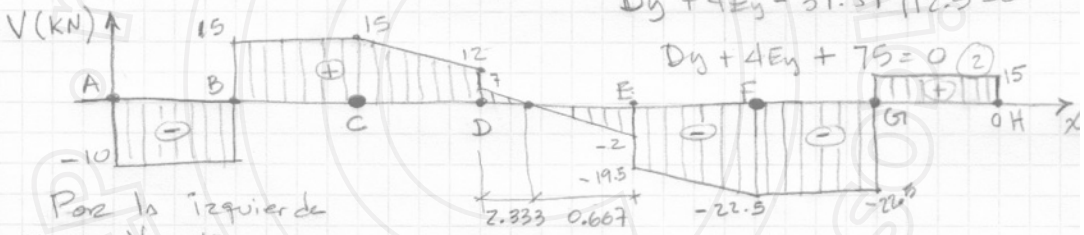
$\sum F_y = 0 \quad -(3)(5) + D_y + E_y + 15 + 22.5 = 0$

$D_y + E_y - 15 + 15 + 22.5 = 0 \qquad D_y + E_y + 22.5 = 0 \ (1)$

$\sum M_C = 0 \quad +(1)D_y + (4)E_y - (5)(3)(2.5) + (5)(22.5) = 0$

$D_y + 4E_y - 37.5 + 112.5 = 0$

$D_y + 4E_y + 75 = 0 \ (2)$



Por la izquierda

$x = 0 \quad V = -10$

$x = 1.5 \quad V = -10 + 25 = +15$

$x = 2.5 \quad V = +15$

$x = 3.5 \quad V_1 = 15 - (3)(1) = 12$

$V_2 = 12 - 5 = 7$

$x = 6.5 \quad V_1 = +7 - (3)(3) = -2$

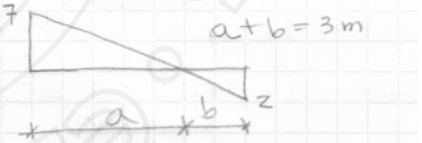
$V_2 = -2 - 17.5 = -19.5$

$x = 7.5 \quad V = -19.5 - (3)(1) = -22.5$

$x = 8.5 \quad V_1 = -22.5$

$V_2 = -22.5 + 37.5 = 15$

$x = 10 \quad V_2 = 15 - 15 = 0$



$\frac{7}{a} = \frac{z}{b}$

$\therefore a = 3 - b$

$a = 3 - 0.667$

$a = 2.333$

$7b = 2a$

$7b = 2(3-b)$

$7b = 6 - 2b$

$9b = 6$

$b = \frac{6}{9} = 0.667$

$D_y = -E_y - 22.5 \quad (1)$

$-E_y - 22.5 + 4E_y + 75 = 0 \quad (2)$

$3E_y + 52.5 = 0 \qquad E_y = -52.5/3 = -17.5\ kN$

$\therefore D_y = -(-17.5) - 22.5 = -5\ kN$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.21.- continuación

$A_1 = -(10)(1.5) = -15$

$A_2 = (15)(1) = 15$

$A_3 = \left(\frac{15+12}{2}\right)(1) = 13.5$

$A_4 = \frac{(2.333)(7)}{2} = 8.1655$

$A_5 = \frac{(0.667)(-2)}{2} = -0.6670$

$A_6 = -\left(\frac{19.5+22.5}{2}\right)(1) = -21$

$A_7 = -(22.5)(1) = -22.5$

$A_8 = +(15)(1.5) = +22.5$

$X = 0 \quad M = 0$

$X = 1.5 \quad M = -15$

$X = 2.5 \quad M = -15 + 15 = 0$

$X = 3.5 \quad M = 0 + 13.5 = 13.5$

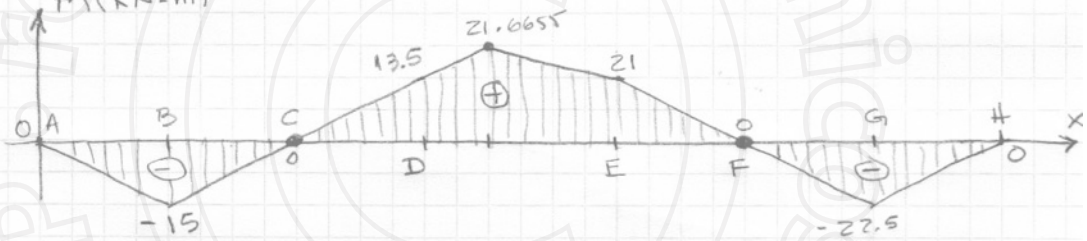
$X = 5.833 \quad M = 13.5 + 8.1655 = 21.6655$

$X = 6.5 \quad M = 21.6655 - 0.6670 = 20.9985$

$X = 7.5 \quad M = 20.9985 - 21 = 0$

$X = 8.5 \quad M = -22.5$

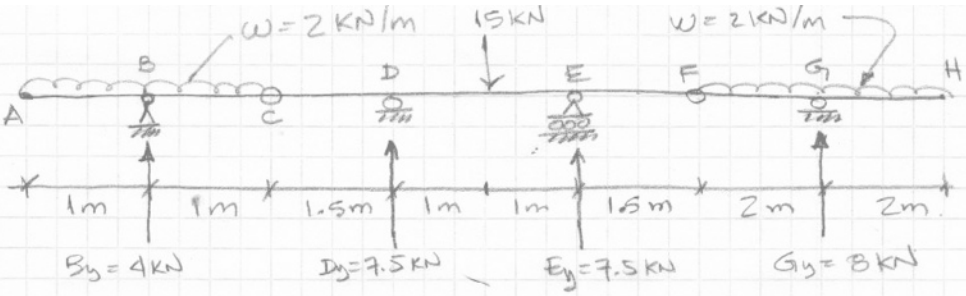
$X = 10 \quad M = -22.5 + 22.5 = 0$



Nota: como puede observarse, en los puntos donde se tiene articulación "C" y "F" el momento vale cero.

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.22.-



$\sum M_{izq\ C} = 0 \quad -(1)By + (2)(2)(1) = 0 \quad By = 4\ KN$

$\sum M_{der\ F} = 0 \quad +2Gy - (2)(4)(2) = 0 \quad Gy = \frac{16}{2} = 8\ KN$

Para el tramo C - F tenemos:

$\sum F_x = 0$

$\sum F_y = 0 \quad Dy - 15 + Ey = 0 \quad \text{—}(1)$

$\sum M_C = 0 \quad +1.5Dy - (15)(2.5) + 3.5Ey = 0$

$1.5Dy - 37.5 + 3.5Ey = 0 \quad \text{—}(2)$

$Dy = 15 - Ey$

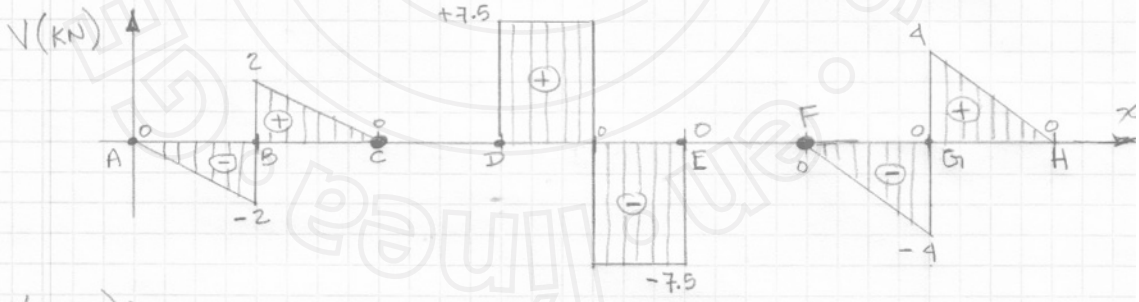
$1.5[15 - Ey] - 37.5 + 3.5Ey = 0$

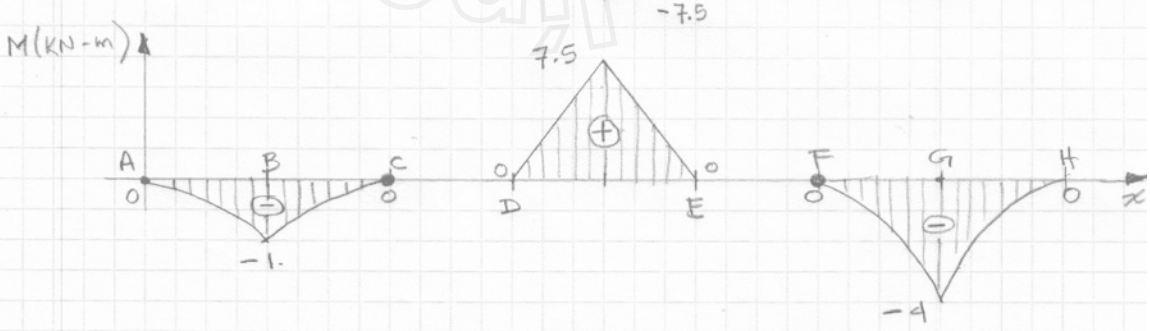
$22.5 - 1.5Ey - 37.5 + 3.5Ey = 0$

$-15 + 2Ey = 0$

$\therefore Ey = 15/2 = 7.5\ KN$

$Dy = 15 - 7.5 = 7.5\ KN$





D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.22.- continuación

$x = 0$ $V = 0$ $M = 0$

$x = 1m$ $V = -2kN$ $M = -1\ KN-m$
$V = -2+4 = 2kN$

$x = 2m$ $V = 2-2 = 0$ $M = -1+1 = 0$

$x = 3.5m$ $V = D_y = 7.5kN$ $M = 0$

$x = 4.5m$ $V = 7.5$ $M = (7.5)(1) = 7.5\ KN-m$
$V = 7.5-15 = -7.5$

$x = 5.5m$ $V = -7.5$
$V = -7.5+7.5 = 0$ $M = (7.5)(2)-(15)(1) = 0\ KN-m$

$x = 7.0\ m$ $V = 0$ $M = 0$

$x = 9.0m$ $V = (-2)(2) = -4\ KN-m$ $M = (-2)(2)(1) = -4\ KN-m$
$V = -4+8 = 4\ KN-m$

$x = 11.0m$ $V = 4-(2)(2) = 0$ $M = 0$

$$A_1 = \frac{(1)(-2)}{2} = -1$$

$$A_2 = \frac{(2)(1)}{2} = 1$$

$$A_3 = (7.5)(1) = 7.5$$

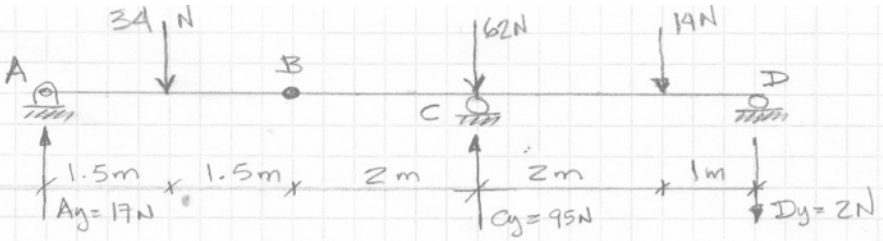
$$A_4 = (-7.5)(1) = -7.5$$

$$A_5 = \frac{(2)(-4)}{2} = -4$$

$$A_6 = \frac{(2)(4)}{2} = 4$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.23.-



$\Sigma M_{izq\ B} = 0 \qquad 3A_y - (34)(1.5) = 0$

$$A_y = \frac{51}{3} = 17\ N \quad \text{—— (1)}$$

$\Sigma M_{der\ B} = 0 \qquad -(62)(2) - (14)(4) + 2C_y + 5D_y = 0$

$-124 - 56 + 2C_y + 5D_y = 0$ —— (2)

$\Sigma F_y = 0 \qquad A_y - 34 + C_y - 62 - 14 + D_y = 0$

$+17 - 34 + C_y - 62 - 14 + D_y = 0$

$-93 + C_y + D_y = 0$ —— (3)

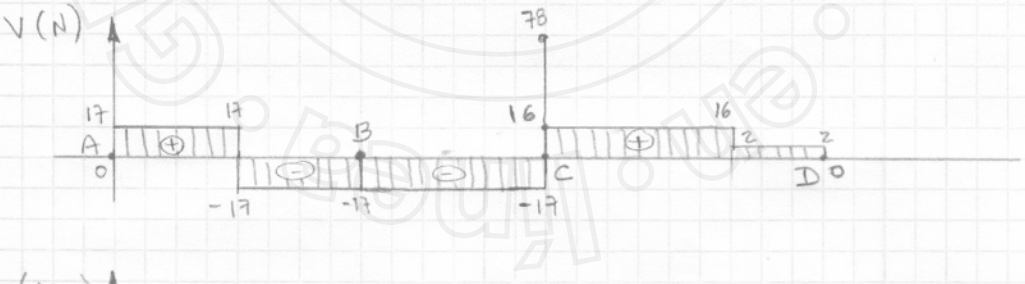
$D_y = 93 - C_y$ si sustituimos este valor en (2) tenemos:

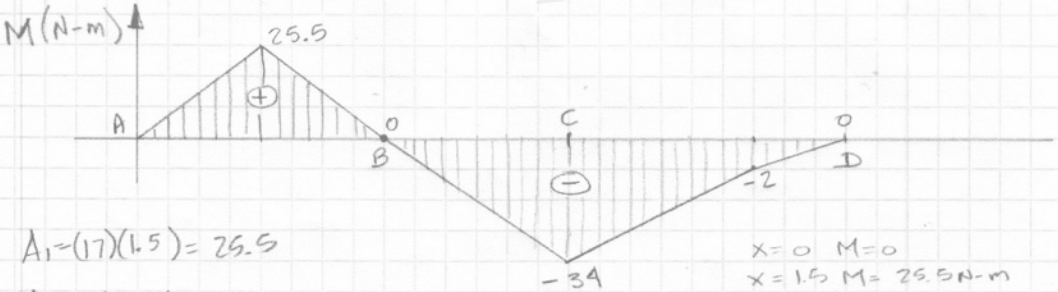
$-124 - 56 + 2C_y + 5[+93 - C_y] = 0$

$-180 + 2C_y + 465 - 5C_y = 0$

$285 - 3C_y = 0 \qquad C_y = \frac{285}{3} = 95\ N$

$D_y = 93 - 95 = -2N$





$A_1 = (17)(1.5) = 25.5$

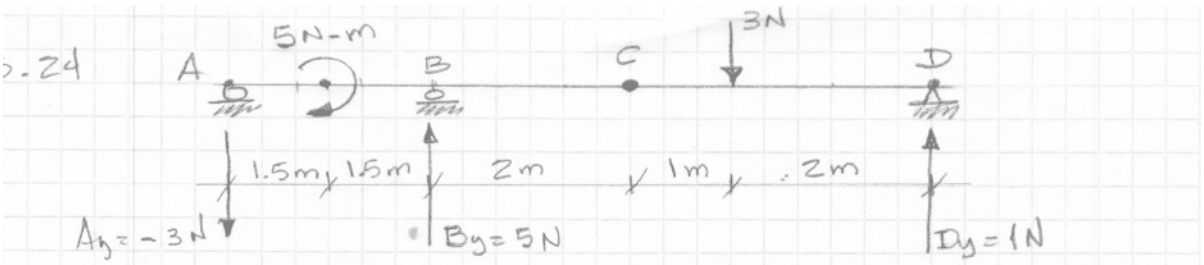
$A_2 = (-17)(1.5) = -25.5$

$A_3 = (-17)(2) = -34.0$

$A_4 = (16)(2) = 32.0 \qquad A_5 = (2)(1) = 2$

$x = 0 \quad M = 0$
$x = 1.5 \quad M = 25.5\ N\text{-}m$
$x = 3 \quad M = 25.5 - 25.5 = 0\ N\text{-}m$
$x = 5 \quad M = -34\ N\text{-}m$
$x = 7 \quad M = -34 + 32 = -2\ N\text{-}m$
$x = 8 \quad M = -2 + 2 = 0\ N\text{-}m$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.



$\sum M_{izq\,C} = 0 \quad -5Ay - 2By - 5 = 0 \quad -\frac{2}{5}By - 1 = Ay$

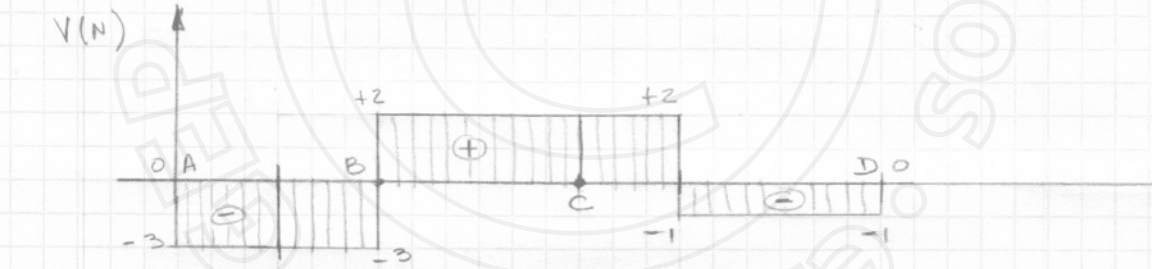
$\sum M_{der\,C} = 0 \quad -(3)(1) + 3Dy = 0 \quad Dy = \frac{3}{3} = 1N$

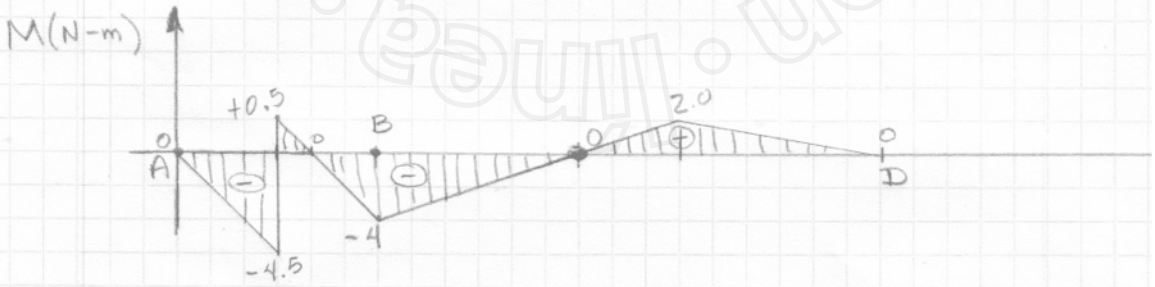
$\sum Fy = 0 \quad Ay + By - 3 + Dy = 0 \quad Ay + By - 3 + 1 = 0$

$Ay + By - 2 = 0 \quad \left(-\frac{2}{5}By - 1\right) + \frac{5}{5}By - 2 = 0$

$\frac{3}{5}By - 3 = 0$

$By = \frac{3 \times 5}{3} = 5N \quad Ay = -\frac{2(5)}{5} - 1 = -3N$





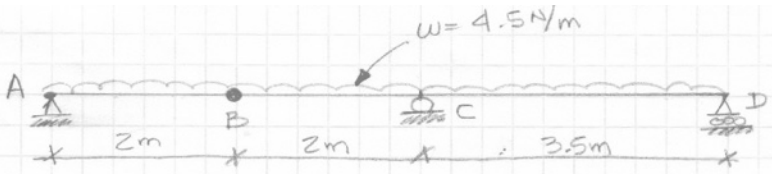
$A_1 = (-3)(1.5) = -4.5$
$A_2 = (-3)(1.5) = -4.5$
$A_3 = (2)(2) = 4.0$
$A_4 = (2)(1) = 2.0$
$A_5 = (-1)(2) = -2$

$x = 0 \quad M = 0$
$x = 1.5m \quad M = -4.5\ N-m$
$M = -4.5 + 5 = +0.5\ N-m$
$x = 3m \quad M = +0.5 - 4.5 = -4\ N-m$

$x = 5m \quad M = -4 + 4 = 0\ N-m$
$x = 6m \quad M = 0 + 2 = 2\ N-m$
$x = 8m \quad M = +2 - 2 = 0\ N-m$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.25.-



$\Sigma M_{izq\ B}=0 \quad -2A_y + (4.5)(2)(1)=0 \quad A_y = \frac{9.0}{2} = 4.5N$

$\Sigma M_{der\ B} = +2C_y + 5.5D_y - (4.5)(5.5)(2.75)=0$

$2C_y + 5.5D_y - 68.0625=0$

$\Sigma F_y=0 \quad A_y + C_y + D_y - (4.5)(7.5)=0$

$4.5 + C_y + D_y - 33.75=0 \quad C_y + D_y - 29.25=0$

$C_y = 29.25 - D_y$

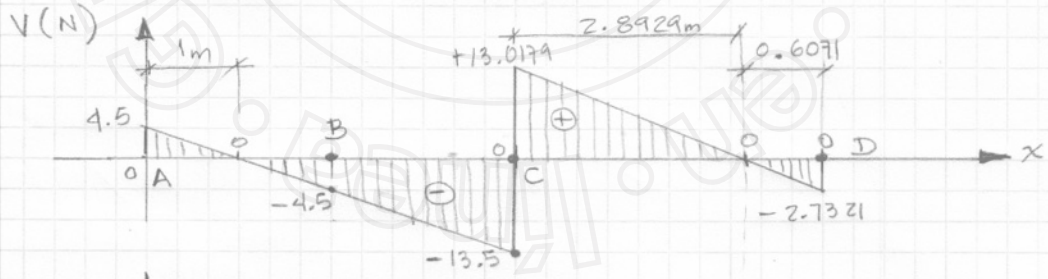
$2[29.25 - D_y] + 5.5D_y - 68.0625=0$

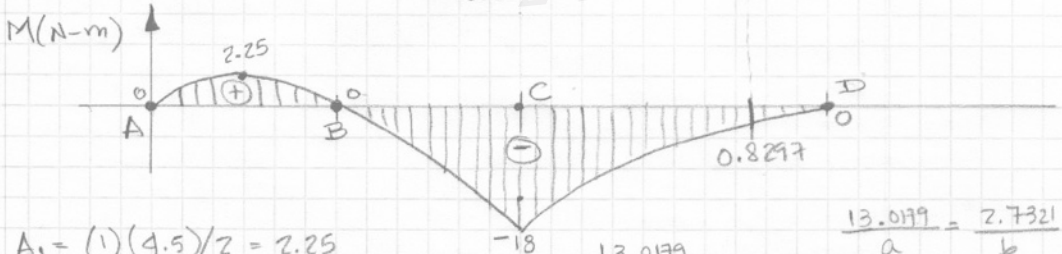
$58.50 - 2D_y + 5.5D_y - 68.0625=0$

$3.5D_y = 68.0625 - 58.50$

$D_y = \frac{9.5625}{3.5} = 2.7321N$

$C_y = 29.25 - 2.7321 = 26.5179N$



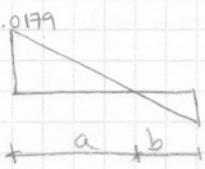


$A_1 = (1)(4.5)/2 = 2.25$

$A_2 = (3)(-13.5)/2 = -20.25$

$A_3 = (2.8929)(13.0179)/2 = 18.8297$

$A_4 = (0.6071)(-2.7321)/2 = -0.8293$



$\frac{13.0179}{a} = \frac{2.7321}{b}$

$13.0179b = 2.7321a$

$a+b = 3.5m \quad a = 3.5 - b$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.25 continuación

$$13.0179\,b = 2.7321\,(3.5-b)$$
$$13.0179\,b = 9.5624 - 2.7321\,b$$
$$13.0179\,b + 2.7321\,b = 9.5624$$
$$15.75\,b = 9.5624$$

$$b = \frac{9.5624}{15.75} = 0.6071\ m \qquad a = 3.5 - 0.6071 = 2.8929\ m$$

$x = 0\ m \quad M = 0$

$x = 1\ m \quad M = 2.25\ N\text{-}m$

$x = 2\ m \quad M_B = 0$

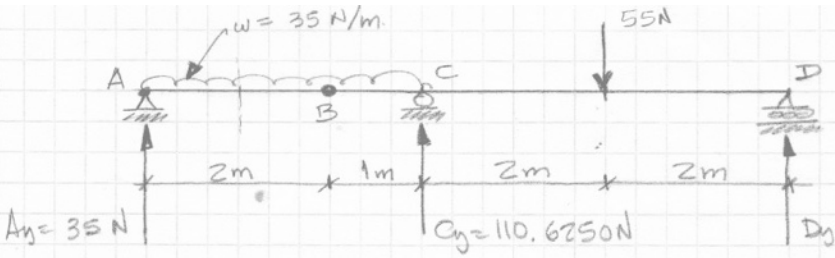
$x = 4\ m \quad M = 2.25 - 20.25 = -18\ N\text{-}m$

$x = 6.8929\ m \quad M = -18 + 18.8297 = 0.8297\ N\text{-}m$

$x = 7.5\ m \quad M = 0.8297 - 0.8293 = 0\ N\text{-}m$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.26.-



$\Sigma M_{izq\ B} = 0 \quad -2A_y + (35)(2)(1) = 0 \quad 2A_y = 70 \quad A_y = 70/2 = \underline{35\ N}$

$\Sigma M_{der\ B} = 0 \quad +1C_y - (55)(3) + 5D_y - (35)(1)(0.5) = 0$

$C_y - 165 + 5D_y - 17.5 = 0$

$C_y + 5D_y - 182.5 = 0 \quad \text{---} \quad (1)$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y + C_y + D_y - 55 - (35)(3) = 0$

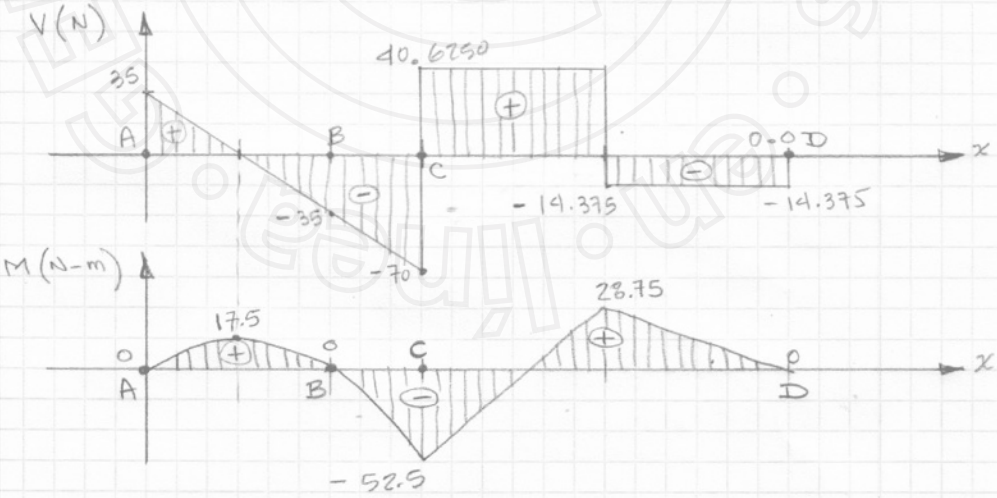
$35 + C_y + D_y - 55 - 105 = 0 \quad C_y + D_y - 125 = 0 \quad (2)$

De (1) despejamos C_y y sustituimos en (2)

$C_y = 182.5 - 5D_y \qquad 182.5 - 5D_y + D_y - 125 = 0$

$\therefore D_y = \frac{57.5}{4} = \underline{14.375\ N} \qquad 57.5 = 4D_y$

$C_y = 182.5 - (5)(14.375) = \underline{110.6250\ N}$



$A_1 = (35)(1)/2 = 17.5$

$A_2 = (70)(2)/2 = -70$

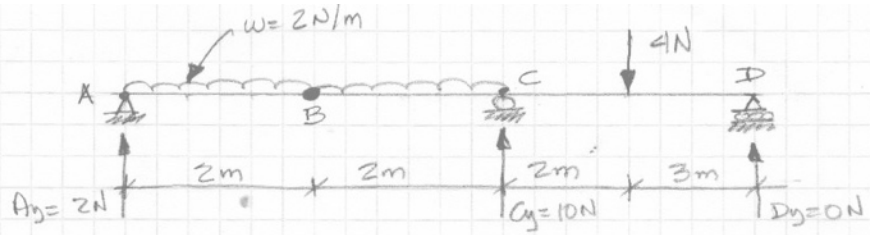
$A_3 = (40.6250)(2) = 81.25$

$A_4 = (-14.375)(2) = -28.75$

$x = 0 \quad M = 0$
$x = 1m \quad M = 17.5\ N\text{-}m$
$x = 2m \quad M_B = 0$
$x = 3m \quad M = 17.5 - 70 = -52.5\ N\text{-}m$
$x = 5m \quad M = -52.5 + 81.25 = 28.75\ N\text{-}m$
$x = 7m \quad M = 28.75 - 28.75 = 0\ N\text{-}m$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.27.-



$\Sigma M_{izq\ B}=0 \quad -2A_y + (2)(2)(1) = 0 \quad 2A_y = +4 \quad A_y = 4/2 = \underline{2N}$

$\Sigma M_{der\ B}=0 \quad +2C_y - (4)(4) + 7D_y - (2)(2)(1) = 0$

$2C_y - 16 + 7D_y - 4 = 0$

$2C_y + 7D_y - 20 = 0$

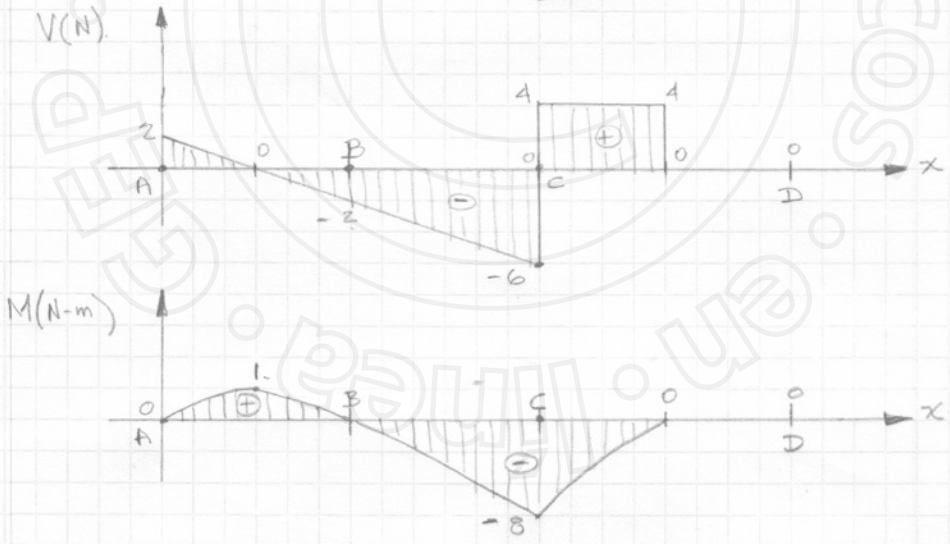
$\Sigma F_y = 0 \quad A_y + C_y + D_y - 4 - (2)(4) = 0$

$2 + C_y + D_y - 4 - 8 = 0$

$C_y = 10 - D_y \qquad C_y = 10 - 0 = \underline{10N}$

$2[10 - D_y] + 7D_y - 20 = 0 \qquad 20 - 2D_y + 7D_y - 20 = 0$

$5D_y = 0 \quad \therefore \quad \underline{D_y = 0}$



$A_1 = (2)(1)/2 = 1$

$A_2 = (3)(-6)/2 = -9$

$A_3 = (2)(4) = 8$

$X = 0 \quad M = 0\ N\text{-}m$

$X = 1m \quad M = 1\ N\text{-}m$

$X = 2m \quad M_B = 0\ N\text{-}m$

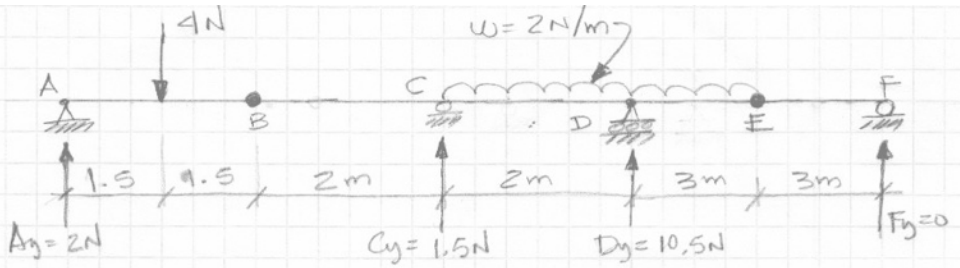
$X = 4m \quad M = 1 - 9 = -8\ N\text{-}m$

$X = 6m \quad M = -8 + 8 = 0\ N\text{-}m$

$X = 9m \quad M = 0\ N\text{-}m$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

28



$\Sigma M_{izq\ B} = 0 \quad -3A_y + (4)(1.5) = 0 \quad 6 = 3A_y \quad A_y = 6/3 = \underline{2N}$

$\Sigma M_{der\ E} = 0 \quad +3F_y = 0 \quad F_y = 0$

$\Sigma M_{der\ B} = 0 \quad +2C_y + 4D_y + 10F_y - (2)(5)(4.5) = 0$

$2C_y + 4D_y - 45 = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 4 + C_y + D_y + F_y - (2)(5) = 0$

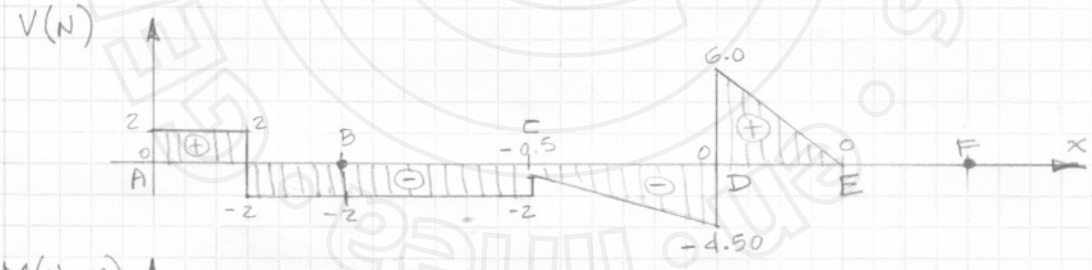
$2 - 4 + C_y + D_y - 10 = 0 \quad C_y + D_y - 12 = 0$

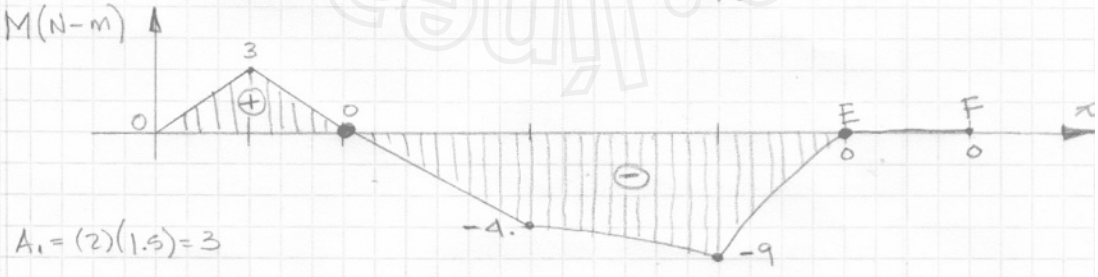
$C_y = 12 - D_y \quad C_y = 12 - 10.5 = \underline{1.5N}$

$2[12 - D_y] + 4D_y - 45 = 0$

$24 - 2D_y + 4D_y - 45 = 0 \quad 2D_y - 21 = 0$

$D_y = 21/2 = \underline{10.5N}$





$A_1 = (2)(1.5) = 3$

$A_2 = (-2)(1.5) = -3$

$A_3 = (-2)(2) = -4$

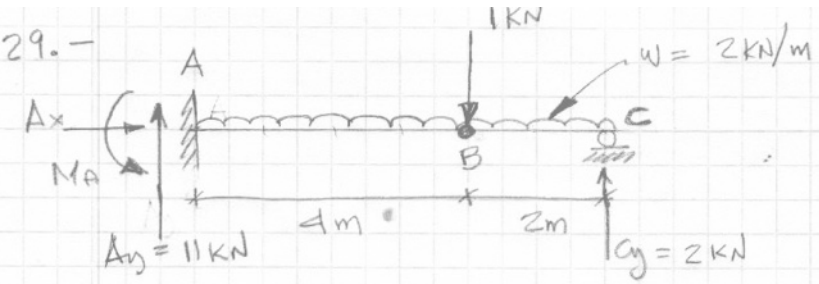
$A_4 = -\left(\frac{0.5+4.5}{2}\right)(2) = -5$

$A_5 = (6)(3)/2 = 9$

$X = 0$	$M = 0$
$X = 1.5\ m$	$M = 3\ N\text{-}m$
$X = 3.0\ m$	$M_B = 3 - 3 = 0$
$X = 5.0\ m$	$M = -4\ N\text{-}m$
$X = 7.0\ m$	$M = -4 - 5 = -9\ N\text{-}m$
$X = 10.0\ m$	$M = -9 + 9 = 0\ N\text{-}m$
$X = 13.0\ m$	$M = 0$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.29.-



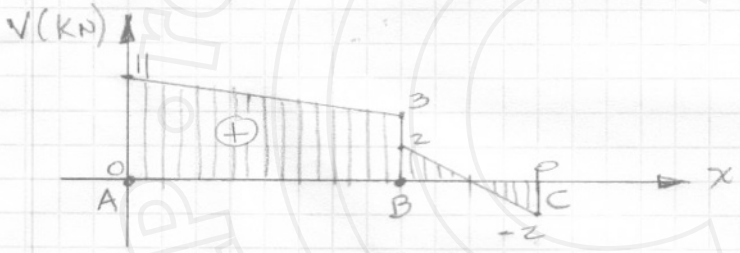
$\sum M_{der\ B} = 0 \quad 2C_y - (2)(2)(1) = 0 \quad 2C_y = 4 \quad C_y = 4/2 = \underline{2\ KN}$

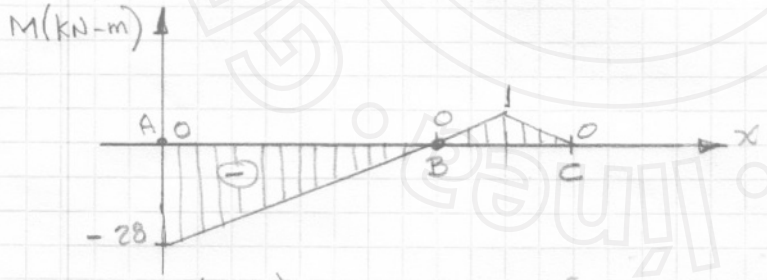
$\sum F_y = 0 \quad A_y - 1 + C_y - (2)(6) = 0 \quad A_y = +1 - 2 + 12 = \underline{11\ KN}$

$\sum F_x = 0 \quad A_x = 0$

$\sum M_{izq\ B} = 0 \quad +M_a - (11)(4) + (2)(4)(2) = 0$

$M_a - 44 + 16 = 0 \quad M_a = 44 - 16 = \underline{28\ KN\text{-}m}$





$A_1 = \left(\frac{11+3}{2}\right)(4) = 28$

$A_2 = \frac{(1)(2)}{2} = 1$

$A_3 = \frac{(-2)(1)}{2} = -1$

$x = 0 \quad M = M_A = -28\ KN\text{-}m$

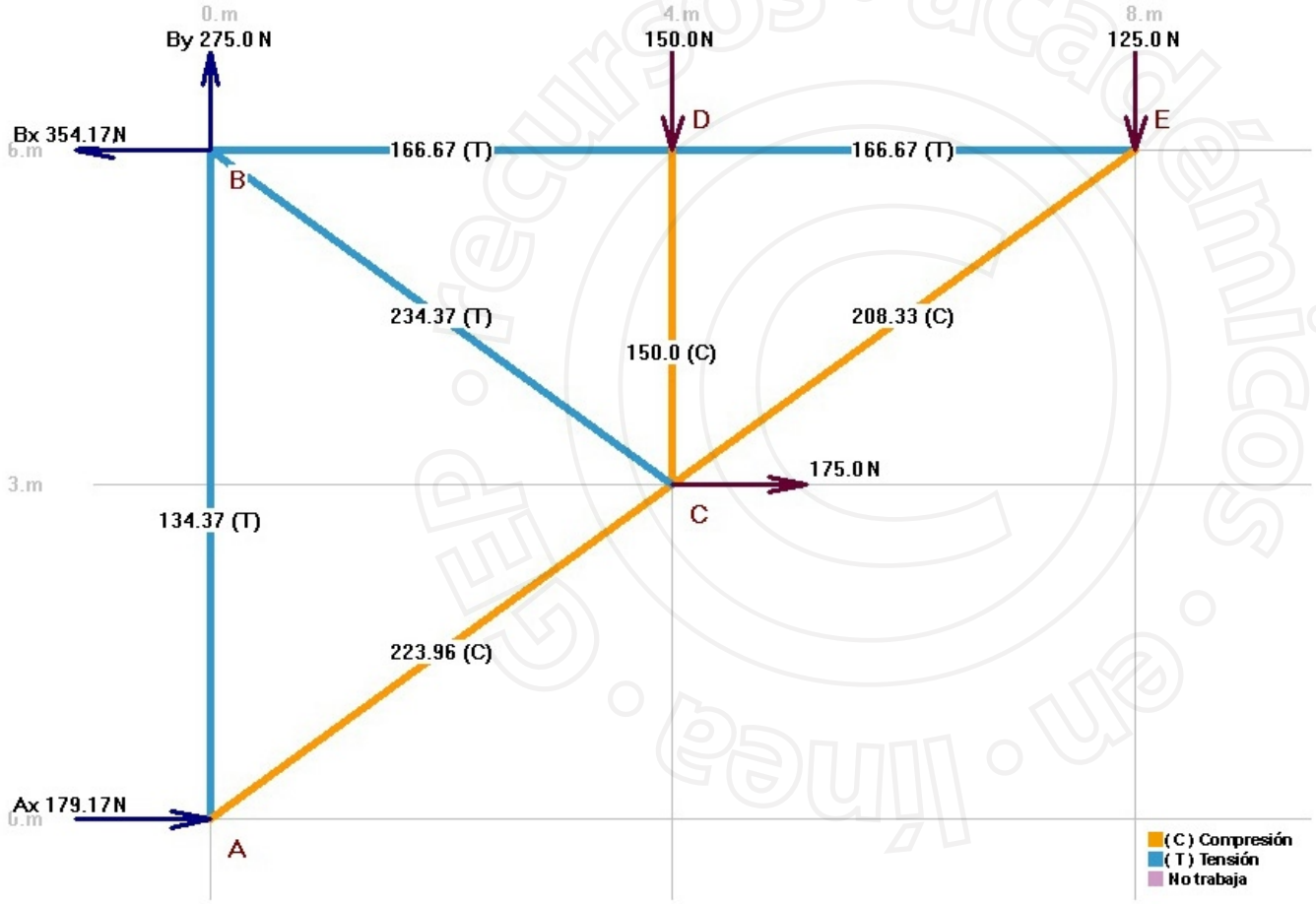
$x = 4m \quad M = -28 + 28 = 0$

$x = 5m \quad M = 1\ KN\text{-}m$

$x = 6m \quad M = 1 - 1 = 0$

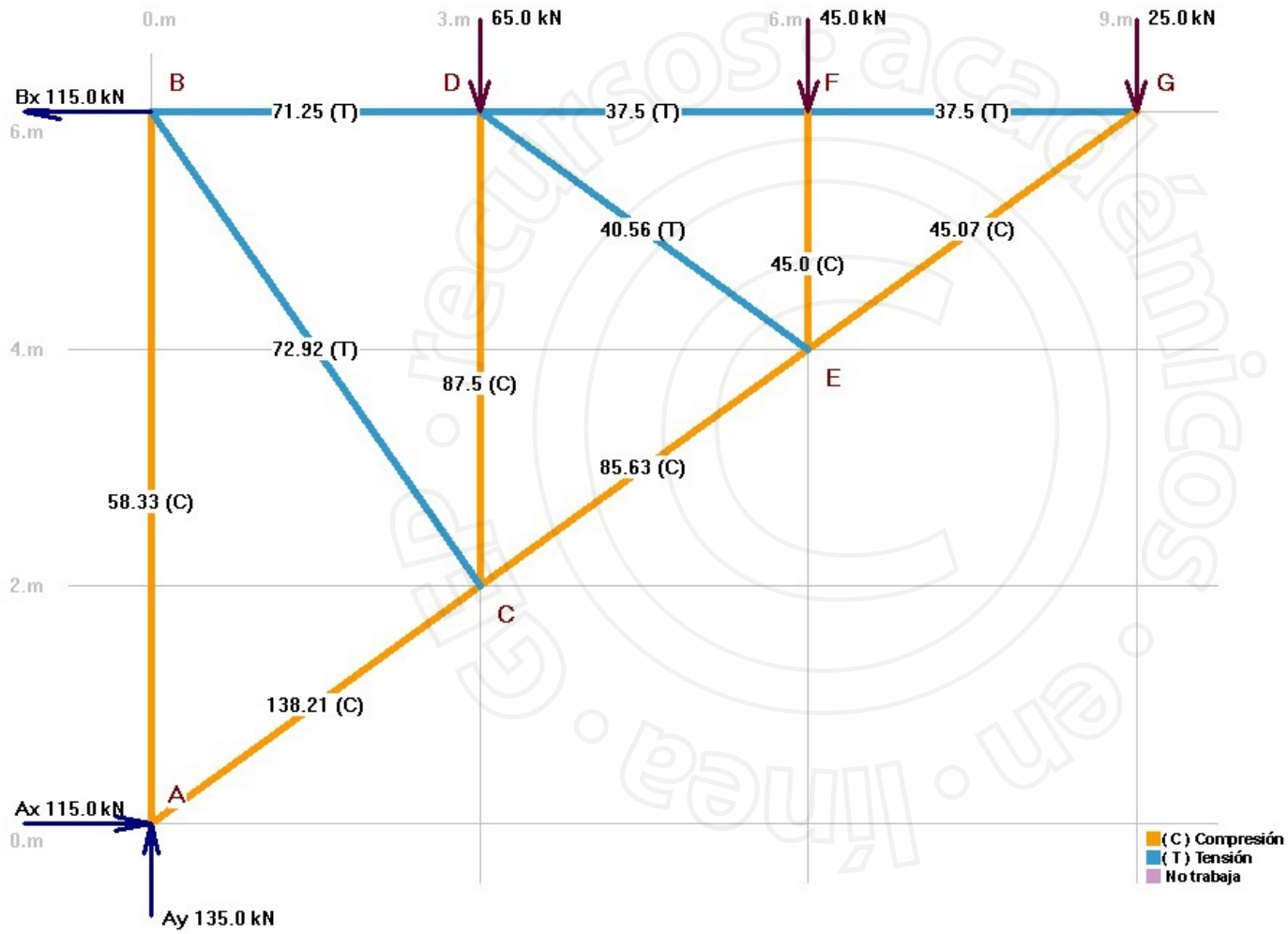
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.30



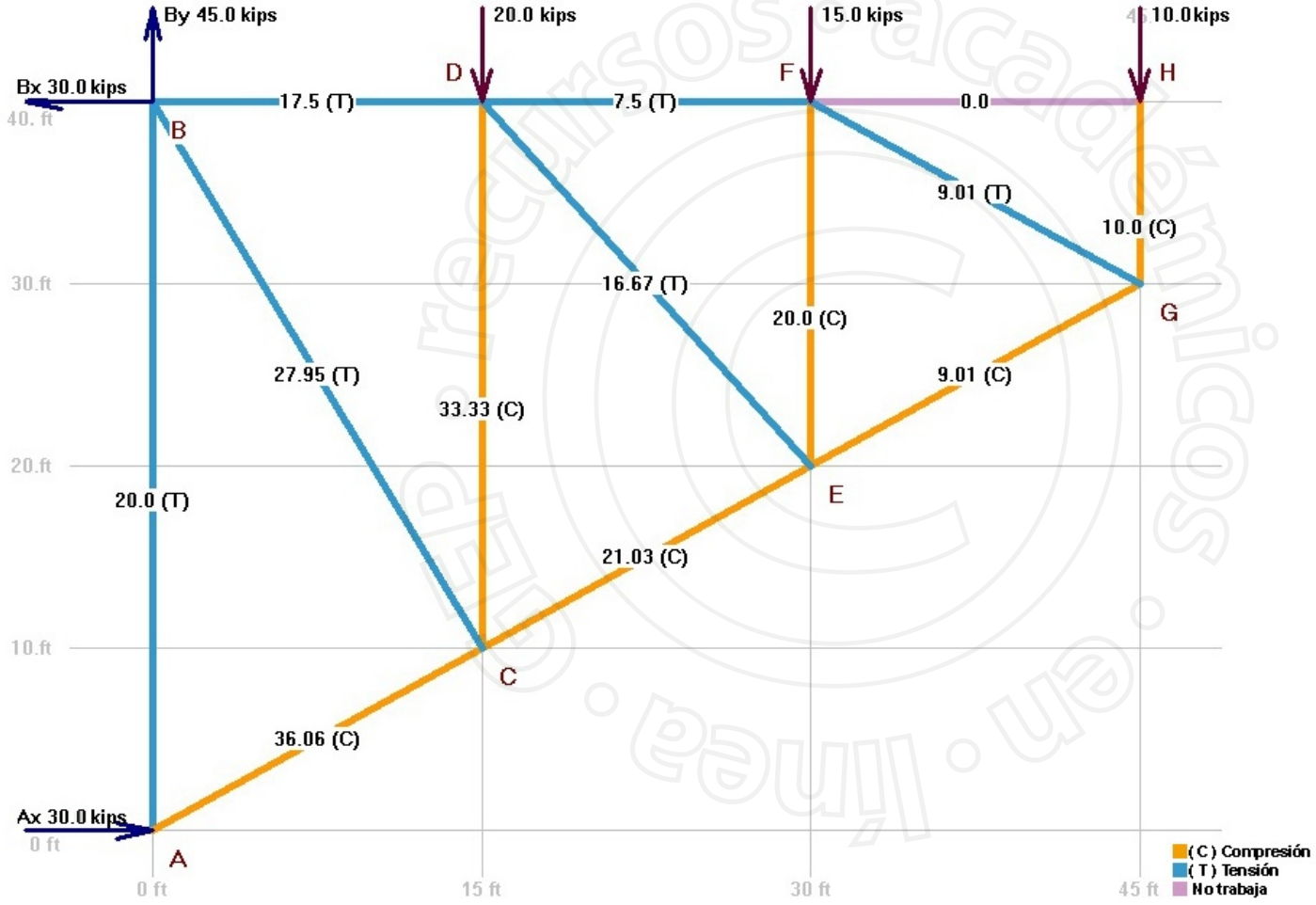
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.31



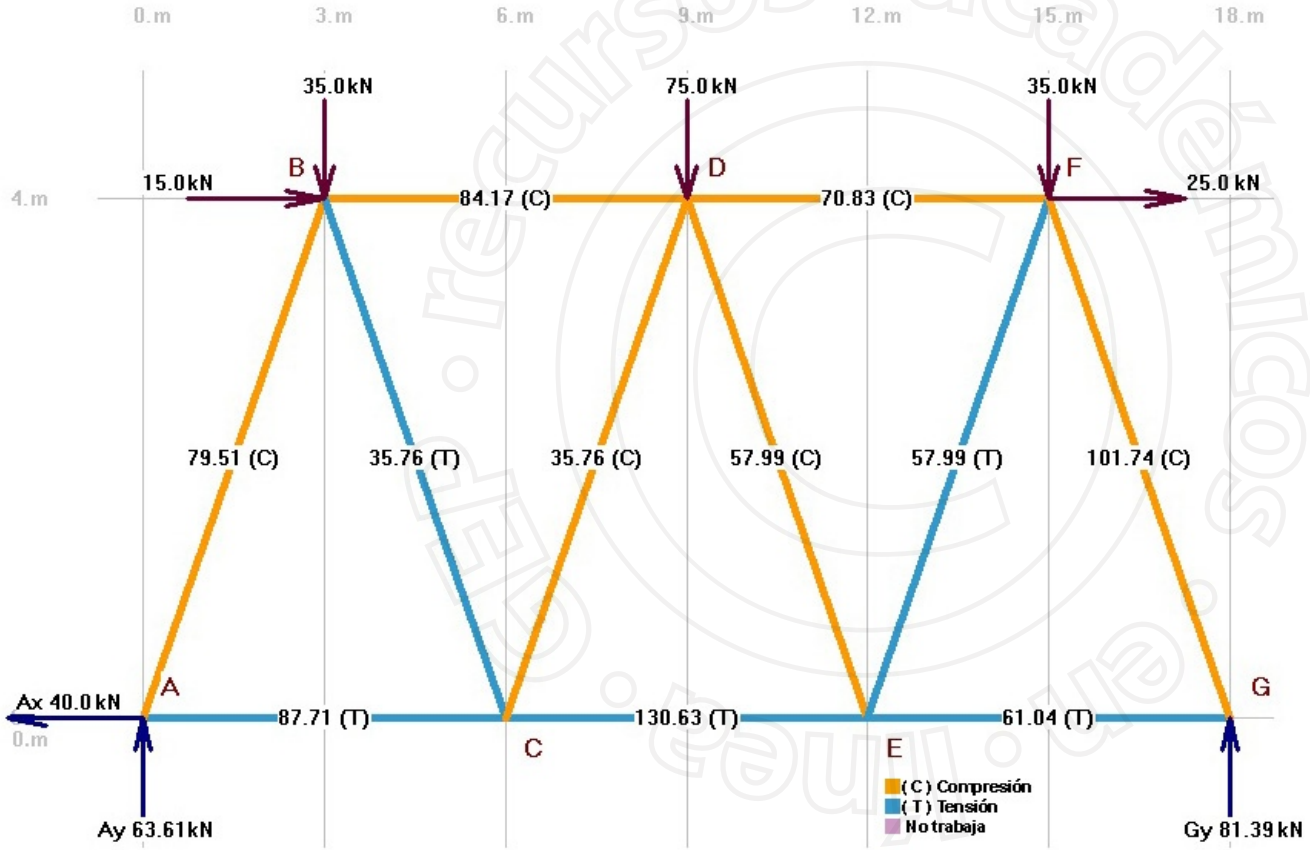
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.32



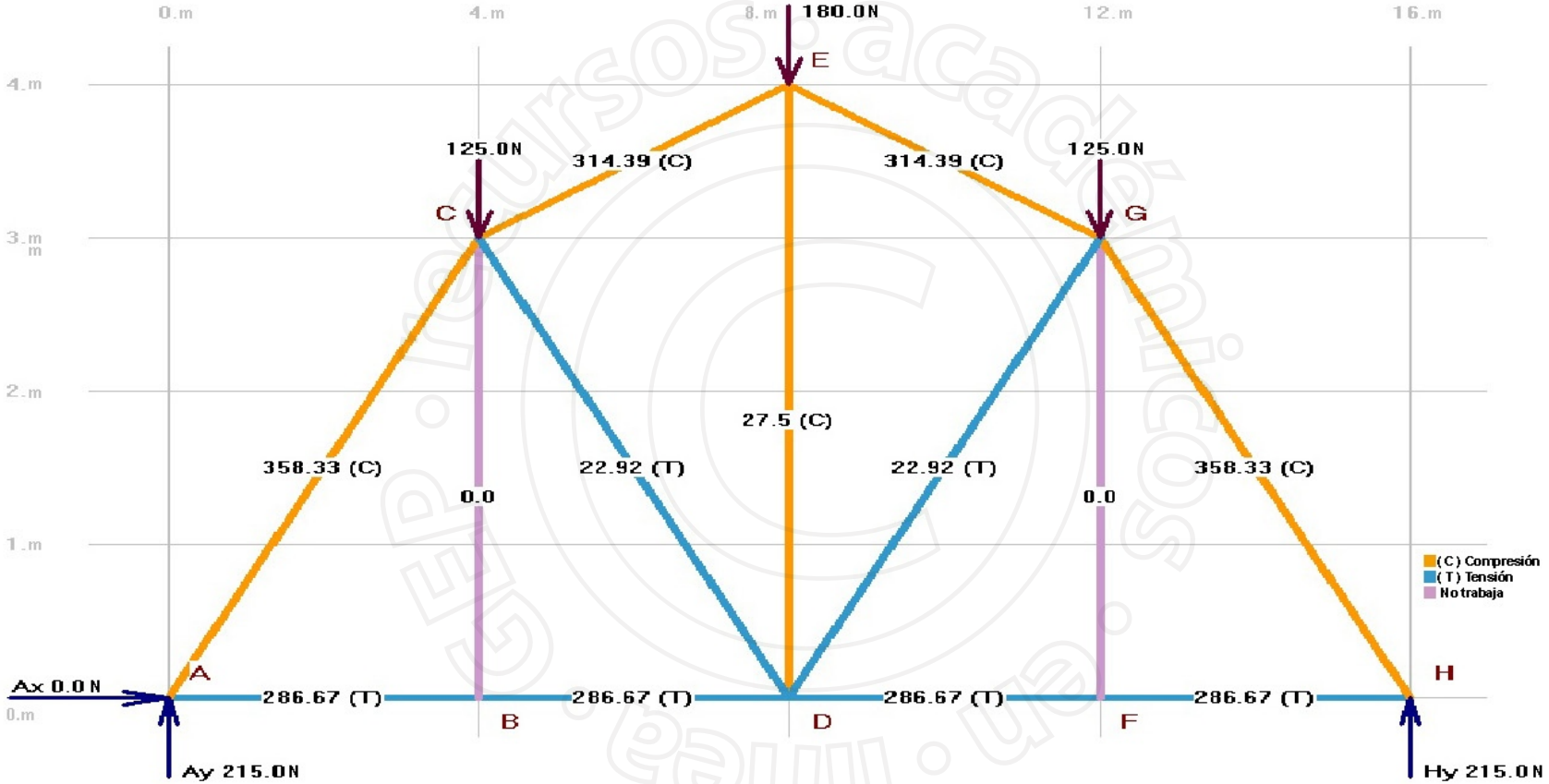
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.33



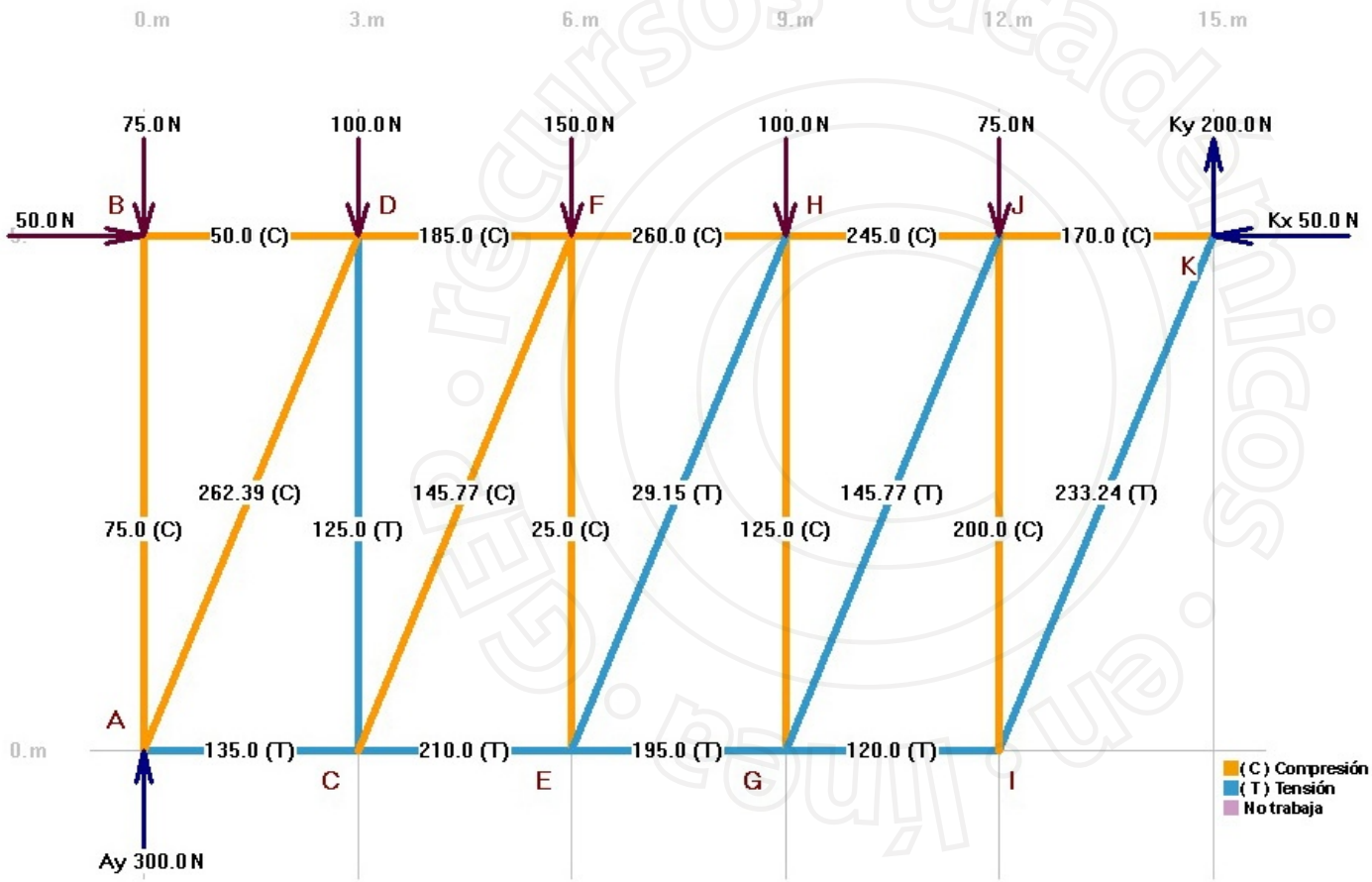
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.34



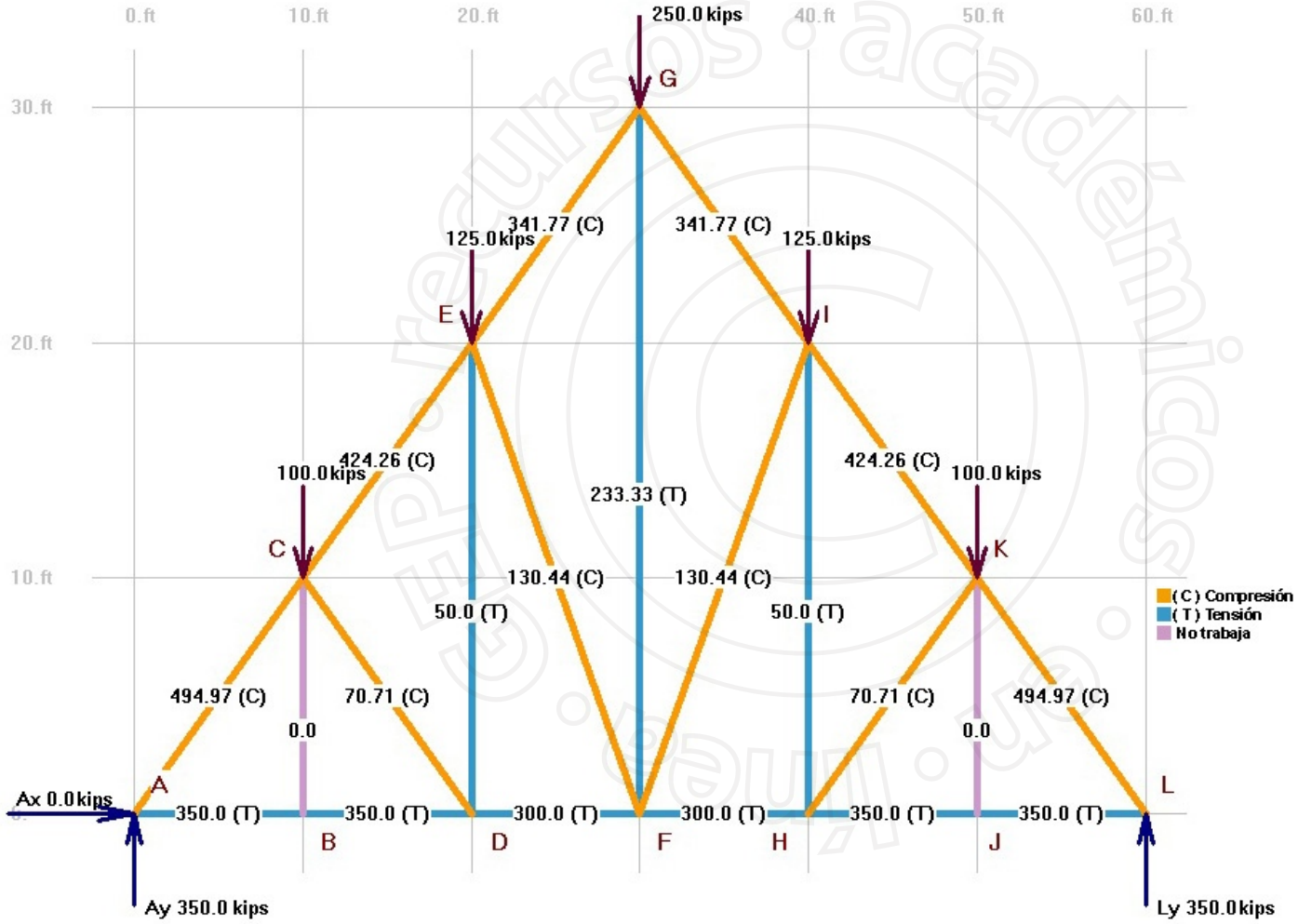
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.35



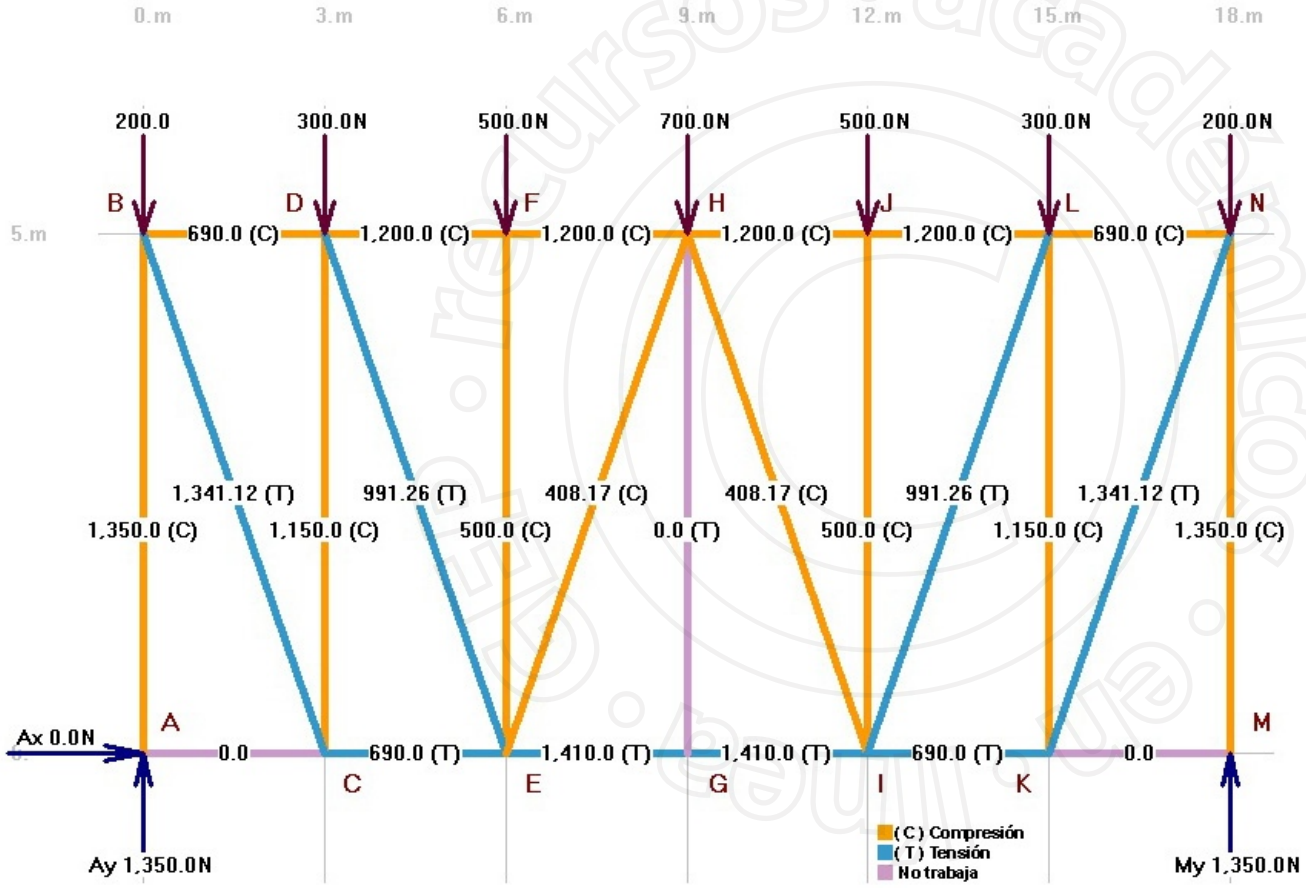
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.36



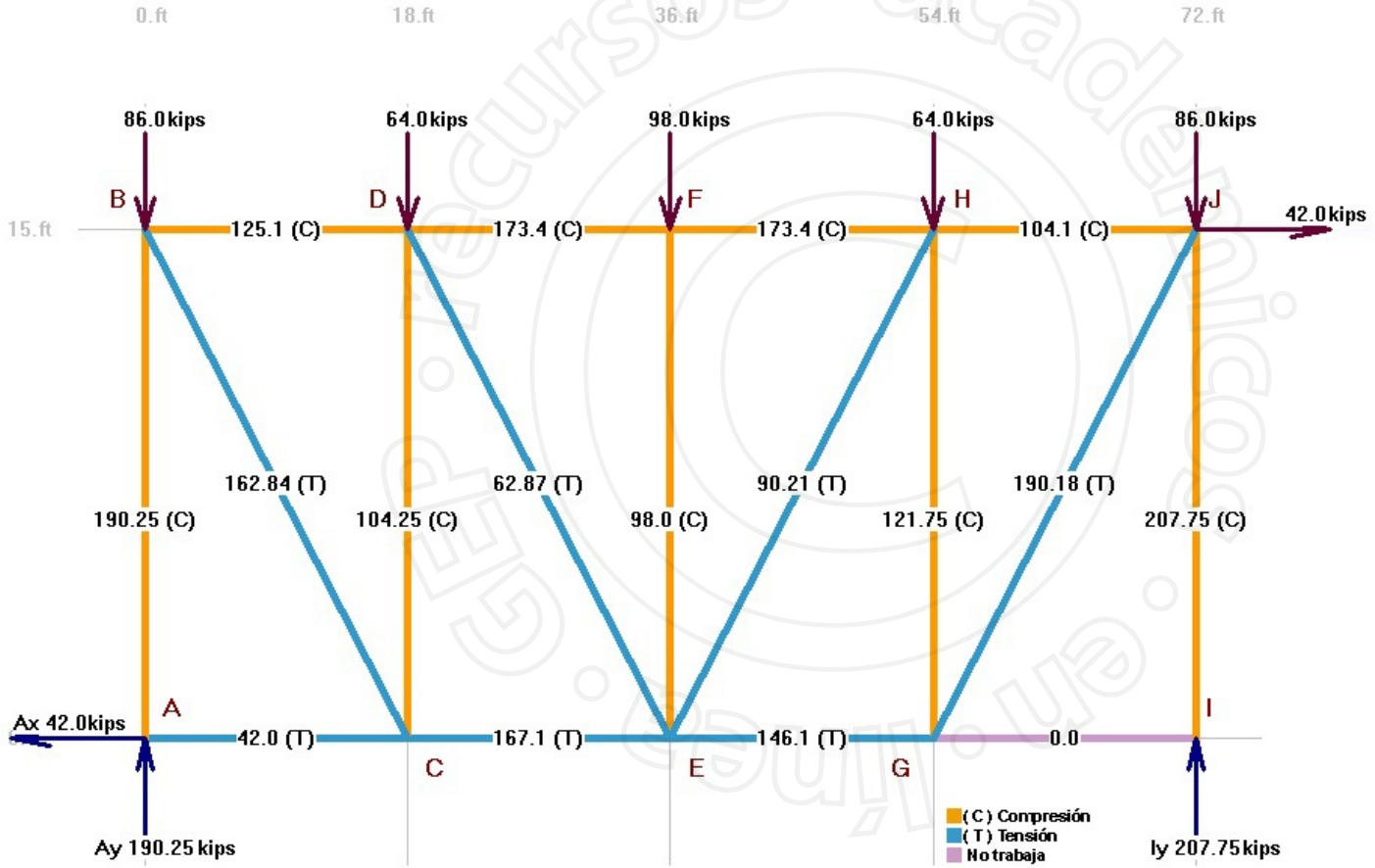
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.37



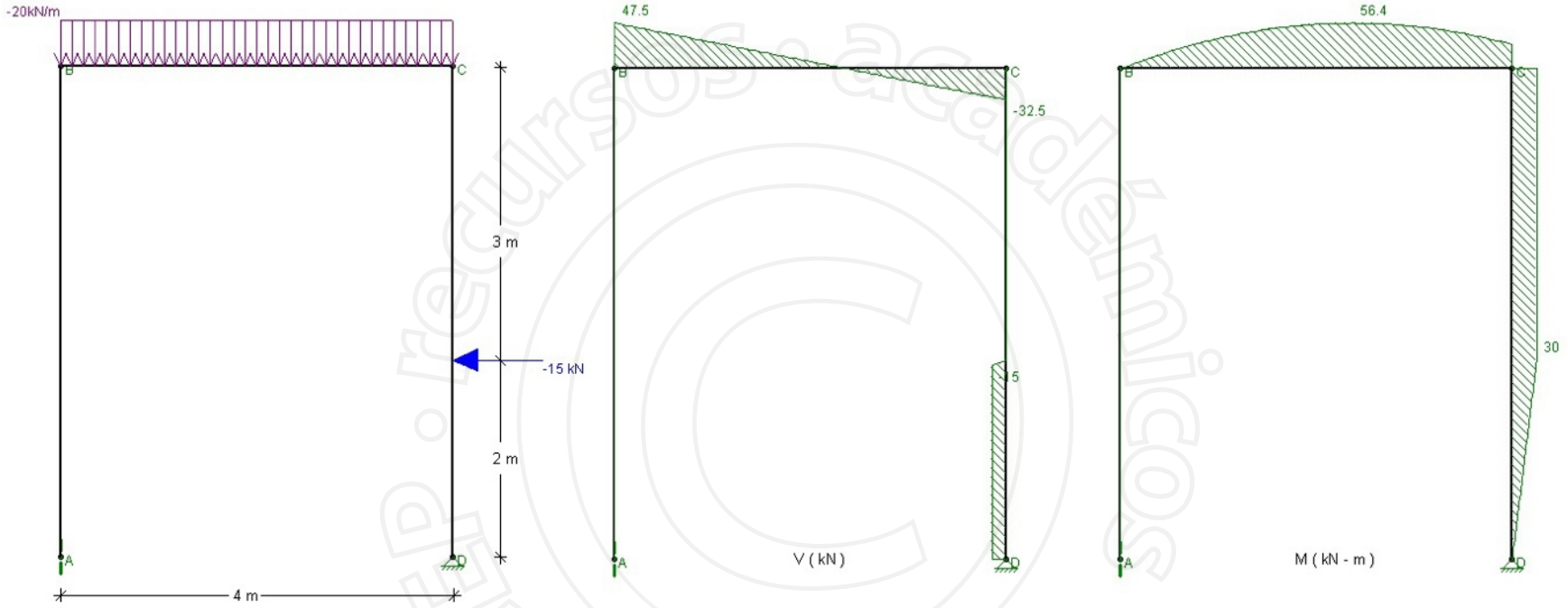
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.38



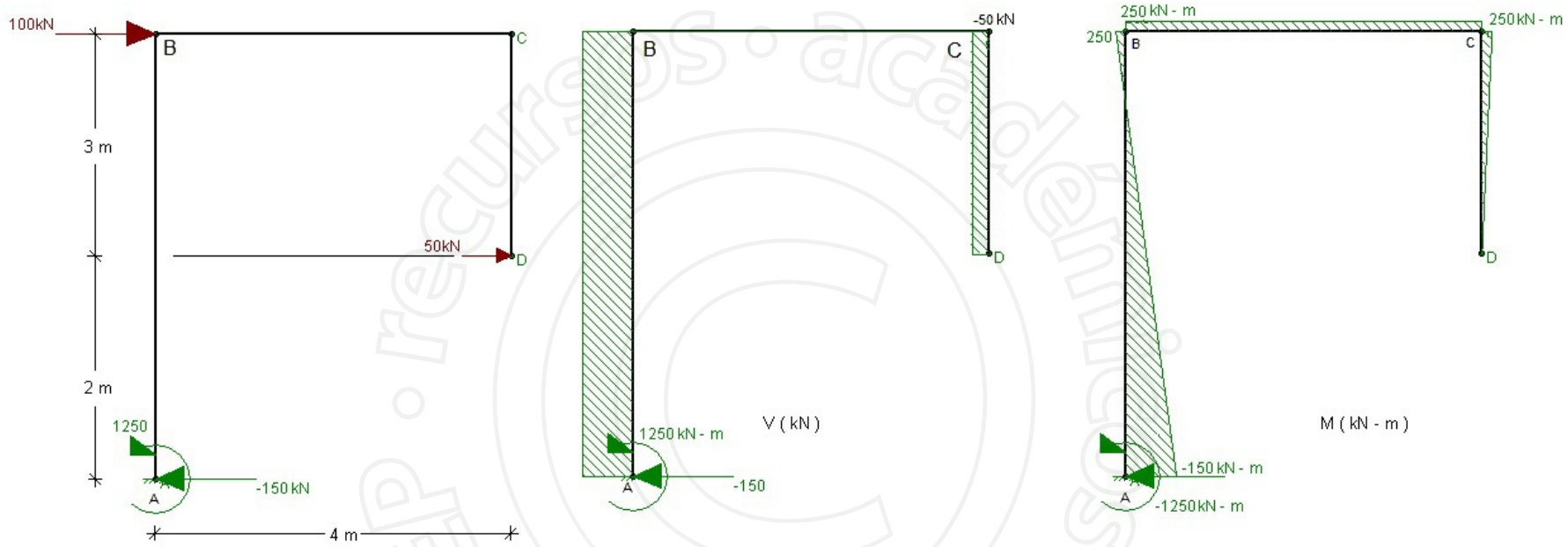
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.39



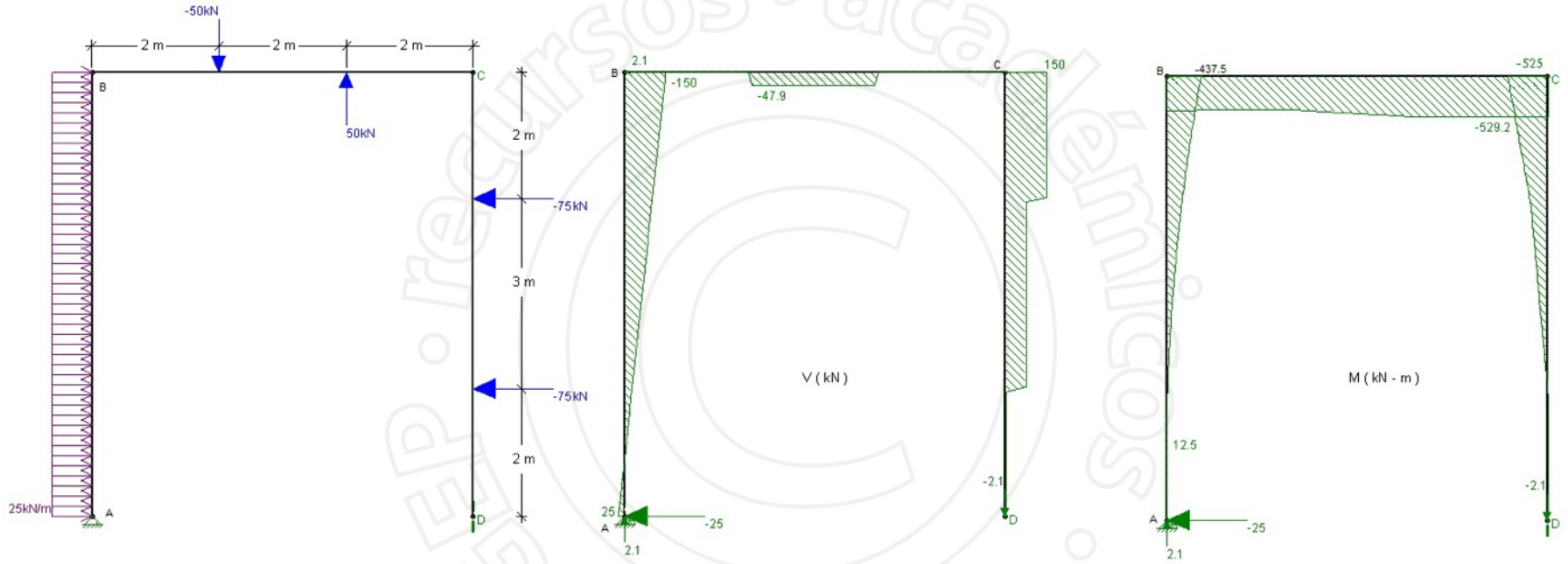
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.40



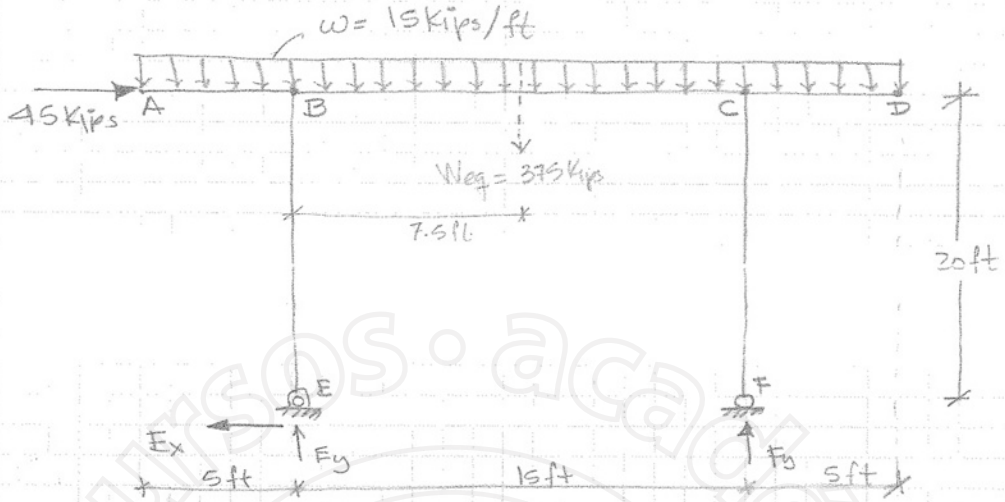
D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.41



D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.42.-



$\Sigma F_x = 0 \quad 45 - E_x = 0 \quad E_x = 45 \text{ kips}$

$\Sigma F_y = 0 \quad E_y - (15 \times 25) + F_y = 0$

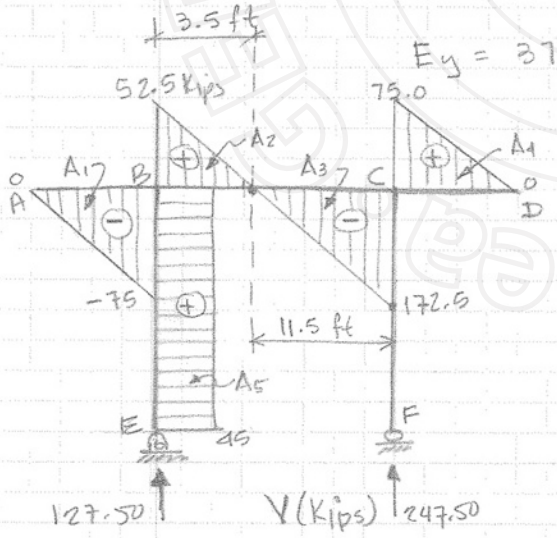
$E_y - 375 + F_y = 0$

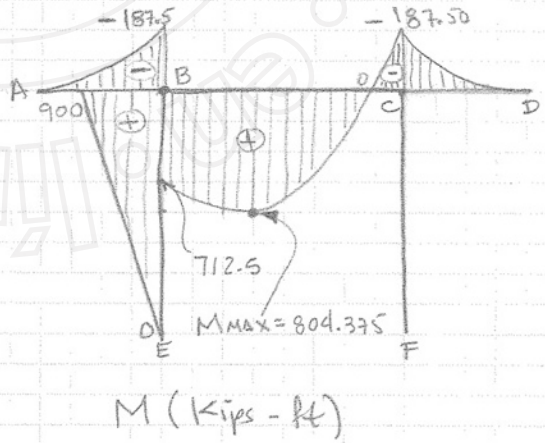
$\Sigma M_E = 0 \quad -(45)(20) - (375)(7.5) + 15F_y = 0$

$-900 - 2812.50 + 15F_y = 0$

$F_y = \dfrac{2812.50 + 900}{15} = 247.50 \text{ kips}$

$E_y = 375 - 247.50 = 127.50 \text{ kips}$





$X = 0 \quad V = 0$

$X = 5 \text{ ft} \quad V_1 = (15)(5) = 75 \text{ kips}$

$V_2 = -75 + 127.50 = 52.5 \text{ kips}$

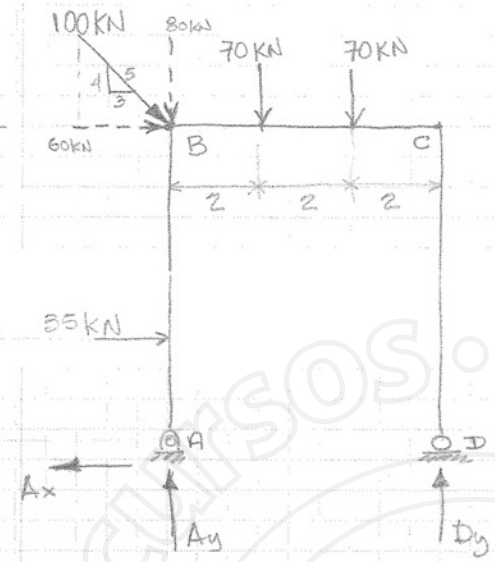
$X = 20 \text{ ft} \quad V_1 = 52.5 - (15)(15) = -172.50 \text{ kips}$

$V_2 = -172.50 + 247.50 = 75 \text{ kips}$

$X = 25 \text{ ft} \quad V = 75 - (15 \times 5) = 0$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.43



$100\left(\frac{3}{5}\right) = 60$ KN

$100\left(\frac{4}{5}\right) = 80$ KN

$\Sigma F_x = 0 \quad -A_x + 35 + 60 = 0 \qquad A_x = 95$ KN

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 80 - 70 - 70 + D_y = 0$

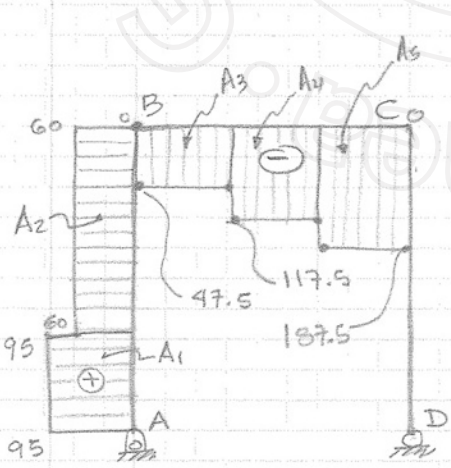
$\oplus \Sigma M_A = 0 \quad -(35)(3) - (60)(10) - (70)(2) - (70)(4) + 6D_y = 0$

$-105 - 600 - 140 - 280 + 6D_y = 0$

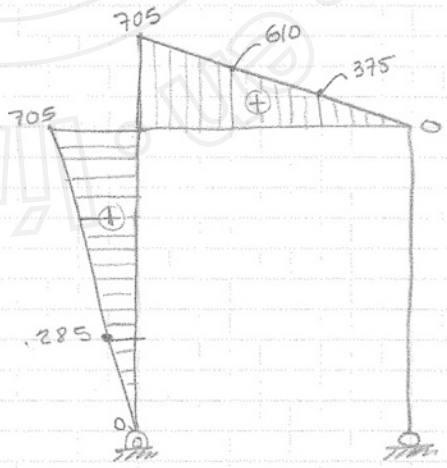
$-1125 + 6D_y = 0$

$D_y = \frac{1125}{6} = 187.5$ KN

$A_y = 80 + 70 + 70 - D_y = 220 - 187.5 = 32.5$ KN



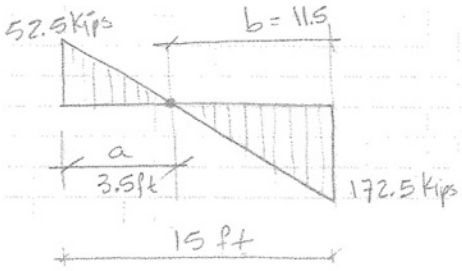
V (KN)



M (KN-m)

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.42
Continuación



$$\frac{52.5}{a} = \frac{172.5}{b}$$

$a + b = 15$
$a = 15 - b$

$52.5b = 172.5a$
$52.5b = 172.5(15-b)$
$52.5b = 2587.5 - 172.5b$
$52.5b + 172.5b = 2587.5$
$225b = 2587.5$
$b = \frac{2587.5}{225}$

$\therefore b = 11.5$ ft
$a = 15 - 11.5 = 3.5$ ft

$A_1 = \frac{(5)(-75)}{2} = -187.5$ Kip-ft

$A_2 = \frac{(52.5)(3.5)}{2} = 91.875$ Kip-ft

$A_3 = \frac{(-172.5)(11.5)}{2} = -991.875$ Kip-ft

$A_4 = \frac{(75)(5)}{2} = 187.5$ Kip-ft

$A_5 = (45)(20) = 900$ Kip-ft

$M_B = A_1 + A_5 = -187.5 + 900 = 712.5$ Kip-ft

$M_{MAX} = M_B + A_2 = 712.5 + 91.875 = 804.375$ Kip-ft

$M_C = M_{MAX} - A_3 = 804.375 - 991.875 = -187.50$

$M_D = M_C + A_4 = -187.50 + 187.50 = 0$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.43 continuación

A-B

$0 \le x \le 3m$ $\quad V = 95\ kN$

$3 \le x \le 10m$ $\quad V = 95 - 35 = 60\ kN$

$x = 10$ $\quad V = 60 - 60 = 0$

B-C

$x = 0\ m$ $\quad V = 32.5 - 80 = -47.5\ kN$

$x = 2\ m$ $\quad V = -47.5 - 70 = -117.5\ kN$

$x = 4\ m$ $\quad V = -117.5 - 70 = -187.5\ kN$

$x = 6\ m$ $\quad V = -187.5 + 187.5 = 0\ kN$

$A_1 = 95 \times 3 = 285\ kN\text{-}m$

$A_2 = 60 \times 7 = 420\ kN\text{-}m$

$A_3 = -47.5 \times 2 = -95\ kN\text{-}m$

$A_4 = -117.5 \times 2 = -235\ kN\text{-}m$

$A_5 = -187.5 \times 2 = -375\ kN\text{-}m$

A-B

$x = 0$ $\quad M = 0$

$x = 3m$ $\quad M = A_1 = 285\ kN\text{-}m$

$x = 10m$ $\quad M = A_1 + A_2 = 285 + 420 = 705\ kN\text{-}m$

B-C

$x = 0$ $\quad M = 705\ kN\text{-}m$

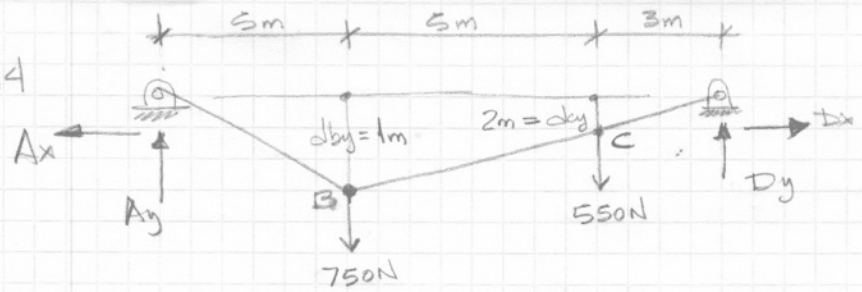
$x = 2$ $\quad M = 705 - 95 = 610\ kN\text{-}m$

$x = 4$ $\quad M = 610 - 235 = 375\ kN\text{-}m$

$x = 6$ $\quad M = 375 - 375 = 0$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.44



$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad -(750)(5) - (550)(10) + 13Dy = 0$

$-3750 - 5500 + 13Dy = 0$

$-9250 + 13Dy = 0$

$Dy = \frac{9250}{13} = 711.5385\ N$

$\sum M_C = 0 \quad -3Dy + Dx\,2 = 0$ (derecha)

$Dx = \frac{3Dy}{2} = \frac{3(711.5385)}{2} = 1067.3077\ N$

$\sum Fx = 0 \quad -Ax + Dx = 0 \quad \therefore \quad Ax = 1067.3077\ N$

$\sum Fy = 0 \quad Ay - 750 - 550 + 1067.3077 = 0$

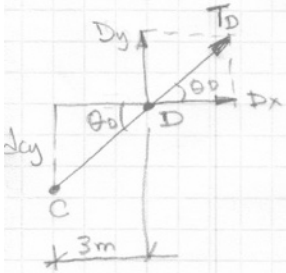
$Ay = 750 + 550 - 1067.3077$

$Ay = 232.6923\ N$

$tg\theta_D = \frac{dcy}{dx}$

$dcy = dx\, tg\theta_D$

$dcy = 3\, tg\, 33.6901^\circ = 2m$



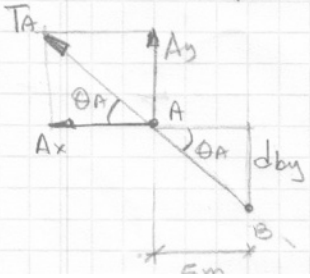
$T_D = \sqrt{Dx^2 + Dy^2} = \sqrt{(1067.3077)^2 + (711.5385)^2}$

$T_D = 1,282.7442\ N$

$\theta_D = tg^{-1}\left(\frac{711.5385}{1067.3077}\right) = 33.6901^\circ$

$T_A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2} = \sqrt{(1067.3077)^2 + (232.6923)^2}$

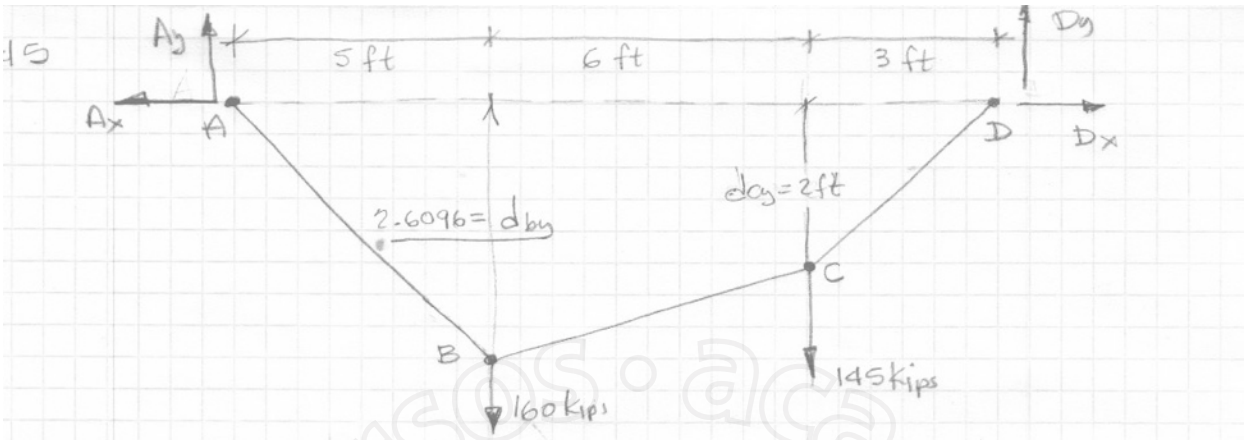
$T_A = 1,092.3788\ N$



$\theta_A = tg^{-1}\left(\frac{232.6923}{1067.3077}\right) = 12.2991^\circ$

$tg\theta_A = \frac{dby}{dbx} \quad dy = dx\, tg\theta_A = 5\, tg\, 12.2991^\circ = 1.091m$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.



$(+)\ \Sigma M_A = 0 \quad -(160)(5) - (145)(11) + 14\,D_y = 0$

$-800 - 1595 + 14\,D_y$

$$D_y = \frac{800 + 1595}{14} = 171.0714 \text{ kips}$$

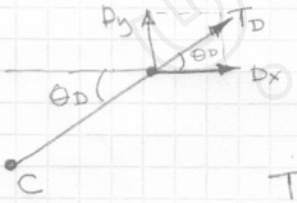
$(+)\ \Sigma M_C = 0$ (derecha) $\quad +3D_y - 2D_x = 0$

$$D_x = \frac{3D_y}{2} = \frac{3(171.0714)}{2} = 256.6071 \text{ kips}$$

$\Sigma F_x = 0 \quad -A_x + D_x = 0 \quad A_x = D_x = 256.6071 \text{ kips}$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 160 - 145 + D_y = 0$

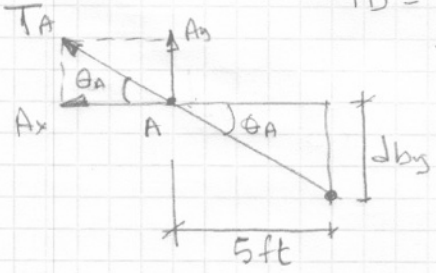
$A_y = 160 + 145 - 171.0714 = 133.9286 \text{ kips}$



$$\theta_D = tg^{-1}\left(\frac{171.0714}{256.6071}\right) = 33.6901^\circ$$

$$T_D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(256.6071)^2 + (171.0714)^2}$$

$T_D = 308.4034 \text{ kips}$



$$T_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(256.6071)^2 + (133.9286)^2}$$

$T_A = 289.4548 \text{ kips}$

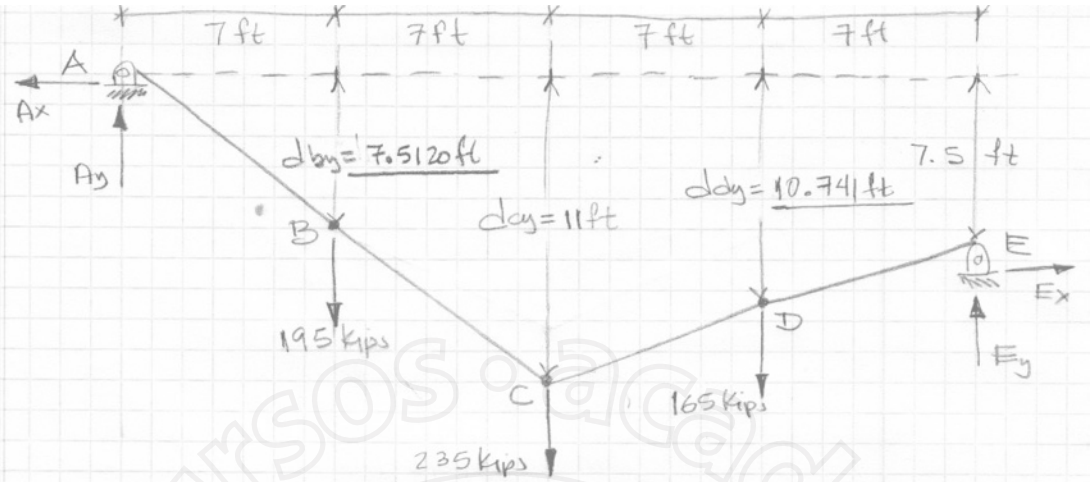
$$\theta_A = tg^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{133.9286}{256.6071}\right)$$

$\theta_A = 27.5610^\circ$

$$tg\,\theta_A = \frac{d_{by}}{d_x} \qquad d_{by} = d_x\, tg\,\theta_A = 5\, tg\, 27.5610^\circ = 2.6096 \text{ ft}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.46



$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad -(195)(7) - (235)(14) - (165)(21) + 28E_y + 7.5E_x = 0$

$-1365 - 3290 - 3465 + 28E_y + 7.5E_x = 0$

$-8120 + 28E_y + 7.5E_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_C = 0$ (derecha) $\quad -(165)(7) + 14E_y - (11 - 7.5)E_x = 0$

$-1155 + 14E_y - 3.5E_x$

$$E_y = \frac{1155 + 3.5E_x}{14} = \frac{1155 + (3.5)(387.3333)}{14}$$

$$-8120 + 28\left(\frac{1155 + 3.5E_x}{14}\right) + 7.5E_x = 0 \qquad E_y = 179.3333$$

$-8120 + 2(1155 + 3.5E_x) + 7.5E_x = 0$

$-8120 + 2310 + 7.5E_x + 7.5E_x = 0$

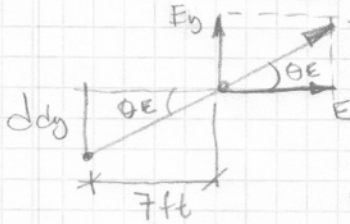
$15E_x = 8120 - 2310 \qquad E_x = \frac{5810}{15} = 387.3333$

$\sum F_x = 0 \quad -A_x + E_x = 0 \qquad A_x = E_x = 387.3333$ kips

$\sum F_y = 0 \quad A_y - 195 - 235 - 165 + E_y = 0$

$A_y = 195 + 235 + 165 - 179.3333$

$A_y = 415.6667$ kips



$$T_E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(387.3333)^2 + (179.3333)^2}$$

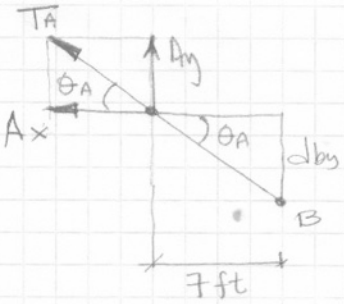
$T_E = 426.8343$ kips

$$\theta_E = tg^{-1}\left(\frac{179.3333}{387.3333}\right) = 24.8439°$$

$ddy = 7\ tg\ 24.8439 = 3.2410 + 7.5 = 10.7410$ ft

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.46 continuación



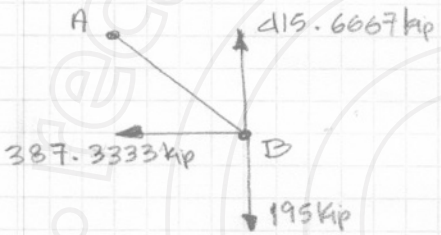
$$T_A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$$

$$T_A = \sqrt{(387.3333)^2 + (415.6667)^2}$$

$$T_A = 568.1601 \text{ Kips}$$

$$\theta_A = tg^{-1}\left(\frac{415.6667}{387.3333}\right) = 47.0208^\circ$$

$$dby = 7\ tg\ 47.0208^\circ = 7.5120 \text{ ft}$$

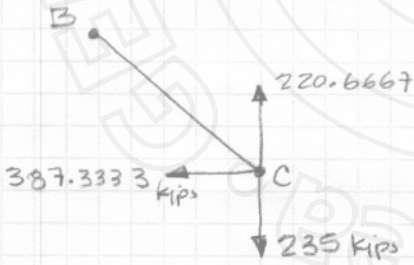


$$T_B = \sqrt{Bx^2 + By^2}$$

$$T_B = \sqrt{(387.3333)^2 + (220.6667)^2}$$

$$T_B = 445.7812 \text{ kips}$$

$$By = 415.6667 - 195 = 220.6667 \text{ kips}$$

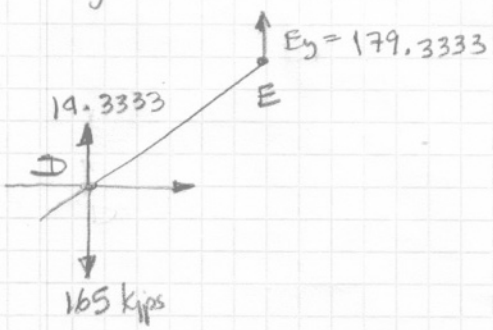


$$T_C = \sqrt{Cx^2 + Cy^2}$$

$$T_C = \sqrt{(387.3333)^2 + (14.3333)^2}$$

$$T_C = 387.5984 \text{ kips}$$

$$Cy = 235 - 220.6667 = 14.3333$$



$$T_D = \sqrt{Dx^2 + Dy^2}$$

$$T_D = \sqrt{(387.3333)^2 + (14.3333)^2}$$

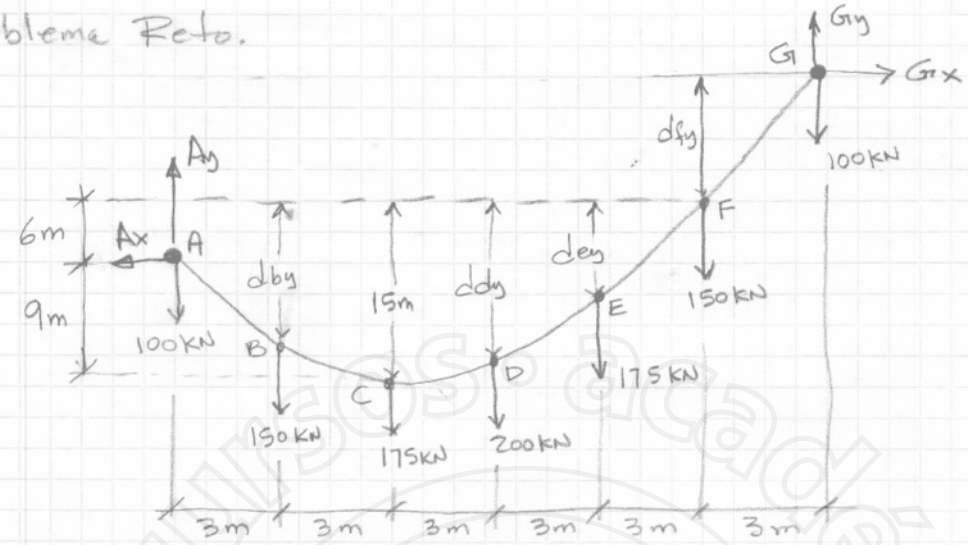
$$T_D = 387.5984 \text{ kips}$$

$$Dy = 179.3333 - 165 = 14.333 \text{ kips}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problema Reto.

1/3



$\curvearrowright +)\quad \Sigma M_A = 0 \quad -(150)(3) - (175)(6) - (200)(9) - 175(12) - 150(15) -$

$(100)(18) + 18\,G_y - G_x(d_{fy} + 6) = 0$

$\curvearrowright +)\quad \Sigma M_C = 0 \quad +(100)(6) - 6A_y + 9A_x + (150)(3) = 0$

Izq

$600 - 6A_y + 9A_x + 450 = 0$

$-6A_y + 9A_x + 1050 = 0$

$\curvearrowright +)\quad \Sigma M_F = 0 \quad (175)(3) + (200)(6) + (175)(9) + (150)(12) + (100)(15)$

Izq

$-15A_y - 6A_x = 0$

$525 + 1200 + 1575 + 1800 + 1500 - 15A_y - 6A_x = 0$

$6\,600 - 15A_y - 6A_x = 0$

$9A_x = -1050 + 6A_y \qquad A_x = -\frac{1050}{9} + \frac{6A_y}{9}$

$A_x = 116.6667 + 0.6667\,A_y$

$6\,600 - 15A_y - 6\left[116.6667 + 0.6667\,A_y\right] = 0$

$6600 - 15A_y - 700 - 4A_y = 0$

$6\,600 - 700 = 15A_y + 4A_y$

$5900 = 20A_y$

$A_y = \frac{5900}{20} = \underline{\underline{295\text{ KN}}} \qquad A_x = -116.6667 + \left(\frac{6}{9}\right)295$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Continua Problema Reto (2/3)

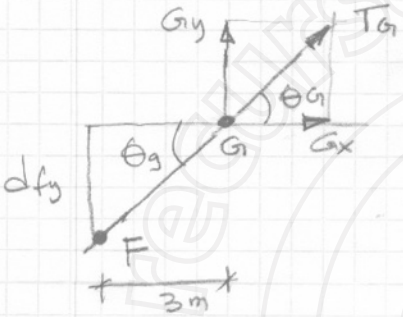
$A_x = -116.6667 + 196.6667 = 80\,KN$

$\Sigma F_x = 0 \quad -A_x + G_x = 0 \quad A_x = G_x = 80\,KN$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 100 - 150 - 175 - 200 - 175 - 150 - 100 + G_y = 0$

$A_y - 1050 + G_y = 0$

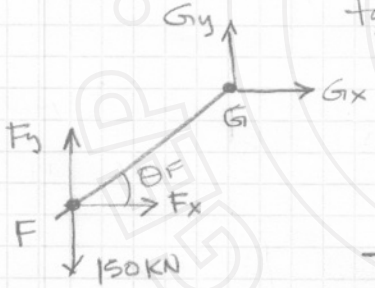
$G_y = 1050 - A_y = 1050 - 295 = 755\,KN$



$T_G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$

$T_G = \sqrt{(80)^2 + (755)^2} = 759.2266\,KN$

$\theta_G = tg^{-1}\left(\frac{755}{80}\right) = 83.9515^\circ$



$tg\,\theta_G = \frac{d_{fy}}{3} \quad d_{fy} = 3\,tg\,\theta_G = 3\,tg\,83.9515^\circ$

$d_{fy} = 28.3125\,m$

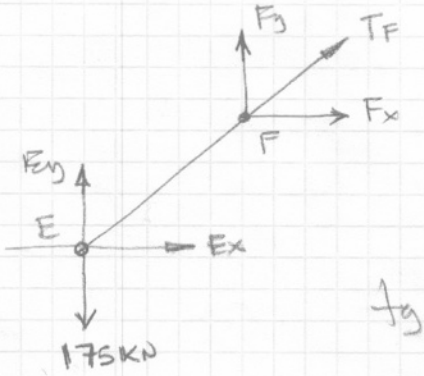
$T_F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

$T_F = \sqrt{(80)^2 + (605)^2} = 610.2663\,KN$

$F_x = G_x = 80\,KN$

$F_y = 755 - 150 = 605\,KN$

$\theta_F = tg^{-1}\left(\frac{605}{80}\right) = 82.4674^\circ$



$T_E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$

$T_E = \sqrt{(80)^2 + (430)^2} = 437.3786\,KN$

$\theta_E = tg^{-1}\left(\frac{430}{80}\right) = 79.4608^\circ$

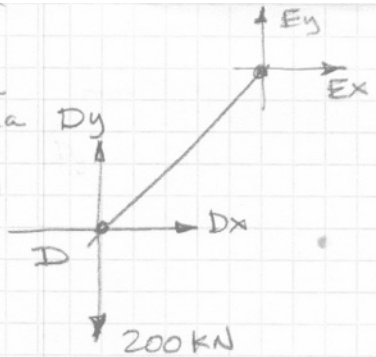
$tg\,\theta_E = \frac{d_{ey}}{d_x} \quad d_{ey} = d_x\,tg\,\theta_E$

$d_{ey} = 3\,tg\,79.4608^\circ = 16.1250\,m$

$E_y = 605 - 175 = 430\,KN$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Continua Problema Reto 3/3



$T_D = \sqrt{Dx^2 + Dy^2}$

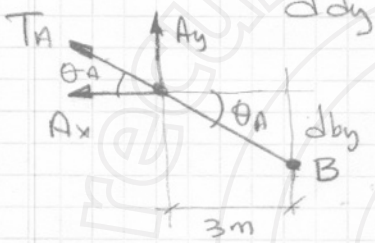
$T_D = \sqrt{(80)^2 + (230)^2} = 243.5159\ kN$

$\theta_D = tg^{-1}\left(\frac{230}{80}\right) = 70.8210°$

$Dy = 430 - 200 = 230\ kN$

$tg\,\theta_D = \frac{ddy}{dx}$

$ddy = dx\ tg\,\theta_D = 3\ tg\ 70.8210° = 8.6250\ m$



$T_A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$

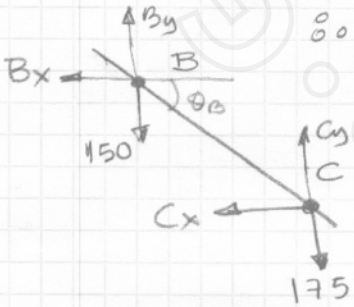
$T_A = \sqrt{(80)^2 + (295)^2} = 305.655\ kN$

$\theta_A = tg^{-1}\left(\frac{295}{80}\right) = 74.8271°$

$tg\,\theta_A = \frac{dy}{dx}$ $\quad dy = dx\ tg\,\theta_A = 3\ tg\ 74.8271$

$dy = 11.0625\ m$

$\therefore dby = 6 + dy = 6 + 11.0625 = 17.0625\ m$



$T_B = \sqrt{Bx^2 + By^2} = \sqrt{(80)^2 + (145)^2}$

$T_C = \sqrt{Cx^2 + Cy^2} = \sqrt{(80)^2 + (30)^2}$

$T_B = 165.6050\ kN$

$By = Ay - 150 = 295 - 150 = 145\ kN$

$Cy = By - 175 = 145 - 175 = -30\ kN$

$T_C = 85.44\ kN$

$\theta_B = tg^{-1}\left(\frac{145}{80}\right) = 61.1134°$

$\theta_C = tg^{-1}\left(\frac{30}{80}\right) = 20.5560°$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

4.1

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	25.00	cm
From centroid to top	y (top)	25.00	cm
Area of shape	A	1,500.00	cm^2
Moment of Inertia	Ix	312,500.00	cm^4
Section Modulus	Sx	12,500.00	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	12,500.00	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	12,500.00	cm^3
Radius of Gyration	rx	14.4338	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	15.00	cm
From centroid to right	x (right)	15.00	cm
Area of shape	A	1,500.00	cm^2
Moment of Inertia	Iy	112,500.00	cm^4
Section Modulus	Sy	7,500.00	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	7,500.00	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	7,500.00	cm^3
Radius of Gyration	ry	8.6603	cm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	425,000.00	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0	cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.2

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	10.00	inch
From centroid to top	y (top)	10.00	inch
Area of shape	A	240.00	inch^2
Moment of Inertia	Ix	8,000.00	inch^4
Section Modulus	Sx	800.00	inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	800.00	inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	800.00	inch^3
Radius of Gyration	rx	5.77	inch
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	6.00	inch
From centroid to right	x (right)	6.00	inch
Area of shape	A	240.00	inch^2
Moment of Inertia	Iy	2,880.00	inch^4
Section Modulus	Sy	480.00	inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	480.00	inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	480.00	inch^3
Radius of Gyration	ry	3.46	inch
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	10,880.00	inch^4
Product of Inertia	Ixy	0	inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.3

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	30.00	cm
From centroid to top	y (top)	30.00	cm
Area of shape	A	1600.00	cm^2
Moment of Inertia	Ix	613,333.3333	cm^4
Section Modulus	Sx	20,444.4444	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	20,444.4444	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	20,444.4444	cm^3
Radius of Gyration	rx	19.5789	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	20.00	cm
From centroid to right	x (right)	20.00	cm
Area of shape	A	1600.00	cm^2
Moment of Inertia	Iy	293,333.3333	cm^4
Section Modulus	Sy	14,666.6667	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	14,666.6667	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	14,666.6667	cm^3
Radius of Gyration	ry	13.5401	cm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	906,666.6667	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0	cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.4

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	15.00	inch
From centroid to top	y (top)	15.00	inch
Area of shape	A	380.00	inch^2
Moment of Inertia	Ix	35,166.6667	inch^4
Section Modulus	Sx	2,344.4444	inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	2,344.4444	inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	2,344.4444	inch^3
Radius of Gyration	rx	9.6200	inch
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	9.00	inch
From centroid to right	x (right)	9.00	inch
Area of shape	A	380.00	inch^2
Moment of Inertia	Iy	13,726.6667	inch^4
Section Modulus	Sy	1,525.1852	inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	1,525.1852	inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	1,525.1852	inch^3
Radius of Gyration	ry	6.0102	inch
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	48,893.3333	inch^4
Product of Inertia	Ixy	0	inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.5

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	20.00	cm
From centroid to top	y (top)	20.00	cm
Area of shape	A	1,256.6371	cm^2
Moment of Inertia	Ix	125,663.7061	cm^4
Section Modulus	Sx	6,283.1853	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	6,283.1853	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	6,283.1853	cm^3
Radius of Gyration	rx	10.00	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	20.00	cm
From centroid to right	x (right)	20.00	cm
Area of shape	A	1,256.6371	cm^2
Moment of Inertia	Iy	125,663.7061	cm^4
Section Modulus	Sy	6,283.1853	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	6,283.1853	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	6,283.1853	cm^3
Radius of Gyration	ry	10.00	cm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	251,327.4123	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0	cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.6

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	7.5	inch
From centroid to top	y (top)	7.5	inch
Area of shape	A	176.7146	inch^2
Moment of Inertia	Ix	2,485.0489	inch^4
Section Modulus	Sx	331.3399	inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	331.3399	inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	331.3399	inch^3
Radius of Gyration	rx	3.75	inch
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	7.5	inch
From centroid to right	x (right)	7.5	inch
Area of shape	A	176.7146	inch^2
Moment of Inertia	Iy	2,485.0489	inch^4
Section Modulus	Sy	331.3399	inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	331.3399	inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	331.3399	inch^3
Radius of Gyration	ry	3.75	inch
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	4,970.0978	inch^4
Product of Inertia	Ixy	0	inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.7

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	35	cm
From centroid to top	y (top)	35	cm
Area of shape	A	1,021.0176	cm^2
Moment of Inertia	Ix	542,415.6066	cm^4
Section Modulus	Sx	15,497.5888	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	15,497.5888	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	15,497.5888	cm^3
Radius of Gyration	rx	23.0489	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	35	cm
From centroid to right	x (right)	35	cm
Area of shape	A	1,021.0176	cm^2
Moment of Inertia	Iy	542,415.6066	cm^4
Section Modulus	Sy	15,497.5888	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	15,497.5888	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	15,497.5888	cm^3
Radius of Gyration	ry	23.0489	cm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	1,084,831.2132	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0	cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.8

X Axis Properties				
From bottom to centroid	y (bot)	15.00		inch
From centroid to top	y (top)	15.00		inch
Area of shape	A	254.4690		inch^2
Moment of Inertia	Ix	23,474.7657		inch^4
Section Modulus	Sx	1,564.9844		inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	1,564.9844		inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	1,564.9844		inch^3
Radius of Gyration	rx	9.6047		inch
Y Axis Properties				
From left to centroid	x (left)	15.00		inch
From centroid to right	x (right)	15.00		inch
Area of shape	A	254.4690		inch^2
Moment of Inertia	Iy	23,474.7657		inch^4
Section Modulus	Sy	1,564.9844		inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	1,564.9844		inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	1,564.9844		inch^3
Radius of Gyration	ry	9.6047		inch
Other Properties				
Polar Moment of Inertia	J	46,949.5314		inch^4
Product of Inertia	Ixy	0		inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.9

X Axis Properties		CUADRADO	CIRCULO	CONJUNTO	
From bottom to centroid	y (bot)	25.00	15.00	25.00	cm
From centroid to top	y (top)	25.00	15.00	25.00	cm
Area of shape	A	2,500.0000	706.8583	1,793.1417	cm^2
Moment of Inertia	Ix	520,833.3333	39,760.7820	481,072.5513	cm^4
Section Modulus	Sx	20,833.3333	2,650.7188	19,242.9021	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	20,833.3333	2,650.7188	19,242.9021	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	20,833.3333	2,650.7188	19,242.9021	cm^3
Radius of Gyration	rx	14.4338	7.5	16.3794	cm
Y Axis Properties					
From left to centroid	x (left)	25.00	15.00	25.00	cm
From centroid to right	x (right)	25.00	15.00	25.00	cm
Area of shape	A	2,500.0000	706.8583	1,793.1417	cm^2
Moment of Inertia	Iy	520,833.3333	39,760.7820	481,072.5513	cm^4
Section Modulus	Sy	20,833.3333	2,650.7188	19,242.9021	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	20,833.3333	2,650.7188	19,242.9021	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	20,833.3333	2,650.7188	19,242.9021	cm^3
Radius of Gyration	ry	14.4338	7.50	16.3794	cm
Other Properties					
Polar Moment of Inertia	J	1041666.667	79521.56404	962145.1026	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0	0		cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.10

X Axis Properties		CUADRADO		CIRCULO		CONJUNTO		
From bottom to centroid	y (bot)	12.5		7.5		12.5		inch
From centroid to top	y (top)	12.5		7.5		12.5		inch
Area of shape	A	625.0000		176.7146		448.2854		inch^2
Moment of Inertia	Ix	32,552.0833		2,485.0489		30,067.0345		inch^4
Section Modulus	Sx	2,604.1667		331.3399		2,405.3628		inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	2,604.1667		331.3399		2,405.3628		inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	2,604.1667		331.3399		2,405.3628		inch^3
Radius of Gyration	rx	7.2169		3.75		8.1897		inch
Y Axis Properties								
From left to centroid	x (left)	12.5		7.5		12.5		inch
From centroid to right	x (right)	12.5		7.5		12.5		inch
Area of shape	A	625.0000		176.7146		448.2854		inch^2
Moment of Inertia	Iy	32,552.0833		2,485.0489		30,067.0345		inch^4
Section Modulus	Sy	2,604.1667		331.3399		2,405.3628		inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	2,604.1667		331.3399		2,405.3628		inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	2,604.1667		331.3399		2,405.3628		inch^3
Radius of Gyration	ry	7.2169		3.75		8.1897		inch
Other Properties								
Polar Moment of Inertia	J	65,104.1667		4,970.0978		60,134.0689		inch^4
Product of Inertia	Ixy	0		0		0		inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.11

X Axis Properties		**CIRCULO**	**CUADRADO**	**CONJUNTO**	
From bottom to centroid	y (bot)	37.5	27.5	37.5	cm
From centroid to top	y (top)	37.5	27.5	37.5	cm
Area of shape	A	4,417.8647	3,025.0000	1,392.8647	cm^2
Moment of Inertia	Ix	1,553,155.5477	762,552.0833	790,603.4644	cm^4
Section Modulus	Sx	41,417.4813	27,729.1667	21,082.7591	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	41,417.4813	27,729.1667	21,082.7591	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	41,417.4813	27,729.1667	21,082.7591	cm^3
Radius of Gyration	rx	18.75	15.8771324	23.8246	cm
Y Axis Properties					
From left to centroid	x (left)	37.5	27.5	37.5	cm
From centroid to right	x (right)	37.5	27.5	37.5	cm
Area of shape	A	4,417.8647	3,025.0000	1,392.8647	cm^2
Moment of Inertia	Iy	1,553,155.5477	762,552.0833	790,603.4644	cm^4
Section Modulus	Sy	41,417.4813	27,729.1667	21,082.7591	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	41,417.4813	27,729.1667	21,082.7591	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	41,417.4813	27,729.1667	21,082.7591	cm^3
Radius of Gyration	ry	18.7500	15.8771	23.8246	cm
Other Properties					
Polar Moment of Inertia	J	3,106,311.0955	1,525,104.1667	1,581,206.9288	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0	0		cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.12

X Axis Properties		**CIRCULO**	**CUADRADO**	**CONJUNTO**	
From bottom to centroid	y (bot)	12.5	5.5	12.5	inch
From centroid to top	y (top)	12.5	5.5	12.5	inch
Area of shape	A	490.8739	121.0000	369.8739	inch^2
Moment of Inertia	Ix	19,174.7598	1,220.0833	17,954.6765	inch^4
Section Modulus	Sx	1,533.9808	221.8333	1,436.3741	inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	1,533.9808	221.8333	1,436.3741	inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	1,533.9808	221.8333	1,436.3741	inch^3
Radius of Gyration	rx	6.2500	3.1754	6.9673	inch
Y Axis Properties					
From left to centroid	x (left)	12.5	5.5	12.5	inch
From centroid to right	x (right)	12.5	5.5	12.5	inch
Area of shape	A	490.8739	121.0000	369.8739	inch^2
Moment of Inertia	Iy	19,174.7598	1,220.0833	17,954.6765	inch^4
Section Modulus	Sy	1,533.9808	221.8333	1,436.3741	inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	1,533.9808	221.8333	1,436.3741	inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	1,533.9808	221.8333	1,436.3741	inch^3
Radius of Gyration	ry	6.2500	3.1754	6.9673	inch
Other Properties					
Polar Moment of Inertia	J	38349.5197	2440.166667		inch^4
Product of Inertia	Ixy	0	0		inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.13

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	35.7692	cm
From centroid to top	y (top)	24.2308	cm
Area of shape	A	1,950.0000	cm^2
Moment of Inertia	Ix	670,096.1538	cm^4
Section Modulus	Sx	18,733.8710	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	18,733.8710	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	27,654.7619	cm^3
Radius of Gyration	rx	18.5375	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	35	cm
From centroid to right	x (right)	35	cm
Area of shape	A	1,950.0000	cm^2
Moment of Inertia	Iy	350,937.5000	cm^4
Section Modulus	Sy	10,026.7857	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	10,026.7857	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	10,026.7857	cm^3
Radius of Gyration	ry	13.4152	cm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	1,021,033.6538	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0	cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.14

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	20.5816	inch
From centroid to top	y (top)	12.4184	inch
Area of shape	A	490.0000	inch^2
Moment of Inertia	Ix	47,637.5680	inch^4
Section Modulus	Sx	2,314.5670	inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	2,314.5670	inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	3,836.0572	inch^3
Radius of Gyration	rx	9.8600	inch
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	15.00	inch
From centroid to right	x (right)	15.00	inch
Area of shape	A	490.0000	inch^2
Moment of Inertia	Iy	20,083.3333	inch^4
Section Modulus	Sy	1,338.8889	inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	1,338.8889	inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	1,338.8889	inch^3
Radius of Gyration	ry	6.4021	inch
Plastic Modulus	Zy	2,425.0000	inch^3
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	67,720.9014	inch^4
Product of Inertia	Ixy	0	inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.15

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	36.8233	cm
From centroid to top	y (top)	58.1767	cm
Area of shape	A	3,325.0000	cm^2
Moment of Inertia	Ix	3,334,154.5269	cm^4
Section Modulus	Sx	57,310.8306	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	90,544.6763	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	57,310.8306	cm^3
Radius of Gyration	rx	31.6663	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	27.7256	cm
From centroid to right	x (right)	47.2744	cm
Area of shape	A	3,325.0000	cm^2
Moment of Inertia	Iy	1,581,757.9104	cm^4
Section Modulus	Sy	33,459.0540	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	57,050.5226	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	33,459.0540	cm^3
Radius of Gyration	ry	21.8109	cm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	4,915,912.4373	cm^4
Product of Inertia	Ixy	-783,242.4812	cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.16

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	15.2292	inch
From centroid to top	y (top)	18.7708	inch
Area of shape	A	480.00	inch^2
Moment of Inertia	Ix	61,534.7917	inch^4
Section Modulus	Sx	3,278.2131	inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	4,040.5882	inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	3,278.2131	inch^3
Radius of Gyration	rx	11.3224	inch
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	8.9583	inch
From centroid to right	x (right)	21.0417	inch
Area of shape	A	480.00	inch^2
Moment of Inertia	Iy	25,479.1667	inch^4
Section Modulus	Sy	1,210.8911	inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	2,844.1860	inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	1,210.8911	inch^3
Radius of Gyration	ry	7.2857	inch
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	87,013.9583	inch^4
Product of Inertia	Ixy	-12,385.4167	inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.17

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	27.3413	cm
From centroid to top	y (top)	38.6587	cm
Area of shape	A	945.00	cm^2
Moment of Inertia	Ix	604,834.9405	cm^4
Section Modulus	Sx	15,645.4943	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	22,121.6843	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	15,645.4943	cm^3
Radius of Gyration	rx	25.2990	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	25.00	mm
From centroid to right	x (right)	25.00	mm
Area of shape	A	945.00	mm^2
Moment of Inertia	Iy	119,281.2500	mm^4
Section Modulus	Sy	4,771.2500	mm^3
Section Modulus (left)	S (left)	4,771.2500	mm^3
Section Modulus (right)	S (right)	4,771.2500	mm^3
Radius of Gyration	ry	11.2349	mm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	724,116.1905	mm^4
Product of Inertia	Ixy	0.0000	mm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.18

X Axis Properties				
From bottom to centroid	y (bot)	10.3108		inch
From centroid to top	y (top)	16.6892		inch
Area of shape	A	185.00		inch^2
Moment of Inertia	Ix	19,333.7950		inch^4
Section Modulus	Sx	1,158.4622		inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	1,875.0994		inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	1,158.4622		inch^3
Radius of Gyration	rx	10.2229		inch
Y Axis Properties				
From left to centroid	x (left)	12.50		inch
From centroid to right	x (right)	12.50		inch
Area of shape	A	185.00		inch^2
Moment of Inertia	Iy	6,065.4167		inch^4
Section Modulus	Sy	485.2333		inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	485.2333		inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	485.2333		inch^3
Radius of Gyration	ry	5.7259		inch
Other Properties				
Polar Moment of Inertia	J	25,399.2117		inch^4
Product of Inertia	Ixy	0		inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.19

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	39.2782	cm
From centroid to top	y (top)	45.7218	cm
Area of shape	A	2,840.0000	cm^2
Moment of Inertia	Ix	2,238,186.9131	cm^4
Section Modulus	Sx	48,952.2590	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	56,982.9747	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	48,952.2590	cm^3
Radius of Gyration	rx	28.0730	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	43.0000	cm
From centroid to right	x (right)	43.0000	cm
Area of shape	A	2,840.0000	cm^2
Moment of Inertia	Iy	1,414,386.6667	cm^4
Section Modulus	Sy	32,892.7132	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	32,892.7132	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	32,892.7132	cm^3
Radius of Gyration	ry	22.3164	cm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	3,652,573.5798	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0.0000	cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.20

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	67.3630	cm
From centroid to top	y (top)	32.6370	cm
Area of shape	A	3,650.00	cm^2
Moment of Inertia	Ix	3,105,035.6735	cm^4
Section Modulus	Sx	46,094.0730	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	46,094.0730	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	95,138.5537	cm^3
Radius of Gyration	rx	29.1667	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	50.00	cm
From centroid to right	x (right)	50.00	cm
Area of shape	A	3,650.00	cm^2
Moment of Inertia	Iy	2,127,916.6667	cm^4
Section Modulus	Sy	42,558.3333	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	42,558.3333	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	42,558.3333	cm^3
Radius of Gyration	ry	24.1452	cm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	5,232,952.3402	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0	cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.21

X Axis Properties				
From bottom to centroid	y (bot)	4.0395		inch
From centroid to top	y (top)	2.4605		inch
Area of shape	A	28.50		inch^2
Moment of Inertia	Ix	108.8306		inch^4
Section Modulus	Sx	26.9418		inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	26.9418		inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	44.2306		inch^3
Radius of Gyration	rx	1.9541		inch
Y Axis Properties				
From left to centroid	x (left)	4.50		inch
From centroid to right	x (right)	4.50		inch
Area of shape	A	28.50		inch^2
Moment of Inertia	Iy	139.8750		inch^4
Section Modulus	Sy	31.0833		inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	31.0833		inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	31.0833		inch^3
Radius of Gyration	ry	2.2154		inch
Other Properties				
Polar Moment of Inertia	J	248.7056		inch^4
Product of Inertia	Ixy	1.11022E-16		inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.22

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	4.50	inch
From centroid to top	y (top)	4.50	inch
Area of shape	A	17.00	inch^2
Moment of Inertia	Ix	189.4167	inch^4
Section Modulus	Sx	42.0926	inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	42.0926	inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	42.0926	inch^3
Radius of Gyration	rx	3.3380	inch
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	4.50	inch
From centroid to right	x (right)	4.50	inch
Area of shape	A	17.00	inch^2
Moment of Inertia	Iy	61.4167	inch^4
Section Modulus	Sy	13.6481	inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	13.6481	inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	13.6481	inch^3
Radius of Gyration	ry	1.9007	inch
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	250.8333	inch^4
Product of Inertia	Ixy	-80.00	inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.23

$$I_x = I_x' + Ad_y^2$$

$$I_y = I_y' + Ad_x^2$$

Perfil	I_x' cm⁴	A cm²	d_y cm	d_y^2 cm²	Ad_y^2	I_x cm⁴
IE 610 x 158	122,372.	201	0	0	0	122,372.
CE 152 x 12.20	29.14	15.42	32.398	1,049.6304	16,185.3008	16,214.4408
					$\Sigma =$	138,586.44

NOTA: Para CE 152 x 12.20 se tomo el valor de I_x como el de I_y por encontrarse girada 90° la sección.

$$d_y = \frac{d}{2} + \bar{x} = \frac{62.2}{2} + 1.298 = 31.1 + 1.298 = 32.3980 \text{ cm}$$

PERFIL	I_y' cm⁴	A cm²	d_x cm	d_x^2 cm²	Ad_x^2	I_y cm⁴
IE 610 x 158	3,209.	201.	0	0	0	3,209.
CE 152 x 12.20	541.1	15.42	0	0	0	541.1
					$\Sigma =$	3,750.1

NOTA: Para CE 152 x 12.20 se tomo el valor de I_y' como el de I_x por encontrarse girada 90° la sección.

Del Conjunto:

$I_x = 138,586.44 \text{ cm}^4$

$I_y = 3,750.10 \text{ cm}^4$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.24

$I_x = I_x' + Ad_y^2$

$I_y = I_y' + Ad_x^2$

Placas laterales

$A = 41 \times 1 = 41\,cm^2$

$A_{TOT\,PL} = 2 \times 41 = 82\,cm^2$

$I_x' = \frac{bh^3}{12} = \frac{(1)(41)^3}{12} = 5,743.4167\ cm^4$

$I_y' = \frac{hb^3}{12} = \frac{(41)(1)^3}{12} = 3.4167\ cm^4$

Perfil	I_x' cm^4	A cm^2	d_y cm	d_y^2 cm^2	Ad_y^2	I_x
IR 406X67.4	24,391.	85.8	0	0	0	24391.0
2 PL 41X1	5,743.4167	82.0	0	0	0	5,743.4167
					$\Sigma =$	30,134.4167

Perfil	I_y' cm^4	A cm^2	d_x cm	d_x^2 cm^2	Ad_x^2	I_y
IR 406X67.4	1,365.0	85.8	0	0	0	1,365.0
2 PL 41X1	3.4167X2 = 6.8334	82.0	9.45	89.3025	7,322.805	7,329.6384

$d_x = \frac{b_{FL}}{2} + \frac{e_{PL}}{2} = \frac{17.9}{2} + \frac{1}{2} = 8.95 + 0.50 = 9.45\,cm$

DEL conjunto:

$I_x = 30,134.4167\ cm^4$

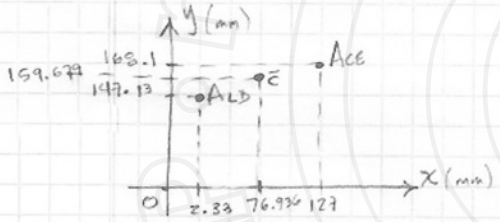
$I_y = 7,329.6384\ cm^4$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.25

CE 254 x 22.76	LD 152 x 102 x 8
$d = 254\,mm$	$Lado_1 = 152\,mm$
$bf = 66.04\,mm$	$Lado_2 = 102\,mm$
$tf = 11.07\,mm$	$tf = 8\,mm$
$tw = 6.10\,mm$	$tw = 8\,mm$
$A = 28.97\,cm^2$	$A = 19.44\,mm^2$
$Ix = 2805.40\,cm^4$	$Ix = 472.7\,cm^4$
$Iy = 94.90\,cm^4$	$Iy = 173.1\,cm^4$
$\bar{x} = 16.10\,mm$	$\bar{x} = 2.33\,mm$
$\bar{y} = 127.0\,mm$	$\bar{y} = 4.87\,mm$

Primero debemos calcular el centroide del conjunto:



CE $\begin{cases} dy_1 = 168.1 - 159.679 = 8.4210\,mm = 0.8421\,cm \\ dx_1 = 127.0 - 76.936 = 50.0640\,mm = 5.0064\,cm \end{cases}$

LD $\begin{cases} dy_2 = 159.679 - 197.13 = 12.5490\,mm = 1.2549\,cm \\ dx_2 = 76.936 - 2.33 = 74.6060\,mm = 7.4606\,cm \end{cases}$

Perfil	A cm^2	x cm	y cm	$Mx = Ady$	$My = Adx$
CE 254x22.76	28.97	12.7	16.81	486.9857	367.919
LD 152x102x8	19.44	0.233	14.713	286.0207	4.5295
$\Sigma =$	48.41			773.0064	372.4485

$$\bar{X} = \frac{\Sigma My}{\Sigma A} = \frac{372.4485}{48.41} = 7.6936\,cm$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Mx}{\Sigma A} = \frac{773.0064}{48.41} = 15.9679\,cm$$

$\bar{C}(\bar{x}, \bar{y})\,cm$

$\bar{C}(7.6936, 15.9679)$

	$Ix\ cm^4$	A cm^2	dy cm	$dy^2\ cm^2$	Ady^2
CE 254x22.76	2,805.40	28.97	0.8421	0.7091	20.5426
LD 152x102x8	472.70	19.44	1.2549	1.5748	30.6141
$\Sigma =$	3,278.10	—	—	—	51.1567

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.25
continuación

$$I_x = \Sigma I_x' + \Sigma A d_y^2$$

$$I_x = 3,278.10 + 51.1567 = 3,329.2567 \text{ cm}^4$$

	I_y' cm^4	A cm^2	d_x cm	d_x^2 cm^2	Ad_x^2
CE 254 x 22.76	94.90	28.97	5.0064	25.0640	726.1041
LD 152 x 102 x 8	173.1	19.44	7.4606	55.6606	1,082.0421
Σ =	268.0	—	—	—	1,808.1462

$$I_y = \Sigma I_y' + \Sigma A d_y^2$$

$$I_y = 268. + 1808.1462 = 2,076.1462 \text{ cm}^2$$

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.26

		I_x cm^4	I_y cm^4	A cm^2
①	CE 254 x 29.76	2x 3284.1 = 6,568.20	2x116.96 = 233.92	2x 37.94 = 75.88
②	PL 600 x 50	625.0	90,000.00	300.00
	Σ =	7,193.20	90,233.92	—

PL 60 x 5 $\quad I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{(60)(5)^3}{12} = 625\ cm^4$

$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{(5)(60)^3}{12} = 90,000\ cm^4$

$A = 60 \times 5 = 300\ cm^2$

$I_x = \Sigma I_x' + \Sigma A d_y^2 \qquad d_{y_1} = 0 \quad d_{y_2} = 0$

$I_x = 7,193.20 + 0 = \underline{7,193.20\ cm^4}$

$I_y = \Sigma I_y' + \Sigma A d_x^2 \qquad d_{x_1} = 300 + 15.4 = 315.4\ mm = 31.5$

$d_{x_2} = 0$

$I_y = 90\ 233.92 + (75.88)(31.54)^2 + (300)(0)^2$

$I_y = 90\ 233.92 + 75,483.2690 + 0$

$I_y = \underline{165,717.1890\ cm^4}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

PROBLEMA

4.27

RESPUESTA

Para empezar a mover la caja

la fuerza $P = 250Kg\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)(0.5) = 1226.25N$

Para seguir en movimiento

la fuerza $P = 250Kg(9.81)(.45) = 1103.625N$

4.28 $375lb \times (0.35) = 131.25\,lb$ Para empezar a mover

$375lb \times (0.3) = 112.5\,lb$ Para seguir en movimiento

4.29

a) $3000(9.81)(0.65)(.95) = 8608.275N$

b) $3000(9.81)(0.65)(.4) = 7651.8N$

4.30

a) $117000N(.55) = 64350N$

b) $117000N(.4) = 46800N$

4.31

a) $1350000N(.35) = 472500N$

b) $1350000N(.25) = 337500N$

4.32

a) $70000Kg\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)(.7) = 480690N$

b) $70000Kg\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)(.6) = 412020N$

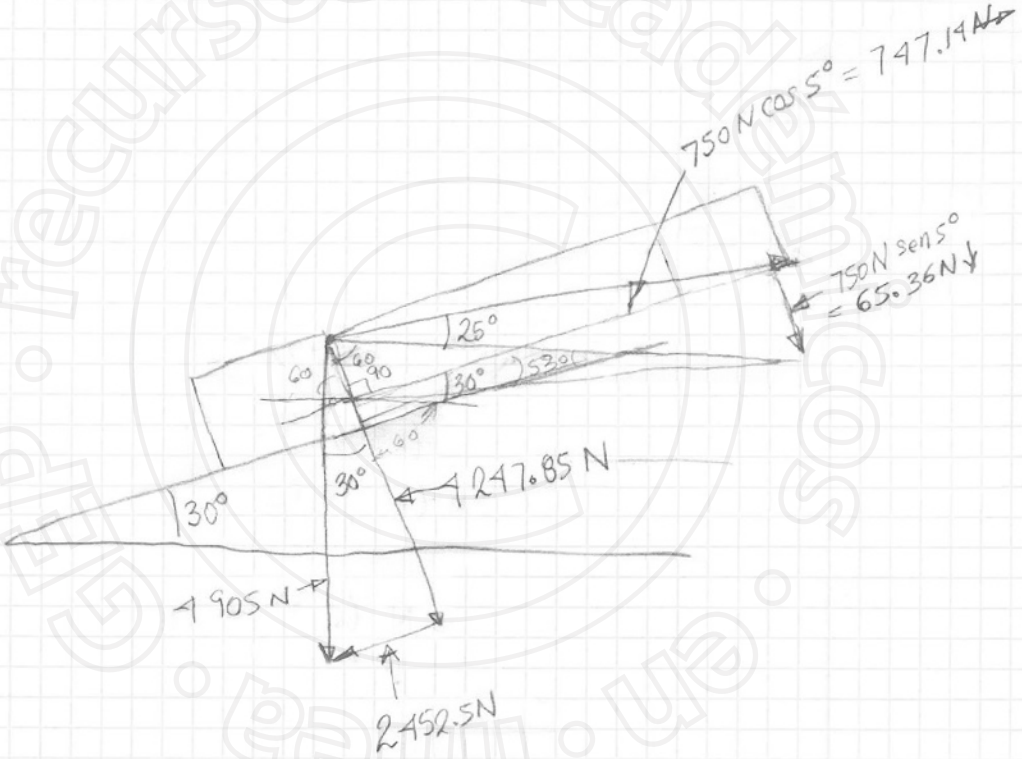
4.33

a) $375 \times 9.81 \times 0.55 = 2023.3125$

b) $375 \times 9.81 \times 0.4 = 1471.5$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.34



Normal = 4247.85 N + 65.36 N = 4313.21

F_{fs} = 3666.22 N

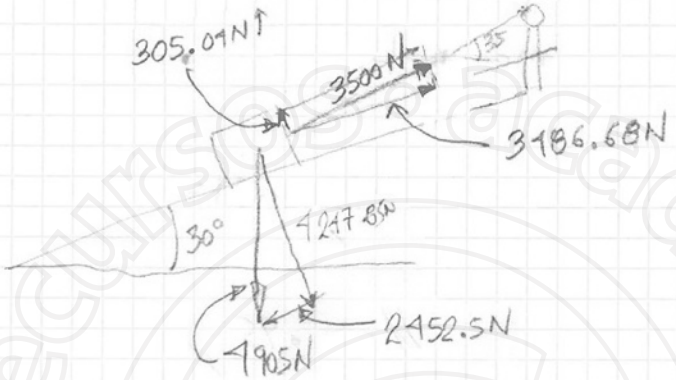
F_{fk} = 3185.89 N

Fuerza cuesta abajo = 2452.5N − 747.14N = 1705.36N

y se necesitan 3666.22 N para empezar a mover la caja por tanto No se mueve.

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4:35



Normal = 4247.8 − 305.04N = 3942.76

3942.76 X .65 = 2562.79 N estatic $\mu_s = 0.6$

3942.76 x .55 = 2168.518N Cinematic $\mu_k = 0.5$

2452.5 + 2562.79 N − 3486.65 = 1528.64 N

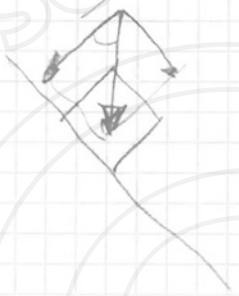
Por tanto No es posible mover a la caja hacia arriba.

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problema Reto 2

750 Kg Peso = 750 x 9.81 = 7357.5 N

$\theta = 45°$ $\mu_s = .95$ $\mu_k = 0.9$

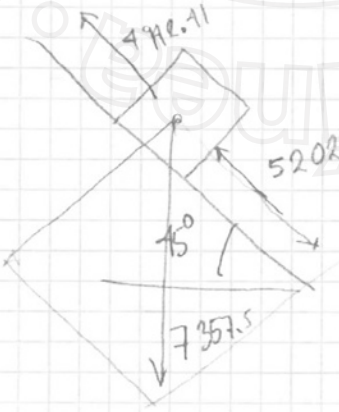


$7357.5 \cos 45° \times 0.95 =$
$= 4942.41$ N

$7357.5 \operatorname{sen} 45° = 5202.53$

hay una fuerza resultante hacia abajo paralela al plano de 260.12 N por lo cual se resbala al soltar la piedra

para subir la piedra se necesita una fuerza de $5202.53 + 4942.41 N = 10144$ N cuesta arriba



Respuesta

F = 10144 N Paralela al plano hacia arriba

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$\pi = 3.14159265358979 3$

$e = 2.71828182845904 5$

e = base de los logaritmos naturales

$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.2957795130823 2^\circ$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$(x^2 - y^2) = (x-y)(x+y)$

$(x^3 - y^3) = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

ECUACION CUADRATICA $ax^2 + bx + c = 0$

Soluciones $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

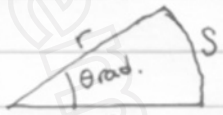
Área del círculo $= \pi r^2$

r = radio del círculo

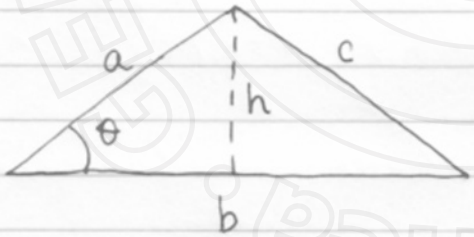
Perímetro de la circunferencia $= 2\pi r$

longitud del arco de círculo $S = r\theta$

θ es el ángulo en radianes



Triangulo



$$\text{Área} = \frac{1}{2} bh$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} (a \operatorname{sen}\theta) h$$

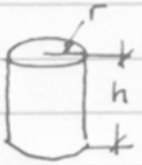
$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Volumen de la esfera $= \frac{4}{3}\pi r^3$

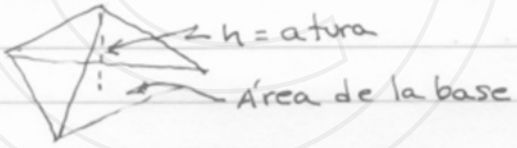
Volumen de un cilindro $= \pi r^2 h$



h = altura del cilindro

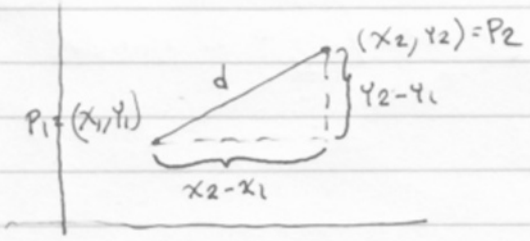
Volumen de un cono $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Volumen de Pirámide $= \frac{1}{3}$ Área de la base h



Distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

distancia entre P_1 y $P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$\text{Seno de } A = \frac{a}{c}$$

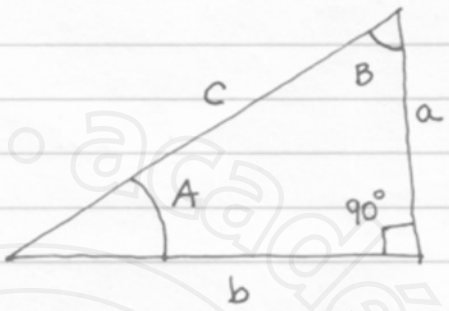
$$\text{Coseno de } A = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tangente de } A = \frac{a}{b}$$

$$\text{Cotangente de } A = \frac{b}{a}$$

$$\text{Secante de } A = \frac{c}{b}$$

$$\text{Cosecante de } A = \frac{c}{a}$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt[2]{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt[2]{c^2 - a^2}$$

$$\text{Tan } A = \frac{\text{Sen } A}{\cos A}$$

$$\text{Sen}^2 A + \cos^2 B = 1$$

$$\text{Sec}^2 A - \text{Tan}^2 A = 1$$

$$\text{Csc}^2 A - \text{Cot}^2 A = 1$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

LEYES DE EXPONENTES

$$a^p a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$a^0 = 1 \quad \text{si } a \neq 0$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$\sqrt[n]{a/b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

LEYES DE LOGARITMOS

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^p = p \log_a M$$

recursos académicos en línea Patria

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Derivadas

$$\frac{d}{dt}(c) = 0 \qquad c = \text{CONSTANTE}$$

$$\frac{d}{dt}(cx) = c$$

$$\frac{d}{dt} ct^n = nct^{n-1}$$

$$\frac{d}{dt}(u \pm v \pm w \pm \cdots) = \frac{du}{dt} \pm \frac{dv}{dt} \pm \frac{dw}{dt} \pm \cdots$$

$$\frac{d}{dt} cu = c\frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(uv) = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(uvw) = uv\frac{dw}{dt} + uw\frac{dv}{dt} + vw\frac{du}{dt}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dt} - u\left(\frac{dv}{dt}\right)}{v^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(u^n\right) = n u^{n-1}\frac{du}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \quad \text{(REGLA DE LA CADENA)}$$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\cos u = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\log_a u = \frac{\log_a}{u}\frac{du}{dt} \quad \text{si } a \neq 0 \text{ y } 1$$

$$\frac{d}{dt}\ln u = \frac{d}{dt}\log_e u = \frac{1}{u}\frac{du}{dt}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$\frac{d\,a^u}{dt} = a^u \ln a \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} e^u = e^u \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} u^v = \frac{d}{dt} e^{v \ln u} = e^{v \ln u} \frac{d}{dt}(v \ln u) =$$

$$= v u^{v-1} \frac{du}{dt} + u^v \ln u \frac{dv}{dt}$$

Segunda derivada $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$

Tercera derivada $= \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{d^3y}{dt^3}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$\int e^u du = e^u$$

$$\int a^u du = \int e^{u \ln a} du = \frac{e^{u \ln a}}{\ln a} = \frac{a^u}{\ln a} \quad \text{si } a>0 \text{ y } a \neq 1$$

$$\int \operatorname{sen} u du = -\cos u$$

$$\int \cos u du = \operatorname{sen} u$$

$$\int \tan u du = \ln \sec u = -\ln \cos u$$

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

$$\int \frac{du}{(u^2-a^2)} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) = -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} \quad \text{si } u^2>a^2$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right) \quad \text{o} \quad \operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

INTEGRALES INDEFINIDAS

$$\int a\,dt = at$$

$$\int a f(t)\,dt = a\int f(t)\,dt$$

$$\int (u \pm v \pm w \pm \dots)\,dt = \int u\,dt \pm \int v\,dt \pm \int w\,dt \pm \dots$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int f(at)\,dt = \frac{1}{a}\int f(u)\,du$$

$$\int F\{f(t)\}\,dt = \int F(u)\frac{dt}{du}\,du = \int \frac{F(u)}{f'(t)}\,du \quad \text{donde } u = f(t)$$

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \quad \text{donde } n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u \quad \text{donde } u > 0 \text{ o } \ln(-u) \text{ si } u < 0$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$$

$$\int e^{ax}\,dt = \frac{e^{at}}{a}$$

$$\int te^{at}\,dt = \frac{e^{at}}{a}\left(t-\frac{1}{a}\right)$$

$$\int t^2 e^{at}\,dt = \frac{e^{at}}{a}\left(t^2-\frac{2t}{a}+\frac{2}{a^2}\right)$$

$$\int \ln t\,dt = t\ln t-(t)$$

$$\int t\ln t\,dt = \frac{t^2}{2}\left(\ln t-\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

INTEGRALES DEFINIDAS

$$\int_a^b \{ f(t) \pm g(t) \pm h(t) \pm \ldots \} dt =$$

$$= \int_a^b f(t)\, dt \pm \int_a^b g(t)\, dt \pm \int_a^b h(t) dt \pm \cdots$$

$$\int_a^b c\, f(t)\, dt = c \int_a^b f(t) dt$$

$$\int_a^a f(t)\, dt = 0$$

$$\int_a^b f(t)\, dt = -\int_b^a f(t)\, dt$$

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

VECTORES

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \text{ rad}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

donde $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

y $\vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\operatorname{sen}\theta \qquad 0 \leq \theta \leq$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$$

$|\vec{A}\times\vec{B}|$ = área de paralelogramo con lados $\vec{A}$ y $\vec{B}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = \vec{C}\{(\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{D})\} - \vec{D}\{\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\} =$$

$$\vec{B}\{\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{D})\} - \vec{A}\{\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{D})\}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}$$

$$\frac{d}{dt}\{\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\} = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{A}\cdot\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\times\vec{C}\right) + \vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{d\tau}\right)$$

$$\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = A\frac{dA}{d\tau}$$

$$\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{du} = 0 \quad \text{si } |\vec{A}| = \text{Constante}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

distancia entre dos puntos en el espacio

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\text{dist } \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{23} + \cdots + (-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Nota si dos renglones o columnas son propocionales lineal mente el determinante es cero

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Centro de Gravedad

$$x_{c.m} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} \qquad y_{cm.} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} \qquad z_{cm} = \frac{\int z\,dm}{\int dm}$$

deben proporcionarse los límites de integración

Momento de inercia

alrededor del eje x $I_x = \int y^2\,ds$

alrededor del eje y $I_y = \int x^2\,ds$

alrededor del origen $I_o = \int (x^2 + y^2)\,ds$

Para un solido de masa m alrededor del plano YZ

$$I_{yz} = \int x^2\,dm$$

Para un solido de masa m alrededor del plano XZ

$$I_{xz} = \int y^2\,dm$$

Para un solido de masa m alrededor del plano XY

$$I_{xy} = \int z^2\,dm$$

Para un solido de masa m alrededor del eje x $I_x = I_{xz} + I_{xy}$ ETC.

(deben proporcionarse los límites de integración)

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$\vec{F} = m\vec{a}$ Segunda ley de Newton

Momento de Inercia de un cuerpo

Momento $= \alpha I = \tau = T$

donde α = aceleracion angular

Momento $= \alpha \int x\, dm\, x$

donde $\int x^2 dm = I =$ momento de inercia de un cuerpo

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CINEMATICA

$$\vec{Vel\ inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

las componentes axiales de la velocidad son

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

la velocidad resultante tiene una magnitud

$$|\vec{v}| = \sqrt[2]{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

la aceleracion instantanea es

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

las componentes axiales de la aceleración son

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Movimiento Rectilíneo

Velocidad $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + \vec{v}_z\hat{k}$$

Aceleración $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$

desplazamiento $\vec{s}$

$\vec{s} = \vec{s}_2 - \vec{s}_1$ donde $s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$

Aceleración uniforme

$$\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t$$

Velocidad adquirida $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Velocidad adquirida

$$V_2 - V_1 = 2\int_{S_1}^{S_2} a\, ds$$

Aceleración uniforme

$$V_{final} = at + v_0$$

$$V_{final} = \sqrt[2]{(2as + V_0^2)}$$

tiempo para el desplazamiento $\vec{s}$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$t_2 - t_1 = \int_{S_1}^{S_2} \frac{ds}{V} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{dv}{a}$$

Aceleración uniforme $t = \dfrac{\sqrt[2]{(2as + v_0^2)} - v_0}{a}$

Aceleracion requerida para un desplazamiento $\vec{s}$ en un tiempo $= t$

$$a = \frac{2(s - v_0 t)}{t^2}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Ecuaciones del movimiento en una dimensión

$$V_x = V_{x0} + a_x t$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(V_{x0} + V_x)t$$

$$x = x_0 + V_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$V_x^2 = V_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

Tiro parabolico

$$V_x = V_0 \cos\theta$$

$$V_y = V_0 \operatorname{sen}\theta - gt$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

ROTACION CON EJE FIJO

Velocidad angular ω $\qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$

Aceleración angular α $\qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

desplazamiento angular $\Delta\theta$ $\qquad \theta_2 - \theta_1 = \int_{t_1}^{t_2} \omega\, dt$

Aceleracion angular uniforme $\qquad \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$

Velocidad angular adquirida $\Delta\omega$ $\qquad \omega_2 - \omega_1 = \int_{t_1}^{t_2} \alpha\, dt$

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\int_{\theta_1}^{\theta_2} \alpha\, d\theta$$

aceleracion uniforme

$$\omega_f = \alpha t + \omega_0$$

$$\omega_f = (2\alpha\theta + \omega_0^2)^{1/2}$$

Tiempo para desplazamiento $\Delta\theta$ $\qquad t_2 - t_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{dt} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{a}$

Aceleración uniforme $\qquad t = \frac{(2\alpha\theta + \omega_0^2)^{1/2} - \omega_0}{a}$

Aceleracion angular requerida para un desplazamiento θ en un tiempo t $\qquad \alpha = \frac{2(\theta - \omega_0 t)}{t^2}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Relacion entre Velocidad, Velocidad angular
Vector de posicion $\vec{r}$, aceleracion angular
aceleracion tangencial y
aceleracion normal.

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a_T} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

$$\vec{a_n} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

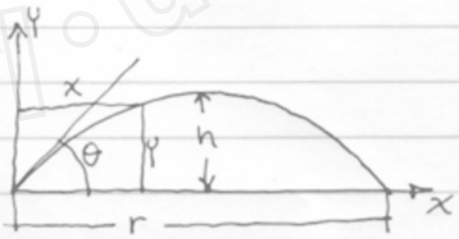
Movimiento de un proyectil

$$x = (v_0 \cos\theta)t \qquad y = (v_0 \operatorname{Sen}\theta)t - \frac{gt^2}{2}$$

$$V = (v_0^2 - 2gy)^{1/2} \qquad V_x = V_0 \cos\theta \qquad V_y = V_0 \operatorname{Sen}\theta - gt$$

$$h = \frac{V_0^2}{2g} \operatorname{Sen} 2\theta \qquad r = \frac{V_0^2}{g} \operatorname{Sen} 2\theta \qquad T = \frac{2V_0}{g} \operatorname{Sen}\theta$$

T = Tiempo total de vuelo
v_0 = Velocidad inicial
g = aceleracion hacia abajo
r = alcance maximo



D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Dinámica

1ª ley $m\vec{v} = \text{constante}$

2ª ley $\vec{F} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$

3ª ley $\vec{F} = -\vec{F}_R$

$\vec{F} = m\vec{a}$ 2ª ley

Trabajo, Potencia y energía

$$W_K = \int_{x_1}^{x_2} F \cos\alpha \, ds = \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds$$

Trabajo hecho por un momento T

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} T \, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_t r \, d\theta$$

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad W = |\vec{F}||\vec{\delta}| \cos\theta$$ donde θ separa a $\vec{F}$ de $\vec{\delta}$

$$\text{Potencia} = \frac{\text{Trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{W_K}{\Delta t}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Ecuaciones de Dinamica Lineal.

lineal

$F = ma$

Impulso $= F\Delta t$

$Imp = m(v_2 - v_1)$

Cambio de Movimiento lineal $m(v_2 - v_1) = Ft$

Trabajo W $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Potencia $P = Fv$

Energia cinetica $Ec = \frac{1}{2} mv^2$

Cambio de energia cinetica $\frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) = F(s_2 - s_1)$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Ecuaciones de Dinamica Rotación

$\tau = T = I\alpha = mk^2\alpha$ Torque o momento $= \tau = T$

Impulso rotacional $= T\tau = \tau\Delta t$

Impulso $= I(\omega_2 - \omega_1)$

$I(\omega_2 - \omega_1) = T\tau$ Cambio de momento angular

$W_k = T\theta$ W_k = Trabajo realizado por un momento T

$P = T\omega$ P = Potencia rotacional

$E_c = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} mk^2\omega^2$ E_c = Energia cinetica de rotacion.

Cambio de energia cinetica $= \frac{1}{2} I(\omega_2^2 - \omega_1^2) = T(\theta_2 - \theta_1)$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Momento angular Fuerza y momento de rotación

$\gamma = T =$ momento de rotacion

$$\vec{\tau} = \vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$l =$ momento angular

$$T = \frac{dl}{dt}$$

$$\Delta \vec{P} = \vec{F} \Delta t$$

$P =$ Cantidad de movimiento lineal

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$$

$$d\vec{L} = \vec{T} dt \qquad L = \text{momento angular}$$

$$\vec{\tau} = \vec{T} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

$$\Delta \vec{L} = \vec{T} \Delta t$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1

NO ES POSIBLE SUMAR CANTIDADES VECTORIALES CON CANTIDADES ESCALARES.

1.2 $3\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$

1.3 ES EL VECTOR CERO

$\vec{0} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$ Su sentido puede ser cualquiera.

1.4 $\hat{e}_A = 0.3984\hat{i} + 0.6972\hat{j} + 0.5976\hat{k}$

1.5 Si es correcta

1.6 Si es correcta el producto punto es conmutativo

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

1.7 Si es lo mismo la igualdad es correcta

1.8 $\theta = 96.3969^\circ$

1.9 $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 = 89$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.10

$\vec{A}-\vec{B} = 5\hat{j}-8\hat{k}$

1.11

$(\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B}) = |\vec{A}-\vec{B}|^2 = 89$

$\vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} - 2\vec{A}\cdot\vec{B} = 89$

$\therefore |\vec{A}-\vec{B}|^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} - 2\vec{A}\cdot\vec{B}$

1.12

$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$

porque $\vec{A}\times\vec{B}$ es un vector perpendicular al vector $\vec{A}$ y al hacer el producto punto entre el vector $\vec{A}$ y un vector perpendicular a el resulta cero

1.13 $\vec{C}\cdot(\vec{C}\times\vec{B}) = 0$ POR LA MISMA RAZON QUE EN EL PROBLEMA 1.12

1.14 la misma razon que en el ejemplo 1.12 Y 1.13

1.15 $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = -\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{B}) =$

$= -\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C}) = -\vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{A})$

En todos los casos resulta = 14

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.16

a) $= -71\hat{i} - 196\hat{j} - 246\hat{k}$

b) $= -71\hat{i} - 196\hat{j} - 246\hat{k}$

$\therefore (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$

1.17

a) $-206\hat{i} - 895\hat{j} + 607\hat{k}$

b) $-206\hat{i} - 895\hat{j} + 607\hat{k}$

$\therefore \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

1.18

a) 421

b) 421

$\therefore (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \times (\vec{C} \times \vec{A}) =$

$= (\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})) \cdot (\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}))$

1.19 distancia = 16.519 km

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.20 $\vec{A}+\vec{B}=(13.9\hat{i}-11.7\hat{j}+10.6\hat{k})$

1.21 $8\hat{i}+0\hat{j}+17\hat{k}$

1.22 $1.1953\hat{i}+0.717\hat{j}-1.435\hat{k}$

1.23 55.19 Unidades cuadraticas.

1.24 $256\ u^3$

1.25 $-2.754\hat{i}-0.652\hat{j}-2.826\hat{k}$

1.26 Angulo $\theta = 69.8259°$

1.27 $\hat{i}(-9+24)-\hat{j}(-6+18)+\hat{k}(-12-6)$

$= 20\hat{i}-12\hat{j}-18\hat{k}$

1.28 Área $= 21.9772\ u^2$

1.29 $-27\hat{i}-6\hat{j}-13\hat{k}$

1.30 $\vec{0}$

1.31 $\vec{0}$

1.32 POR QUE SON VECTORES PARALELOS Y EL PRODUCTO VECTORIAL RESULTA NULO $\vec{0}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.33 RESULTADO ES IGUAL A 1
Porque $0.57732\hat{i} + 0.57732\hat{j} + 0.57732\hat{k}$ es un vector unitario

1.34 RESULTADO ES $\vec{0}$
Porque es el producto vectorial entre dos vectores paralelos y eso resulta cero $\vec{0}$

1.35 RESULTADO a) 0.8164 es la magnitud.

b) el resultado del producto punto entre

$(0.4714\hat{i} - 0.4714\hat{j} - 0.4714\hat{k}) \cdot (0.4714\hat{i} - 0.4714\hat{j} - 0.4714\hat{k})$

es 0.8164

c) $(.8164)^2 = 0.6666$

d) .6666 es .8164 veces .8164

1.36 a) EL RESULTADO ES CERO (0)

b) EL RESULTADO ES CER (0)

c) RESULTA CERO PORQUE $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$
o $\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$
es el producto punto entre dos vectores perpendiculares y $\cos 90° = 0$ Portanto el resultado es cero

1.37 el ángulo $\theta = 36.554°$ separa a los vectores
$2\hat{i} + 3\hat{j} - 1\hat{k}$ y $9\hat{i} + 1\hat{j} - 3\hat{k}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.38

a) 5.385

b) 11.7898

1.39: $(5.385)(11.7898)\operatorname{sen} 36.554^\circ = 37.8122$

37.8122.

1.40 la magnitud de

$$\left|(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}) \times (9\hat{i}+7\hat{j}-3\hat{k})\right| = 37.81$$

es lo mismo que

$$|2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}|\,|9\hat{i}+7\hat{j}-3\hat{k}|\operatorname{Sen} 36.554^\circ = 37.81$$

del problema 1.39

1.41 la magnitud de un producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$ es igual a $|\vec{A}||\vec{B}|\operatorname{Sen}\theta$

1.42 la magnitud de todo vector unitario es uno

magnitud del vector unitario del vector $5.7735\hat{i}+5.7735\hat{j}+5.7735\hat{k}$ es uno.

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.43 $0.57735\hat{i} + 0.57735\hat{j} - 0.57735\hat{k}$

1.44 la magnitud del vector $5.773\hat{i} + 5.773\hat{j} - 5.773\hat{k}$ es 10 y la redación que hay entre la magnitud de este vector y la magnitud de su vector unitario es por tanto 1:10.

1.45 $(\vec{D}\times\vec{A})\cdot(\vec{C}\times\vec{B}) = (\vec{D}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{B}) - (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{D}\cdot\vec{B})$

$= -150$

1.46 EL VOLUMEN DE UN PARALELEPIPEDO FORMADO POR VECTORES COPLANARES ES CERO

1.47 $A\cdot(B\times C)$

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(-1-14) + 5(2-28) + 3(4+4)$$

$$= -60 - 130 + 24 = |-166|$$

Volumen = 166 unidades cubicas

1.48 EL VOLUMEN ES CERO

1.49 LOS VECTORES SON COPLANARES POR TANTO EL VOLUMEN ES CERO

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.50 $12t^2\hat{i} + (6t^3 - 15t^2)\hat{j} + (6t+3)\hat{k}$

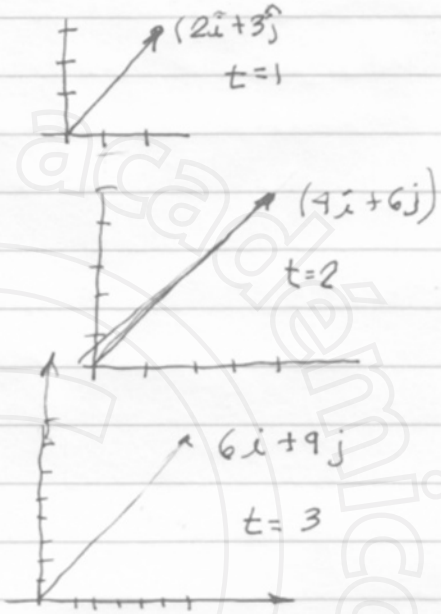
1.51 $12t^2\hat{i} + 2\hat{j} + (24t+10)\hat{k}$

1.52 $2\hat{i} + 3\hat{j}$ Para $t=1$

$4\hat{i} + 6\hat{j}$ Para $t=2$

$\vec{0}$ Para $t=0$

$6i + 9j$ Para $t=3$



1.53

$2i + 3j$ Para $t=1$

$4i + 12j$ Para $t=2$

$\vec{0}$ Para $t=0$

1.54 $25\hat{i} - \hat{j}$ Para $t=1$

$25\hat{i} - 4\hat{j}$ Para $t=2$ $25i - 16j$ Para $t=4$

$25i$ Para $t=0$

$25i - 9j$ Para $t=3$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

PROBLEMA RETO 1

$$\vec{A} = \cos\varphi\,\hat{i} + \operatorname{Sen}\varphi\,\hat{j}$$

$$\vec{B} = -\operatorname{Sen}\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\varphi & \operatorname{Sen}\varphi & 0 \\ -\operatorname{Sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(\cos^2\varphi + \operatorname{Sen}^2\varphi) = \hat{k}$$

$$\hat{B}\times\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\operatorname{Sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(\cos\varphi) - \hat{j}(-\operatorname{Sen}\varphi) + 0\hat{k}$$

$$= \cos\varphi\,\hat{i} + \operatorname{Sen}\varphi\,\hat{j} = \vec{A}$$

$$\hat{k}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\varphi & \operatorname{Sen}\varphi & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(-\operatorname{Sen}\varphi) - \hat{j}(\cos\varphi) + 0\hat{k}$$

$$= -\operatorname{Sen}\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} = \vec{B}$$

la magnitud de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es uno porque

$\operatorname{Sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ Por identidad Trigonometrica

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

PROBLEMA RETO 2

RESPUESTA

$$|\vec{A}+\vec{B}|^2 = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B}) =$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} =$$

$$= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$$

PROBLEMA RETO 3

en el caso de

$$(3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k})\cdot((3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k})\times(3\hat{i}-4\hat{j}-2\hat{k}))$$

es cero porque $(3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k})\times(3\hat{i}-4\hat{j}-2\hat{k})$ es perpendicular a $3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}$ portanto el producto punto es cero

enel caso de $(3\hat{i}-4\hat{j}-2\hat{k})\times(9\hat{i}-12\hat{j}-6\hat{k})$ Son vectores paralelos portanto el producto cruz es cero.

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1 6.9867 slug

2.2 5.5772 ft

2.3 90720 gr

2.4 14312.79 N

2.5 4.628×10^{10} mm

2.6 6886400 ft^2

2.7 263.76 m^3

2.8 467.82 Nm

2.9 59.033 $\frac{mi}{h}$

2.10 1390393.701 $\frac{in}{min^2}$

2.11 0.2175 $\frac{lb}{in^2}$

2.12 a) $\frac{Nm^2}{Kg^2}$ b) $\frac{lb_f\ ft^2}{slug^2}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.13 Tiene unidades Nm
llamada Joule.

2.14 K debe tener unidades de fuerza sobre distancia

EN (SI) $\frac{N}{m}$ y en S. ingles $\frac{lb}{ft}$

2.15

$(Kg\ \frac{m}{s})\ (slug\ \frac{ft}{s})$ etc.

2.16 $vt + at^2$ es dimensionalmente congruente.
por tanto es correcta.

2.17 $5.976725161 \times 10^{19}\ m$

2.18 48 000 000

2.19 24808.32 lt

2.20 $0.76825856\ \frac{Nm}{s}$

2.21 $6.225858\ \frac{Nm}{Kg}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.22 $38\,282\,117.4 \frac{in^3}{slug}$

2.23 $0.0007708 \frac{Ns}{m^2}$

2.24 342000 Watts

2.25 $1940.37 \frac{slug}{ft^3}$

2.26 31500 adimensional.

2.27 $3.5396 \; Kg \frac{m}{s^2}$

2.28 766.656 N

2.29 $0.5434 \frac{slug}{ft^2}$

2.30 $300{,}000 \frac{N\,m}{s^6}$

2.31 $Kg\frac{m^2}{s^3}$ o $N\frac{m}{s}$ o $\frac{Jou}{s}N\frac{m}{s}$ o Watt son equivalentes.

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.32 $0.050025 \frac{lb}{in^2}$

2.33 significa que hay un incremento en la rapidez de 45 m/s cada segundo que pasa.

2.34 $6654.48 \frac{N\,s^2}{m}$

2.35 136080 gr

2.36 2π radianes equivale a un angulo de 180° y 2π es 6.2831 aunque 2π radianes es numericamente igual a 2π ya que el radian es unidad adimensional.

2.37 $2m(0.67rad)$ y $2m(0.67)$

el resultado es el mismo 1.34 m

2.38 $(-18\hat{i} + 16\hat{j} - 2\hat{k})\frac{m}{s}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.39 $2.022151727 \times 10^{29} \frac{Kg\ m}{s}$

2.40 54 Nm

2.41 2112.6 h

2.42 $66.657 \frac{mi}{h}$

2.43 $315 \frac{m}{s^2}$

2.44 $12250\ Kg\ \frac{m}{s}$

2.45

98034000.054354000836321 km

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1 $V_{Marte} = 86887.91 \frac{km}{h}$

3.2 $\vec{v} = -55213.42 \frac{ft}{min} \hat{i}$

3.3 a) $v = 3765.98 \frac{mi}{h} \hat{j}$

b) 514.35 S desde que empieza a frenar

c) 432945.76 m

3.4 rapidez media $= 550.65 \frac{ft}{min}$

3.5 a) $\vec{a} = 1.543209 \times 10^{-6} \frac{m}{s^2}$

b) $0.54683 \frac{ft}{min}$

3.6

a) EL RELOJ MARCA LAS 13:05

b) EL TREN 1 RECORRE 6670 m
EL TREN 2 RECORRE 8330 m

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.7

a) $\vec{r}(14s) = 4.34\,m\,\hat{i} + 7.24\,m\,\hat{j} + 17.16\,m\,\hat{k}$

b) $t = 8.47156\,s$

c) $\vec{v} = 0.06\,\frac{m}{s}\,\hat{i} + 0.16\,\frac{m}{s}\,\hat{j} + 0.44\,\frac{m}{s}\,\hat{k}$

3.8

a) $\vec{a} = 43.232\,\frac{ft}{s^2}\,\hat{i}$

b) $t = 4.896\,s$

3.9

a) distancia = 666.55 m

b) distancia = 400 m

3.10 a) rapidez $v = 60\ m/s$

b) distancia = 4800 m

3.11 RAPIDEZ $v = 62.35\,\frac{Km}{h}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.12 a) distancia = 480.23 Km

b) $|\vec{a}| = 30375 \frac{Km}{h^2}$

c) $t = 0.01582\ h$

3.13 distancia = 189.76 m

3.14 a) altura del edificio = 95.6 m

b) $t = 4.4147\ S$

3.15 tiempo = 8.282 S

3.16 a) $t = 7.0385\ S$

b) distancia = 2393.09 m

3.17 a) altura maxima = 662.38 m

b) alcance maximo = 3807.7092 m

c) $t = 23.24\ S$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.18 a) $\vec{V_f} = 1383 \frac{m}{s} \hat{j}$

b) altura maxima = 34 187.05 m $\hat{j}$

c) alcance horizontal = 97551.4 m $\hat{i}$

3.19 $y(x) = 0.839x - 3.0912 \times 10^{-3} x^2$

3.20 a) $\theta = 33.54°$

b) $t = 1.042 s$

c) Altura de choque = 10.9387 m

3.21 a) $t = 4.6744 s$

b) $V_o = 3.799987 \frac{m}{s}$ = Rapidez

3.22 a) $t = 0.6736123 s$

b) dist = 1.01418 m

3.23 a) $t = 5.091 s$

b) $\vec{V} = 6.8566 \hat{i} \frac{m}{s} - 3.3555 \frac{m}{s} \hat{j}$

3.24 a) $V_T = 0.698061 m/s$

b) $\omega = 3.4903 rad/s$

c) $a_c = 2.436 m/s^2$

d) $t = 2.31594 min$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.26

$\vec{V}_A = -1.175 \frac{m}{s}\hat{i} + 0.84425 \frac{m}{s}\hat{j} + 2.1878 \frac{m}{s}\hat{K}$

3.27

$V_T = 11.0736 \frac{m}{s}$

3.28

a) $-30 \frac{m}{s}\hat{i} + 21 \frac{m}{s}\hat{j} = \vec{V}_T$

b) $V_T = 7208.5958 \frac{ft}{min}$

3.29

a) $\vec{\alpha} = -4.75 \frac{rad}{s^2}\hat{K}$

b) $\vec{\omega} = -8.37 \frac{rad}{s}\hat{K}$

3.30

a) Desplazamiento $= 6\hat{i} + 9\hat{j}$

b) $\vec{v} = 6\hat{i}\frac{m}{s} + 9\frac{m}{s}\hat{j}$

c) $\vec{v}_{(1.5s)} = 6\frac{m}{s}\hat{i} + 9\frac{m}{s}\hat{j}$

d) $\vec{a}_{(2s)} = 6\frac{m}{s^2}\hat{j}$

e) $\vec{a} = 4.8\frac{m}{s^2}\hat{e}_\theta + 3.5999\frac{m}{s^2}\hat{e}_r$

f) radio de curvatura $\rho = 35.154\,m$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.31

a) Ya que la rueda esta tocando el suelo con el punto A de su periferia la velocidad del centro de la rueda hacia la derecha en el sentido $\hat{\imath}$ se anula con la velocidad Tangencial de la rueda en el punto A porque son iguales en magnitud y de sentidos contrarios ∴ la velocidad del punto A es cero.

b) $\vec{a}_A = -34.175196 \frac{ft}{s^2}\hat{\imath} + 1261.39 \frac{ft}{s^2}\hat{K}$

3.32

a) $\vec{v}(t) = 4t\hat{\imath} + 4t\hat{\jmath} + 4t\hat{K}$

b) $\vec{a}(3s) = 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 4\hat{K}$

c) $\vec{a}_c(3s) = \vec{0}$

d) radio de curvatura $\rho \to \infty$ tiende a infinito porque en realidad el movimiento es uniformemente acelerado en linea recta. Por tanto la curvatura es cero y el radio de curvatura es muy grande o tiende a infinito.

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.33

a) $|\vec{a}_T| = 0.4025 \frac{m}{s^2}$

b) $|\vec{a}_c| = 2.3786 \frac{m}{s^2}$

c) $|\vec{a}_{TOTAL}| = 2.3695 \frac{m}{s^2}$

3.34

a) $|\vec{\alpha}| = 0.72722 \frac{rad}{s^2}$ el modulo es positivo aunque el sentido de la aceleracion angular es contrario al de la velocidad angular inicial.

b) $|\vec{a}_T| = 0.1818 \frac{m}{s^2}$ en sentido contrario al movimiento de la particula.

3.35

$|\vec{a}| = |\vec{a}_c| = 0.1315997 \frac{m}{s^2}$

3.36

$$\vec{r}(t) = (4p^3t^3 + 3p^2t^2)\hat{i} + pt\hat{j} + p\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t) = (12p^3t^2 + 6p^2t)\hat{i} + p\hat{j} + p\hat{k}$$

$$\frac{d^2(r)}{dt^2} = \vec{a}(t) = (24p^3t + 6p^2)\hat{i}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.37

$V_T = 4.801 \frac{m}{s}$

$V_N = 12.08 \frac{m}{s}$

$a_T = 14.7973 \frac{m}{s^2}$

$a_n = 19.3128 \frac{m}{s^2}$

3.38

a) $\vec{V} = 0.09 \frac{m}{s} \hat{i} + 0.36 \frac{m}{s} \hat{j}$

$\vec{a} = -1.53 \frac{m}{s^2} \hat{k}$

b) $\vec{\omega} = -4 \frac{rad}{s} \hat{i} + 1 \frac{rad}{s} \hat{j} + 2 \frac{rad}{s} \hat{k}$

$|\vec{\omega}| = 4.582 \frac{rad}{s}$

3.39

$\vec{v_A} = -19.79 \frac{m}{s} \hat{i} + 0.398945 \frac{m}{s} \hat{j} + 12.93 \frac{m}{s} \hat{k}$

$\vec{a_A} = -34.33178 \frac{m}{s^2} \hat{i} - 4.148 \frac{m}{s^2} \hat{j} - 59.391 \frac{m}{s^2} \hat{k}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.40

a) $V = 23.321518 \frac{m}{s}$

b) distancia = 72.48 m

c) $V = 23.882692 \frac{m}{s}$

3.41

Considerando la velocidad inicial de $4\frac{m}{s}\hat{i} + 3\frac{m}{s}\hat{j}$

la posicion de la particula a los 3s es

$$r(3s) = 30\,m\hat{i} + 22.5\hat{j} + 72.9\hat{k}$$

3.42

$$\vec{v} = -12.07485\hat{e}_r + 3296.056\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} = 90960.\hat{e}_r - 1032.099\hat{e}_\theta$$

3.43

$$V = \sqrt{\left(50\theta e^{5\theta^2}\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(5e^{5\theta^2}\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.44

a) $\vec{V}(1s) = -5\pi\,\hat{j}$

b) $\vec{a}(2s) = -5\pi^2\,\hat{i}$

3.45

a) $\vec{V}(t) = 164.87\cos 2\pi t\,\hat{j} + 61.84\cos 2\pi t\,\hat{k}$

$\vec{a}(t) = -1035.9136\,\text{Sen}\,2\pi t\,\hat{j} - 388.56\,\text{Sen}\,2\pi t\,\hat{k}$

b) $|\vec{V}(5s)| = 53.68\ \frac{m}{s}$

$|\vec{a}(4s)| = 0\ \frac{m}{s^2}$

3.46

a) $\vec{V} = -6i + \left(3\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{2}\pi t\,\text{Sen}\,\frac{\pi}{2}t\right)\hat{j} + \left(3\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{2}\pi t\,\text{Sen}\,\frac{\pi}{2}t\right)\hat{k}$

Para $t=5$ $\quad \vec{V}(5s) = -6i - 23.56\,j - 23.56\,\hat{k}$

$\vec{a} = 0\hat{i} + \left(-\frac{3}{2}\pi\,\text{Sen}\,\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{2}\pi\,\text{Sen}\,\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{8}\pi^2 t\cos\frac{\pi}{2}t\right)\hat{j} + \ldots$

$\ldots + \left(-\frac{3}{2}\pi\,\text{Sen}\,\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{4}\pi^2 t\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{2}\pi\,\text{Sen}\,\frac{\pi}{2}t\right)\hat{k}$

Para $t=4s$ $\quad \vec{a}(4s) = 0i - 12\pi^2\hat{j} - 3\pi^2\hat{k}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.47

$$\vec{V} = \frac{-6\omega \operatorname{Sen}\omega t}{(3-\cos\omega t)^2}\hat{e}r + \frac{6\omega}{3-\cos\omega t}\hat{e}\phi$$

$$\vec{a} = \left[\frac{(3-\cos\omega t)^2\,\omega(-6\omega\cos\omega t) + 12\omega^2\operatorname{sen}^2\omega t\,(3-\cos\omega t)}{(3-\cos\omega t)^4} + \cdots - \frac{6}{(3-\cos\omega t)}\omega^2\right]\hat{e}r + \cdots + \left[2\left(\frac{-6\omega\operatorname{sen}\omega t}{(3-\cos\omega t)^2}\right)\omega\right]\hat{e}\phi$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.48

$\vec{V} = 30\,\hat{e}_\varphi - 8\hat{k}$

$\vec{a} = -15t^2\,\hat{e}_r$

3.49

$\rho = 16.73\,m$

3.50

$\vec{V} = 0\hat{e}_r - \frac{8}{16}\pi\omega\,\text{Sen}\,\omega t\,\hat{e}_\theta + 8\omega\,\text{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\cos\omega t\right)\hat{e}_\phi$

$\vec{a} = \left(-\frac{8}{16^2}\pi^2\,\text{Sen}^2\omega t - 8\left(\frac{\pi}{16}\right)^2\text{Sen}^2\omega t\,\text{Sen}^2\left(\frac{\pi}{16}\cos\omega t\right)\right)\hat{e}_r + \ldots$

$\ldots - \frac{8}{16}\pi\omega^2(\cos\omega t) - 8\omega^2\,\text{Sen}\left(\frac{\pi}{16}\cos\omega t\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\cos\omega t\right)\hat{e}_\theta + \ldots$

$\ldots - \pi\,\text{Sen}(\omega t)\,\omega^2\cos\left(\frac{\pi}{16}\cos\omega t\right)\hat{e}_\phi$

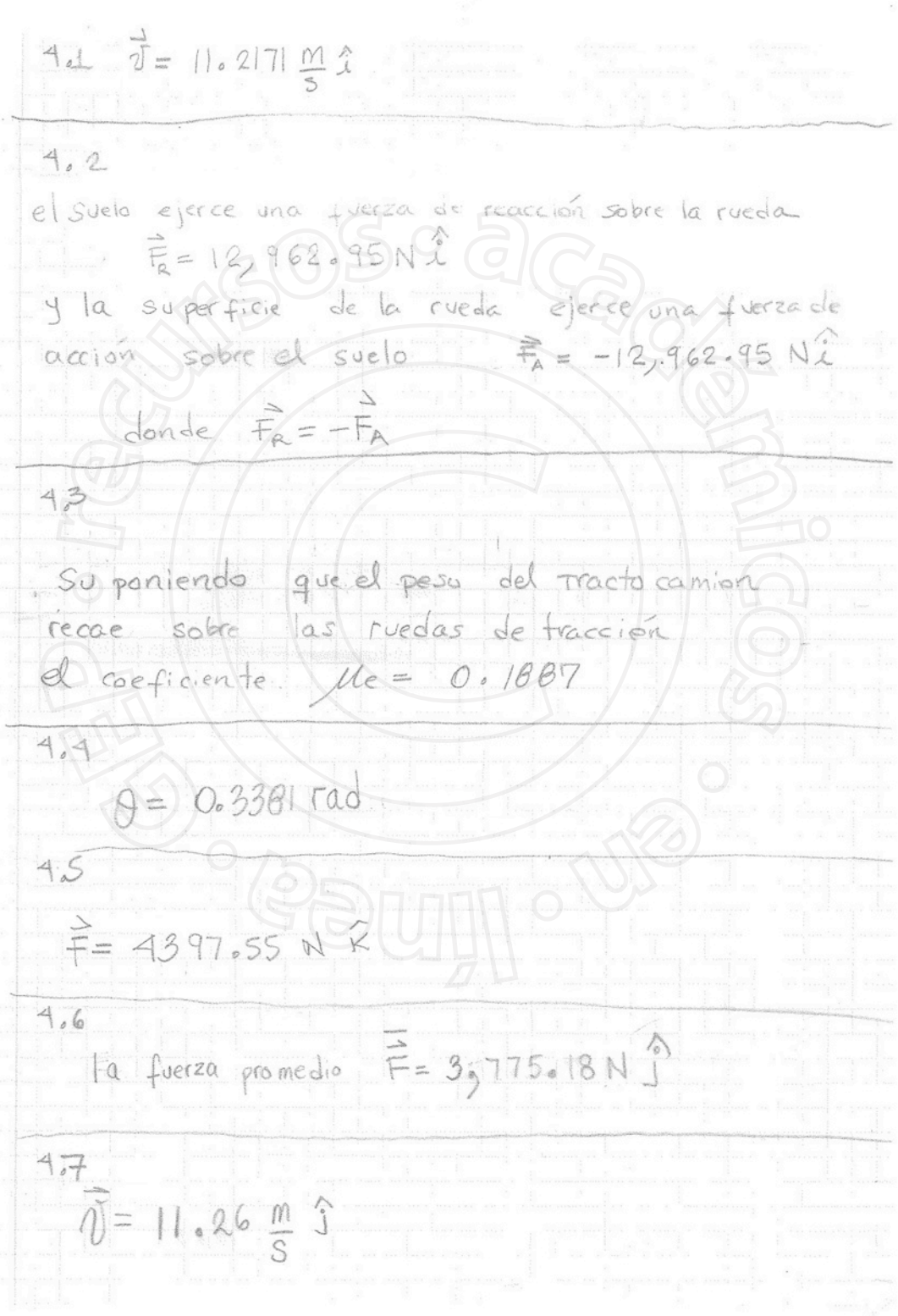
3.51

$\rho = 10454.52$

3.52 $\rho = 0.29026$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.



4.1 $\vec{v} = 11.2171 \frac{m}{s} \hat{i}$

4.2

el suelo ejerce una fuerza de reacción sobre la rueda

$\vec{F}_R = 12,962.95 N \hat{i}$

y la superficie de la rueda ejerce una fuerza de acción sobre el suelo $\vec{F}_A = -12,962.95 N \hat{i}$

donde $\vec{F}_R = -\vec{F}_A$

4.3

Suponiendo que el peso del tracto camión recae sobre las ruedas de tracción el coeficiente $\mu_e = 0.1887$

4.4

$\theta = 0.3381$ rad

4.5

$\vec{F} = 4397.55 N \hat{k}$

4.6

La fuerza promedio $\vec{F} = 3,775.18 N \hat{j}$

4.7

$\vec{v} = 11.26 \frac{m}{s} \hat{j}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.8

$3383.85\,N\,\hat{K}$

4.9

Cuando $\vec{a} = 6\ pies/s^2\ \hat{K}$ el peso que marcan las básculas son

Peso A = 261.11 lb

Peso B = 221.77 lb

Cuando $\vec{a} = -8\ pie/s^2\ \hat{K}$

el peso que marcan las básculas son

Peso A = 165.37 lb

Peso B = 140.57 lb

4.10

$F = 161.32\ N$ hacia la derecha.

4.11

$\vec{F} = 126.76\ \vec{N}$ hacia la derecha.

4.12

$|\vec{F}| = 68.82\vec{N}$

4.13

$\vec{\omega} = 1.8135\ \frac{rad}{s}\ \hat{K}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.14

$$\vec{a} = 10 \frac{m}{s} \hat{i}$$

4.15

$$\vec{a} = 1.459968 \frac{m}{s} \hat{i} + 1.459968 \frac{m}{s} \hat{j}$$

donde la magnitud de la aceleración $|\vec{a}| = 2.064 \ m/s^2$

4.16

para el cuerpo A la aceleración es

a) $\vec{a}_A = \left(-1.041992 \frac{m}{s^2} \hat{i} + 1.041992 \frac{m}{s^2} \hat{j} \right)$

$$\vec{a}_B = -1.4364 \frac{m}{s^2} \hat{j}$$

b) $|\vec{a}_A| = |\vec{a}_B| = 1.4364 \frac{m}{s^2}$

y en el problema anterior $|\vec{a}| = 2.064 \frac{m}{s^2}$

Por tanto comparativamente $|\vec{a}_A|$ y $|\vec{a}_B|$ son menores que $|\vec{a}|$!

c) la razon por la que no resulta lo mismo es porque cuando se aplica la fuerza debida a un peso la masa de ese peso forma parte del sistema y por tanto hay mas inercia y sera mas dificil acelerar al mismo y cuando se aplica una fuerza no hay incremento de masa en el sistema portanto se acelera más.

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.17

$$|\vec{a}_A| = |\vec{a}_B| = 0.5 \frac{m}{s^2}$$

4.18

$$\vec{a}_{m_1} = -2.2959 \frac{m}{s^2} \hat{k}$$

$$\vec{a}_{m_2} = 2.7134 \frac{m}{s^2} \hat{k}$$

$$\vec{a}_{m_3} = -0.41743618 \frac{m}{s^2} \hat{k}$$

4.19

$$\vec{v} = 26.1107 \frac{m}{s} \hat{i} - 6.6458 \frac{m}{s} \hat{j}$$

4.20

$$\vec{v} = 13.7968 \frac{m}{s} \hat{i} - 6.6458 \frac{m}{s} \hat{j}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.21

$\vec{a}_{globo} = 2.30968 \frac{m}{s^2} \hat{k}$

1.22

a) TIENE QUE REBOTAR LA ESFERA CINCO VECES PARA QUE LA ALTURA DEL REBOTE SEA 0.090145152 m LO CUAL ES CERCANO A 9 cm

b) en el primer rebote la altura es 0.618 m
en el 2° rebote la altura es 0.381924 m
en el 3° rebote la altura es 0.236029032 m
en el 4° rebote la altura es 0.145865991 m
en el 5° rebote la altura es 0.090145152 m

$\frac{1}{0.618} = 1.618$

$\frac{.618}{0.3819} = 1.618$

$\frac{.3819}{0.2360} = 1.618$

$\frac{.236}{0.1458} = 1.618$

$\frac{0.1458}{0.090145} = 0.618$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.23

las velocidades $\vec{v}_A$ y v_B despues del choque son. ya que e=1

$\vec{v}_A = 0 \frac{m}{s} \hat{j}$

$\vec{v}_B = 20 \frac{m}{s} \hat{j}$

1.24

la maxima rapidez es $|\vec{v}| = 31.33396 \frac{m}{s}$

1.25

la maxima rapidez es $|\vec{v}| = 16.13529 \frac{m}{s}$

1.26

$\Delta L_{R1} = 24.9 \text{ cm}$

$\Delta L_{R2} = 18.7328 \text{ cm}$

1.27

r_c = radio de Curvatura

$r_c = 49.8599 \text{ m}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.28

Respuesta $\vec{\omega} = 5.8596 \frac{rad}{s}$

$\theta = 8.2132°$

4.29

el Peso del cuerpo A $P_A = 322.8433N$

4.N30.D 4 PROBLEMA 30

Respuesta $V_{te} = 47.9979 \frac{m}{s} \hat{i}$

4.31

en la dirección horizontal no sentirá fuerza alguna y en dirección vertical Sentira una fuerza con magnitud de 2684.7N

4.32

DESPLAZAMIENTO = $0m\hat{i} + 99.4671m\hat{j} + 17.5387m\hat{k}$

4.33

la distacia recorrida es.

$d = 37.9518\ m$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

9.34

EL CABLE FALLA PORQUE SOLO PUEDE RESISTIR 1721.65 N Y EL CABLE DEBE RESISTIR MÁS DE 1765.8 N

9.35

$$\vec{F} \doteq -14.8149\ \text{N}\ \hat{k}$$

9.36

la magnitud de la fuerza media que ejerce cada liga es $|\vec{F}| = 9.375\text{N}$

9.37

a) $|\vec{v}| = 10.0762\ \frac{m}{s}$

b) $|\vec{F}| = 9\text{N}$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.38

a) La magnitud de la fuerza que ejerce la cuerda sobre B $|\vec{F}_B| = 2916\,N$

b) la magnitud de la fuerza que ejerce el cable sobre la A es

$|\vec{F}_A| = 1620\,N$

4.39

$$\vec{v}_f = -2.6478\ \frac{m}{s}\ \hat{k}$$

4.40

a) $W_K = 75$ Joules

b) $P_{OT} = 0.02011$ hp

4.41

$$K = 23621.94\ \frac{N}{m}$$

4.42

a) $\vec{v}_{Af} = 1.1949\ \frac{m}{s}\ \hat{i}$, $\vec{v}_{Bf} = -4.9\ \frac{m}{s}\ \hat{i}$

b) $\beta = 0.8036$ rad

c) $\Delta t = 3.068\ s$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.43

a) la velocidad del globo mientras el hombre asciende es $\vec{v}_G = -0.4737 \frac{m}{s} \hat{k}$

b) Cuando el hombre esta sobre la canasta todo el sistema esta en reposo respecto a tierra.

Nota: el centro de masa del sistema en ningun momento cambia de posición.

4.44

Respuestas

a) $\vec{\tau} = -530.51 \text{ Nm } \hat{j}$

b) $M_{max} = 108.15 \text{ Kg}$

c) $\vec{v} = 188.49 \frac{m}{s} \hat{k}$

4.45

a) Cuando el niño esta sobre el plato a 1.5m del eje de giro la velocidad angular es

$$\vec{\omega} = 2.586 \frac{rad}{s} \hat{k}$$

b) Cuando el niño esta sobre el plato alejado 0.75m del eje de giro la velocidad angular $\vec{\omega}$ es.

$$\vec{\omega} = 4.21933 \frac{rad}{s} \hat{k}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.46

a) Cuando los patinadores estan separados 2.5 m la velocidad angular $\vec{\omega}$ es

$$\vec{\omega} = 1.6 \frac{rad}{s} \hat{K}$$

b) Cuando los patinadores estan separados 1 m la velocidad angular $\vec{\omega}$ es

$$\vec{\omega} = 10 \frac{rad}{s} \hat{K}$$

4.47

la rapidez del centro de masa al recorrer 1 m cuesta abajo es $|\vec{v}| = 2.557342 \frac{m}{s}$

4.48

Respuesta

a) la fuerza normal en el punto más alto del Rizo es

$\vec{N} = 2.9974\ N$ hacia abajo.

b) la distancia horizontal que recorre la esferita antes de tocar el suelo es dist horizontal $= 0.84911\ m$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.49

a) la aceleración del centro de masa de la esfera es

$$\vec{a}_{cm} = 3.38275 \frac{m}{s^2} \hat{j}$$

b) la velocidad de la masa colgante justo antes de chocar con el suelo es

$$\vec{v} = -2.60106 \frac{m}{s} \hat{k}$$

4.50

a) $\vec{\alpha} = 32 \frac{rad}{s^2} \hat{i}$

b) $\vec{\omega} = 56.5685 \frac{rad}{s} \hat{i}$

c) $W_k = 125000$ Joules.

d) Potencia media $= 70710.7562$ Watts

e) POTENCIA INSTANTÁNEA $= 141421.25$ Watts

4.51

a) la velocidad del centro de masa es

$$\vec{v}_{cm} = 0.5 \frac{m}{s} \hat{j}$$

b) la velocidad angular del sistema es

$$\vec{\omega} = 1.6 \frac{rad}{s} \hat{k}$$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

PROBLEMA RETO

a) $\vec{v}_A = -4.4294 \ m/s \ \hat{k}$

b) $\vec{\omega}_p = 29.528 \ \frac{rad}{s} \ \hat{i}$

c) $\Delta\theta = 5.7143 \ rad$

D.R. © 2013 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1
a) 0,9678 atm
b) 14,227 Lbf/in^2
c) 98,066 Kpa
d) 735,55 mmHg

1.3

$$4{,}1868\,\frac{kJ}{kgK}$$

1.4
a) 98,6 ºF
b) 558,27 ºR

1.5
m= 164,36 lb_m

1.6
41,32 mH_20

1.7
0,0576 g/cm^3

1.8
m = 2,1822 × 10^9 Ton de H_2O

1.9
a) 423 K
b) –460 ºF
c) 1391,6 ºR
d) –449,6 ºF
e) 50 K
f) 9,99 ºC
g) 200 K

1.10
a) 2 mili-in
b) 10 mili-milla
c) 12 mil-ft^3
d) 1 giga-años
e) 7 mega-volts
f) 3.5 micro-toneladas

1.11
a) I
b) E
c) E
d) I
e) I
f) E

1.12
a) 6,2365 × 10^4
b) 1,987
c) 0,083147

1.13
428,203 KPa

1.14

$$P = \frac{T}{0{,}9315V - 0{,}058936} - \frac{5478{,}82}{V^2}$$

1.15
a) 219,526
b) 326,9598
c) 3269,598

1.16
a) 0,357 mol
b) 78 g
c) 0,138 milimol
d) 1,76 × 10^4 Ton
e) 0,59 mol; f) 837 g

1.17
417 KPa

1.19
1,5 m

1.22
218,1 KPa

1.23
a) 0,255 lb_f
b) 1,5 lb_f

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.24
a) Representación gráfica
b) $P_2 = 837{,}075$ KPa

1.25
28,02 ft

1.26
B = 25° y A= 102,5°

1.27
b) $\Delta T = 10°$

1.28
T = – 40,045

1.29
$2{,}426\frac{m}{s}$

1.30
$F_2 = 60{,}7$ KN

1.31
h_1=0,428 (m)
h_2=4,3 (m)
h_3=4,687 (m)
h_4=0,8 (m)

1.32
49,05 KPa

1.33
P = 90,7 KPa

1.34
$\frac{m}{s}$

1.35
c = m

1.37
b

1.38
a

1.39
c

1.40
a

1.42
b

1.43
$\left(\frac{m}{s}\right)$

1.44
a) $0{,}91\left(\frac{g}{cm^3}\right)$
b) $0{,}91\left(\frac{kg}{1}\right)$
c) $901\left(\frac{kg}{m^3}\right)$

1.45

	Masa (g)	**Volumen** (cm^3)	**Densidad** $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$
Hielo	184	**200**	920
Poliestireno expandido	10	1000	**10**
Vidrio	**130**	50	2,600
Agua de mar	510	**500**	1,020

1.46
a) No
b) $\rho = 11{,}3\frac{g}{cm^3}$ $\rho = 7{,}8\frac{g}{cm^3}$ $\rho = 2{,}7\frac{g}{cm^3}$

$\rho = 0{,}86\frac{g}{cm^3}$

1.47
$\gamma = 9200\frac{N}{m^3}$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.48
m_2= 3,33 kg

1.49
31,9 N

1.50
1482,6 J

1.51
a) 3936,52 J
b) 1986,52 J

1.52
a) 75 J
b) 300 J
c) 75 J
d) 450 J

1.53
a) $a = \frac{KJ}{kg - K}$; $b = \frac{KJ}{kg - K^3}$

1.54
m= 24,012Kg
w= 235,55 kg_f

1.55
$PM = 28,85 \frac{kg}{kgmol}$

1.56
$PM = 28,95 \frac{kg}{kgmol}$

1.57
No se llega al equilibrio térmico entre si

1.58
b

1.59
La función cuadrática que representa estos datos es: $Y = ax^b$; que se muestra en la segunda gráfica representación cuadrática b.

1.60
La gráfica segunda sigue la ecuación de correlación apropiada $Y = ax^b$; la comprobación se realiza por medio del factor de correlación, cuyo valor es $r = 0,9$

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1

T ºC	P KPa	v $\frac{m^3}{kg}$	u $\frac{kJ}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$	Calidad x
150	**300**	0,63388	2570,8	2761,0	1,0
151,86	500	0,26885	2016	2150,52	0,7163
1200	500	1,35964	4466,8	5146,6	vapor sobrecalentado
17,50	2,0	16,751	654,98	688,48	0,25
147,93	450	0,1134	1148,029	1200	0,272
50	12,35	8.5	1787,5418	1892,5128	0,7064

2.2

T ºC	P KPa	v $\frac{m^3}{kg}$	u $\frac{kJ}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$	Calidad x
0	0,294	0,045	–	329,69	0,6538
55,89	0,200	0,13033	–	450	vapor sobrecalentado
100	0.300	0,09860	–	490,482	vapor sobrecalentado
101,46	0.500	0,05829	–	490	vapor sobrecalentado
103,24	0,250	0,1200	–	494,135	vapor sobrecalentado
50	1,3180	0,0085	–	357,65	0,5340

Para obtener los datos de energía interna puedes consultar tablas adicionales a las que te proporcionamos

2.3

T ºC	P KPa	v $\frac{m^3}{kg}$	u $\frac{kJ}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$	Calidad x
0	429,29	0,2894	–	1442,22	1,00
15,84	200	0,6886	–	1500	vapor sobrecalentado
-30	119,46	0.001476	–	44,26	0,00
48,04	2010	0,0628	–	1366,25	0,90
65	450	0,35615	–	1599,9	vapor sobrecalentado
-40	71,72	0,001450	–	0,00	0,00 líquido saturado

Para obtener los datos de energía interna puedes consultar tablas adicionales a las que te proporcionamos

2.4

T ºC	P KPa	v $\frac{m^3}{kg}$	u $\frac{kJ}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$	Calidad x
-20	15,093	0,108847	–	178,736	1.00
67,25	0,450	0,04959	–	230	Vapor sobrecalentado
-30	0.10041	0,48261	–	724,135	0,50
-15	0,23632	0,27671	–		0,90
90	0,40	0,059846	–	246,017	Vapor sobrecalentado
70	300	0.075706	–	233,33	Vapor Sobrecalentado

Para obtener los datos de energía interna puedes consultar tablas adicionales a las que te proporcionamos

2.5

$3380\ \frac{lb_f}{in^2}$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.6

$m_f = 1{,}6\text{kg}$ $\quad V_f = 0{,}00032\text{m}^3$

$m_v = 0{,}4\text{kg}$ $\quad V_g = 0{,}0416\text{m}^3$

2.7

$x = 0.0208$

2.9

Sustancia	**T** ºC	**x**	**v** $\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$
Amoniaco	28	80	0,0941
Freón -12	55	50	0,006692
Agua	30	90	29,6038
Nitrógeno	-184	40	0,0273

2.10

$m_l = 0{,}339\text{kg}$; $\quad m_v = 1{,}022\text{kg}$

$v = 0{,}0004\text{m}^3$; $\quad v_v = 0{,}280\text{m}^3$

2.11

12,73 bar, vapor sobrecalentado

2.12

V = 0,0631 m^3

2.13

P MPa	**T** ºC	**v esp.** $\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$	**u** $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$	**h** $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$	**Estado**
0,5	15,74	0,025	170,32	182,80	0,6034 mezcla líquido-vapor
0,28	15,74	0,125	241,969	264,473	vapor sobrecalentado
0,28	-1,23	0,0719	226,38	246,52	Vapor saturado

2.14

Variables Termodinámicas				
P MPa	**T** ºC	**v** $\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$	**u** $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$	**h** $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
4,6886	260	0,0218	1865,84	1968,12
1,724	260	0,1345	2706,39	2942,32

2.15

94,42 ºC

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.16

a) 16,6%

b) $v_f = 0{,}00107 \frac{m^3}{kg}$, $v_g = 0{,}000899 \frac{m^3}{kg}$

2.17

Estado	P kPa	T ºC	v $\frac{m^3}{kg}$	u $\frac{kJ}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$	x %	Estado físico
1	150	111,37	1,0036	2519,6	2693,5	100	vapor saturado
2	47,39	80	1,0036	967,02	1014,6	29,44	mezcla líquido-vapor
3	47,39	80	0,001032	334,84	334,88	0,00	líquido saturado
4	150	–	0,001053	446,92	467,08	–	líquido comprimido

2.18

Estado	P MPa	T ºC	v $\frac{m^3}{kg}$	u $\frac{kJ}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$	x %	Estado físico
1	11,274	320	0,01	2101,03	2214,05	60,76	mezcla líquido-vapor
2	3,0	320	0,085	2787,48	3042,22	–	vapor sobrecalentado
3	2,5	223,99	0, 07998	2603,1	2803,1	100	vapor saturado
4	2,5	223,99	0,002998	996,73	1004,25	2,29	mezcla líquido-vapor
5	11,274	320	0,002998	2101,03	2214,05	60,76	mezcla líquido-vapor

2.19

Estado	P MPa	T ºC	v $\frac{m^3}{kg}$	u $\frac{kJ}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$	Δv	Δu	Δh	Estado físico
1	5,0	80	0,0010268	333,69	338,83	–	–	–	líquido comprimido
2	15	100	0,0010361	414,72	430,26	–	–	–	líquido comprimido
Incremento							81,03	91,17	

2.20

Estado	P kPa	T ºC	v $\frac{m^3}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$	s $\frac{kJ}{kg\ ºK}$	Δv	Δh	Δs	Estado físico
1	1642,98	42	0,001735	381,35	1,3885	–	–	–	líquido saturado
2	2000	140	0,1057	1842,0	5,742	–	–	–	vapor sobrecalentado
Incremento						,103965	1460,65	4,3535	

2.21

Estado	P MPa	T ºC	v $\frac{m^3}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$	s $\frac{kJ}{kg\ ºK}$	Δv	Δh	Δs	Estado físico
1	0,9	60	0,022012	219,373	0,73633	–	–	–	Vapor sobrecalentado
2	1,21932	50	0,01417	206,45	0,67967	–	–	–	vapor saturado
Incremento						-0,007842	-12,923	-0,05666	

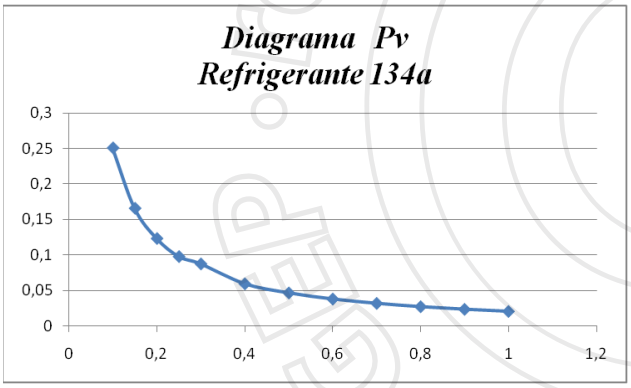
Son negativos los resultados

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.22
70,14 kPa
18,89 m^3

2.23

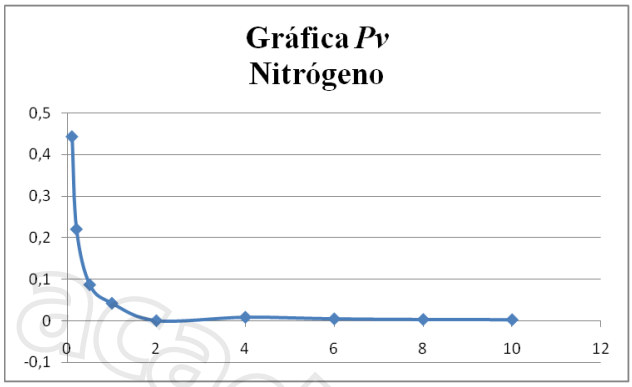
P kPa	v $\frac{m^3}{kg}$
01	0,25102
0,15	0,16592
0,2	0,12335
0,25	0,097798
0,3	0,08748
0,4	0,059402
0,5	0,046557
0,6	0,037958
0,7	0,31781
0,8	0,027113
0,9	0,23446
1,0	0,020473



2.24
a)

P MPa	v $\frac{m^3}{kg}$
0,1	0,442612
0,2	0,220007
0,5	0,086429
1,0	0,041876
2,0	0, 019541
4,0	0,008231
6,0	0,004421
8,0	0,002914
10,0	0,002388

b)



2.25
a) 125kPa
b) 1,42 g
c) 32%
d) 696 kPa

2.26
m = 295,5 kg y P 105,3 kPa

2.27
204,45 kPa, 231,88 kPa

2.28
24,65 psia

2.30

Ecuación	P MPa
Gas ideal	22,43
Estados correspondientes	21,33
Tabla de vapor	17,80

2.31

Ecuación	P MPa
Gas ideal	3,268
Van der Waals	2,33
Estados correspondientes	
Tabla de vapor	0,8

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.32

Ecuación	v $\frac{m^3}{kg}$	% error
Gas ideal	0,004452	86,43
Carta de compresibilidad	0,002404	0,70

2.33

Ecuación		% error
Gas ideal	1,861	17,28
Carta de compresibilidad	1,586	0,00
Tablas de vapor del R-134a	1,6	0,88

2.37

a) $v = 0,02314 \frac{m^3}{kg}$

b) $v = 0,01758 \frac{m^3}{kg}$

2.38

a) $T = 1083,42\ K$

b) $T = 1086,39\ K$

c) $T = 1085,05\ K$

2.39

a) 2042,2 kPa

b) 1968,98 kPa

2.42

a) 0,004452 y 86,4%

b) 0,002404 y 0,7%

2.44

a) $0,007636 \frac{L}{kg}$

b) $0,00075 \frac{L}{kg}$

2.46

a) W=424,9935 kJ

b) Q=2565,9315 kJ

2.47

Q= –33,3656 kJ

2.48

a) $w = -25,45056 \frac{kJ}{kg}$

b) $q = -221,5 \frac{kJ}{kg}$

2.49

W= 42,1638 kJ

P= 650 kPa

T= 161,98 °C

2.50

W= 11,3344 kJ

2.51

$q = 1222,485 \frac{kJ}{kg}$

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1
877,872 kJ

3.2

a) 91,55 $\frac{m}{s}$

b) 497,25 kJ

3.3
a) 343,171
b) 333,77

c) 349,21 $\frac{kJ}{hr}$

3.4
a) 2 453 kJ

b) 44,29 $\frac{m}{s}$

c) 30000 kN

3.5
h= 515,46 m

3.6

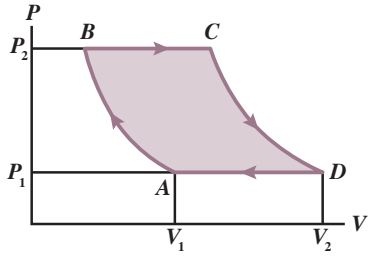
a) $v = 50{,}08\,\frac{m}{s}$

b) 0,41 m

3.7
1,18 MJ

3.8
465,6 J

3.9



$$W_{ciclo} = P_1(V_2 - V_1)\,\mathrm{Ln}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

3.10
1181,83 kJ

3.11
a) 12,5 kJ
b) 8,66 kJ
c) 12,5 kJ
d) 15,14 kJ

3.13
14,62 Kcal

3.14
T=100 ºC

3.15

a) $c = 0{,}435\,\frac{cal}{g\text{–}^{o}C}$, el tipo de material es berilio

b) $Q_{abs} = 1900{,}5$ cal y $Q_{des} = -2034{,}06$ cal

3.16
a) Q = 311430 J = 311,43 kJ

3.17
75 ºC

3.18
q'' = 3000 W

3.19

a) $\Delta x_A = 0{,}39$ m

b) $\Delta x_B = 0{,}295 \cong 0{,}3$ m

3.20

A = 1,27 $\frac{m^2}{maq.}$ A salón = 31,746 m²

3.21

k = 1,2 $\frac{W}{m\text{–}k}$

3.22
q'' = 3,48 kW

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.23

q'' = 1,98 kW

3.24

Nombre del Proceso	ciclo	*W* KJ	*Q* KJ	*ΔE* KJ
Adiabático Compresión	1-2	-250	0,0000	-250
Expansión Isobárica	2-3	800	1694,3	2494,3
Expansión Adiabática	3-4	1477,5	0,000	1477,5
Isocórico	4-1	0,000	-2087,20	-2087,20

3.25

31,897 KJ

3.26

Proceso	*W* kJ	*Q* kJ	*ΔU* kJ
Adiabático	-17,5000	0,000	-17,500
Isobárico	93,000	100,0	193,00
Isotérmico	133,58	133,58	0,000
Isobárico	-100,00	-353,33	-253,33

3.27

Proceso	Diagrama P-T	Diagrama P-V	Calor Absorbido-Cedido
A-B	Isocórico	Isocórico	Absorbe
B-C	Isobárico	Isobárico	Absorbe
C-A	Isotérmico	Isotérmico	Cede

3.28

Proceso	*W* J	*Q* J	*ΔU* J
A-B-C	**500**	**300**	**800**

	Nombre del Proceso	Expansión	Compresión	1º Ley de la Termodinámica
A-B	Isobárico	●	–	Q = ΔU - W
B-C	Isocórico	●	–	ΔU = Q
C-D	Isobárico	–	●	Q = ΔU - W
D-A	Isocórico	–	●	ΔU = Q

3.29

a) 1129,5 KPa
b) 252 ºC
c) –0,07136 kJ
d) –0,01791 kJ

3.30

a) 0,5

3.31

Estado	*P* KPa	*V* m^3	*T* K
1	$1{,}00 \times 10^5$	0,4	300
2	$2{,}14 \times 10^4$	1,2	193,3
3	$6{,}44 \times 10^4$	0,4	193,3

Proceso	*W* kJ	*Q* kJ	*U* kJ
1-2	-35,800	0,0	-35,800
2-3	-28,315	28,315	0,0
3-1	0,0	35,566	35,566

3.33

i = 1,67 volts

3.34

Q = -105,4 kJ

3.35

F = 50 N
w = 2,5 J

3.36

W = 786,971 kJ

3.37

W = –262,08 J

3.38

b) x_2 = 38,944 cm
c) W = –67,7 J

Nota: no existe inciso *a)* sino es parte de la definición del problema

3.39

Estado	*P* kPa	*T* °C	*v* $\frac{m^3}{kg}$	*h* $\frac{kJ}{kg}$	
1	700	80	0,2367	1625,8	Vapor sobrecalentado
2	700	13,82	0,18146	1455,38	Vapor saturado
3	290,67	-10	0,18146	693,95	X = 0,4316

Proceso	*W* $\frac{kJ}{kg}$	*Q* $\frac{kJ}{kg}$	*ΔU* $\frac{kJ}{kg}$
1-2	-38,668	-170,42	-131,752
2-3	0	-39,1076	-39,1076

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.40

Estado	P MPa	T °C	v $\frac{m^3}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$
1	0,21882	- 8 °C	0,19118	230,4356
2	0,21882			277,1565

Proceso	W $\frac{kJ}{kg}$	$Q = \Delta h$ $\frac{kJ}{kg}$	ΔU $\frac{kJ}{kg}$
1-2	45,69	427,209	381,519

3.41

Estado	P kPa	T °C	v $\frac{m^3}{kg}$	u $\frac{kJ}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$	
1	100	99,62	1,0168	1670,592	1772,276	Mezcla líquido-vapor
2	200	324,24	1,37268	2846,93	3110,128	Vapor sobrecalentado

Proceso	W $\frac{kJ}{kg}$	$Q = \Delta h$ $\frac{kJ}{kg}$	ΔU $\frac{kJ}{kg}$	Δh $\frac{kJ}{kg}$
1-2	504,22	1337,852	1176,338	1337,852

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

4.1
$T_2 = 168{,}014\ °C$
$m = 0{,}5655\ \frac{kg}{s}$
$A = 190\ cm^2$

4.2
$T = 231{,}03\ °C$
$m = 3{,}714\ \frac{kg}{s}$
$A = 239{,}65\ cm^2$

4.3
$T = 29{,}95\ °C$
$m = 2{,}2338\ \frac{kg}{s}$
para Freón 12

4.8
$T = 39{,}39\ °C$
$m = 1{,}6804\ \frac{kg}{s}$

4.12
$v = 35{,}28\ \frac{m}{s}$
$5{,}92\ \frac{kg}{s}$

4.17
Si es un proceso adiabático

4.19
$q = 1234{,}39\ \frac{MJ}{min}$
Se desprende calor al medio ambiente

4.20
W flecha $= -681{,}44\ \frac{kJ}{kg}$
$m = 760{,}65\ \frac{kg}{s}$
$W = 518{,}34\ MW$

4.21
$Ec = -6{,}928 \times 10^{-3}$
$W = 308{,}22\ kW$

4.22
$W = 6{,}373\ kW$

4.23
$v_e = 48{,}014\ \frac{m}{s}$
$v_s = 68{,}32\ \frac{m}{s}$
$W = 146{,}71\ kW$

4.24
$m = 500{,}35\ \frac{kg}{s} = 1801260\ \frac{kg}{hr}$
$Vs = 89{,}08\ \frac{m}{s}$

4.25
$W_{1\text{-}2} = 294\ kW$
$W_{1\text{-}3} = 686\ kW$
$W_T = 908\ kW$

4.26
$W = 45\ kW$

4.27
$m_B = 398{,}16\ \frac{kg}{hr}$
$Q = 277{,}78\ \frac{kJ}{s}$

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.28

$m_{\text{líquido comprimido}} = 3{,}5\ \frac{kg}{s}$

Nota: La presión del líquido comprimido al inicio es de 50 bar y la presión de la cámara es de 1 mPa.

4.29

$m = 1{,}1867\ \frac{kg}{s}$

$T = 250{,}45\ °C$

4.30

$m = 183{,}97\ \frac{kg}{min}$

$A = 0{,}2151\ m^2$

4.31

$v_1 = 1{,}7857\ \frac{m}{s}$

$v_2 = 0{,}2824\ \frac{m}{s}$

$W = 30{,}66\ kW$

4.33

$P = 0{,}18825\ MPa$

$d = 0{,}1085\ m^2$

4.35

$q = 9108{,}6\ \frac{kJ}{s}$

4.36

$T = 131\ °C$

4.37

$v = 301{,}183\ \frac{m}{s}$

4.38

$q = -\ 2733{,}8442\ kJ$

4.39

$T = 151{,}83\ °C$

$m = 36{,}7174\ kg$

4.41

$v_1 = 0{,}021249\ m^3$

$v_2 = 0{,}024996\ m^3$

$w = 0{,}7434\ kJ$

$q = 6{,}2369\ kJ$

4.42

$Q = 47{,}73\ MW$

4.43

$m = 0{,}07556\ \frac{kg}{s}$

4.44

$m = 91{,}6389\ kg$

4.45

$T = 118{,}1599\ °C$

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

5.1
e = 34,62%
q = 411,894 J

5.2
Qc = 13,788 kJ
Qf = 9,238 kJ

5.3
Qc = 12,846 kJ
Qf = 4,496 kJ
t = 0,05 s

5.4
e = 36,61%

5.5
$w = 2{,}222 \ \frac{kJ}{kg}$

$Qc = 5697{,}36 \ \frac{kJ}{kg}$

$Qf = 3475{,}38 \ \frac{kJ}{kg}$

5.6
e= 80%
Qc = 5 W
Qf =4 W

5.7
Tc = 400 K

5.8
e = 91,82%

5.10
e= 31,44%
$Qf = 863{,}5 \ \frac{kJ}{kg}$

5.12
e = 73,2 %

5.13
Qf = 11 W
Qc = 22 W
W = 11 W

5.14
Proceso Irreversible

5.15
e= 9,62%
QC = 24,90 kW
W = 2,40 kW

5.16
e= 75 %

5.17
e= 80%
e = 95%

5.18
e = 87,5 %
e = a5,1%

5.22
e = 28%
W = 583,33 W
Qc = 178,57 W
Qf = 128,57 W

5.23
e = 75%
Tf = 200 K
Qf = 200 J
Q = no es factible

5.30
e = 12,77

5.31
e = 82,86%

5.32
e= 83,33%

5.34
e = 71,43%
$W = -467{,}9 \ \frac{kJ}{kg}$

e= 28,69 %

5.42
e= 44,92% e= 19,1%

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*

TABLA *Agua saturada: tabla de temperatura (unidades SI)*

		Volumen específico, m^3/kg		Energía interna, kJ/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión kPa, MPa P	Líquido saturado v_f	Vapor saturado v_g	Líquido saturado u_f	Evap. u_{fg}	Vapor saturado u_g	Líquido saturado h_g	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
0.01	0.6113	0.001000	206.132	0.00	2375.3	2375.3	0.00	2501.3	2501.3	0.0000	9.1562	9.1562
5	0.8721	0.01000	147.118	20.97	2361.3	2382.2	20.98	2489.6	2510.5	0.0761	8.9496	9.0257
10	1.2276	0.001000	106.377	41.99	2347.2	2389.2	41.99	2477.7	2519.7	0.1510	8.7498	8.9007
15	1.7051	0.001001	77.925	62.98	2333.1	2396.0	62.98	2465.9	2528.9	0.2245	8.5569	8.7813
20	2.3385	0.001002	57.790	83.94	2319.0	2402.9	83.94	2454.1	2538.1	0.2966	8.3706	8.6671
25	3.1691	0.001003	43.359	104.86	2304.9	2409.8	104.87	2442.3	2547.2	0.3673	8.1905	8.5579
30	4.2461	0.001004	32.893	125.77	2290.8	2416.6	125.77	2430.5	2556.2	0.4369	8.0164	8.4533
35	5.6280	0.001006	25.216	146.65	2276.7	2423.4	146.66	2418.6	2565.3	0.5052	7.8478	8.3530
40	7.3837	0.001008	19.523	167.53	2262.6	2430.1	167.54	2406.7	2574.3	0.5724	7.6845	8.2569
45	9.5934	0.001010	15.258	188.41	2248.4	2436.8	188.42	2394.8	2583.2	0.6386	7.5261	8.1647
50	12.350	0.001012	12.032	209.30	2234.2	2443.5	209.31	2382.7	2592.1	0.7037	7.3725	8.0762
55	15.758	0.001015	9.568 I	230.19	2219.9	2450.1	230.20	2370.7	2600.9	0.7679	7.2234	7.9912
60	19.941	0.001017	7.671	251.09	2205.5	2456.6	251.11	2358.5	2609.6	0.8311	7.0784	7.9095
65	25.033	0.001020	6.197	272.00	2191.1	2463.1	272.03	2346.2	2618.2	0.8934	6.9375	7.8309
70	31.188	0.001023	5.042	292.93	2176.6	2469.5	292.96	2333.8	2626.8	0.9548	6.8004	7.7552
75	38.578	0.001026	4.131	313.87	2162.0	2475.9	313.91	2321.4	2635.3	1.0154	6.6670	7.6824
80	47.390	0.001029	3.407	334.84	2147.4	2482.2	334.88	2308.8	2643. 7	1.0752	6.5369	7.6121
85	57.834	0.001032	2.828	355.82	2132.6	2488.4	355.88	2296.0	2651.9	1.1342	6.4102	7.5444
90	70.139	0.001036	2.361	376.82	2117.7	2494.5	376.90	2283.2	2660.1	1.1924	6.2866	7.4790
95	84.554	0.001040	1.982	397.86	2102.7	2500.6	397.94	2270.2	2668.1	1.2500	6.1659	7.4158
100	101.325	0.001044	1.6729	418.91	2087.6	2506.5	419.02	2257.0	2676.0	1.3068	6.0480	7.3548
105	0.12082	0.001047	1.4194	440.00	2072.3	2512.3	440.13	2243.7	2683.8	1.3629	5.9328	7.2958
110	0.14328	0.001052	1.2102	461.12	2057.0	2518.1	461.27	2230.2	2691.5	1.4184	5.8202	7.2386
115	0.16906	0.001056	1.0366	482.28	2041.4	2523.7	482.46	2216.5	2699.0	1.4733	5.7100	7.1832
120	0.19853	0.001060	0.8919	503.48	2025.8	2529.2	503.69	2202.6	2706.3	1.5275	5.6020	7.1295
125	0.2321	0.001065	0.77059	524.72	2009.9	2534.6	524.96	2188.5	2713.5	1.5812	5.4962	7.0774
130	0.2701	0.001070	0.66850	546.00	1993.9	2539.9	546.29	2174.2	2720.5	1.6343	5.3925	7.0269
135	0.3130	0.001075	0.58217	567.34	1977.7	2545.0	567.67	2159.6	2727.3	1.6869	5.2907	6.9777
140	0.3613	0.001080	0.50885	588.72	1961.3	2550.0	589.11	2144.8	2733.9	1.7390	5.1908	6.9298
145	0.4154	0.001085	0.44632	610.16	1944.7	2554.9	610.61	2129.6	2740.3	1.7906	5.0926	6.8832
150	0.4759	0.001090	0.39278	631.66	1927.9	2559.5	632.18	2114.3	2746.4	1.8417	4.9960	6.8378
155	0.5431	0.001096	0.34676	653.23	1910.8	2564.0	653.82	2098.6	2752.4	1.8924	4.9010	6.7934
160	0.6178	0.001102	0.30706	674.85	1893.5	2568.4	675.53	2082.6	2758.1	1.9426	4.8075	6.7501
165	0.7005	0.001108	0.27269	696.55	1876.0	2572.5	697.32	2066.2	2763.5	1.9924	4.7153	6.7078
170	0.7917	0.001114	0.24283	718.31	1858.1	2576.5	719.20	2049.5	2768.7	2.0418	4.6244	6.6663

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Agua saturada: tabla de temperatura (unidades SI)* *(Continuación)*

		Volumen específico, m^3/kg		Energía interna, kJ/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión MPa P	Líquido saturado v_f	Vapor saturado v_g	Líquido saturado u_f	Evap. u_{fg}	Vapor saturado u_g	Líquido saturado h_g	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
175	0.8920	0.001121	0.21680	740.16	1840.0	2580.2	741.16	2032.4	2773.6	2.0909	4.5347	6.6256
180	1.0022	0.001127	0.19405	762.08	1821.6	2583.7	763.21	2015.0	2778.2	2.1395	4.4461	6.5857
185	1.1227	0.001134	0.17409	784.08	1802.9	2587.0	785.36	1997.1	2782.4	2.1878	4.3586	6.5464
190	1.2544	0.001141	0.15654	806.17	1783.8	2590.0	807.61	1978.8	2786.4	2.2358	4.2720	6.5078
195	1.3978	0.001149	0.14105	828.36	1764.4	2592.8	829.96	1960.0	2790.0	2.2835	4.1863	6.4697
200	1.5538	0.001156	0.12736	850.64	1744.7	2595.3	852.43	1940.7	2793.2	2.3308	4.1014	6.4322
205	1.7230	0.001164	0.11521	873.02	1724.5	2597.5	875.03	1921.0	2796.0	2.3779	4.0172	6.3951
210	1.9063	0.001173	0.10441	895.51	1703.9	2599.4	897.75	1900.7	2798.5	2.4247	3.9337	6.3584
215	2.1042	0.001181	0.09479	918.12	1682.9	2601.1	920.61	1879.9	2800.5	2.4713	3.8507	6.3221
220	2.3178	0.001190	0.08619	940.85	1661.5	2602.3	943.61	1858.5	2802.1	2.5177	3.7683	6.2860
225	2.5477	0.001199	0.07849	963.72	1639.6	2603.3	966.77	1836.5	2803.3	2.5639	3.6863	6.2502
230	2.7949	0.001209	0.07158	986.72	1617.2	2603.9	990.10	1813.8	2803.9	2.6099	3.6047	6.2146
235	3.0601	0.001219	0.06536	1009.88	1594.2	2604.1	1013.61	1790.5	2804.1	2.6557	3.5233	6.1791
240	3.3442	0.001229	0.05976	1033.19	1570.8	2603.9	1037.31	1766.5	2803.8	2.7015	3.4422	6.1436
245	3.6482	0.001240	0.05470	1056.69	1546.7	2603.4	1061.21	1741.7	2802.9	6.1083	2.7471	3.3612
250	3.9730	0.001251	0.05013	1080.37	1522.0	2602.4	1085.34	1716.2	2801.5	2.7927	3.2802	6.0729
255	4.3195	0.001263	0.04598	1104.26	1496.7	2600.9	1109.72	1689.8	2799.5	2.8382	3.1992	6.0374
260	4.6886	0.001276	0.04220	1128.37	1470.6	2599.0	1134.35	1662.5	2796.9	2.8837	3.1181	6.0018
265	5.0813	0.001289	0.03877	1152.72	1443.9	2596.6	1159.27	1634.3	2793.6	2.9293	3.0368	5.9661
270	5.4987	0.001302	0.03564	1177.33	1416.3	2593.7	1184.49	1605.2	2789.7	2.9750	2.9551	5.9301
275	5.9418	0.001317	0.03279	1202.23	1387.9	2590.2	1210.05	1574.9	2785.0	3.0208	2.8730	5.8937
280	6.4117	0.001332	0.03017	1227.43	1358.7	2586.1	1235.97	1543.6	2779.5	3.0667	2.7903	5.8570
285	6.9094	0.001348	0.02777	1252.98	1328.4	2581.4	1262.29	1511.0	2773.3	3.1129	2.7069	5.8198
290	7.4360	0.001366	0.02557	1278.89	1297.1	2576.0	1289.04	1477.1	2766.1	3.1593	2.6227	5.7821
295	7.9928	0.001384	0.02354	1305.21	1264.7	2569.9	1316.27	1441.8	2758.0	3.1061	2.5375	5.7436
300	8.5810	0.001404	0.02167	1331.97	1231.0	2563.0	1344.01	1404.9	2748.9	3.2533	2.4511	5.7044
305	9.2018	0.001425	0.01995	1359.22	1195.9	2555.2	1372.33	1366.4	2738.7	3.3009	2.3633	5.6642
310	9.8566	0.001447	0.01835	1387.03	1159.4	2546.4	1401.29	1326.0	2727.3	3.3492	2.2737	5.6229
315	10.547	0.001472	0.01687	1415.44	1121.1	2536.6	1430.97	1283.5	2714.4	3.3981	2.1821	5.5803
320	11.274	0.001499	0.01549	1444.55	1080.9	2525.5	1461.45	1238.6	2700.1	3.4479	2.0882	5.5361
330	12.845	0.001561	0.012996	1505.24	993.7	2498.9	1525.29	1140.6	2665.8	3.5506	1.8909	5.4416
340	14.586	0.001638	0.010797	1570.26	894.3	2464.5	1594.15	1027.9	2622.0	3.6593	1.6763	5.3356
350	16.514	0.001740	0.008813	1641.81	776.6	2418.4	1670.54	893.4	2563.9	3.7776	1.4336	5.2111
360	18.651	0.001892	0.006945	1725.19	626.3	2351.5	1760.48	720.5	2481.0	3.9146	1.1379	5.0525
370	21.028	0.002213	0.004926	1843.84	384.7	2228.5	1890.37	441.8	2332.1	4.1104	0.6868	4.7972
374	22.089	0.003155	0.003155	2029.58	0	2029.6	2099.26	0	2099.3	4.4297	0	4.4297

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Agua saturada: tabla de presión (unidades SI)*

		Volumen específico, m^3/kg		Energía interna, kJ/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión kPa, MPa P	Líquido saturado v_f	Vapor saturado v_g	Líquido saturado u_f	Evap. u_{fg}	Vapor saturado u_g	Líquido saturado h_g	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
0.6113	0.01	0.001000	206.132	0	2375.3	2375.3	0.00	2501.3	2501.3	0	9.1562	9.1562
1.0	6.98	0.001000	129.208	29.29	2355.7	2385. 2	29.29	2484.9	2514.	0.1059	8.8697	8.9756
1.5	13.03	0.001001	87.980	54.70	2338.6	2393.3	54.70	2470.6	2525.3	0.1956	8.6322	8.8278
2.0	17.50	0.001001	67.004	73.47	2326.0	2399.5	73.47	2460.0	2533.5	0.2607	8.4629	8.7236
2.5	21.08	0.001002	54.254	88.47	2315.9	2404.4	88.47	2451.6	2540.0	0.3120	8.3311	8.6431
3.0	24.08	0.001003	45.665	101.03	2307.5	2408.5	101.03	2444.5	2545.5	0.3545	8.2231	8.5775
4.0	28.96	0.001004	34.800	121.44	2293.7	2415.2	121.44	2432.9	2554.4	0.4226	8.0520	8.4746
5.0	32.88	0.001005	28.193	137.79	2282.7	2420.5	137.79	2423.7	2561.4	0.4763	7.9187	8.3950
7.5	40.29	0.001008	19.238	168.76	2261.7	2430.5	168.77	2406.0	2574.8	0.5763	7.6751	8.2514
10.0	45.81	0.001010	14.674	191.79	2246.1	2437.9	191.81	2392.8	2584.6	0.6492	7.5010	8.1501
15.0	53.97	0.001014	10.022	225.90	2222.8	2448.7	225.91	2373.1	2599.1	0.7548	7.2536	8.0084
20.0	60.06	0.001017	7.649	251.35	2205.4	2456.7	251.38	2358.3	2609.7	0.8319	7.0766	7.9085
25.0	64.97	0.001020	6.204	271.88	2191.2	2463.1	271.90	2346.3	2618.2	0.8930	6.9383	7.8313
30.0	69.10	0.001022	5.229	289.18	2179.2	2468.4	289.21	2336.1	2625.3	0.9439	6.8247	7.7686
40.0	75.87	0.001026	3.993	317.51	2159.5	2477.0	317.55	2319.2	2636.7	1.02~	8 6.6441	7.6700
50.0	81.33	0.001030	3.240	340.42	2143.4	2483.8	340.47	2305.4	2645.9	1.0910	6.5029	7.5939
75.0	91.77	0.001037	2.217	384.29	2112.4	2496.7	384.36	2278.6	2663.0	1.2129	6.2434	7.4563
MPa												
0.100	99.62	0.001043	1.6940	417.33	2088.7	2506.1	417.44	2258.0	2675.5	1.3025	6.0568	7.3593
0.125	105.99	0.001048	1.3749	444.16	2069.3	2513.5	444.30	2241.1	2685.3	1.3739	5.9104	7.2843
0.150	111.37	0.001053	1.1593	466.92	2052.7	2519.6	467.08	2226.5	2693.5	1.4335	5.7897	7.2232
0.175	116.06	0.001057	1.0036	486.78	2038.1	2524.9	486.97	2213.6	2700.5	1.4848	5.6868	7.1717
0.200	120.23	0.001061	0.8857	504.47	2025.0	2529.5	504.68	2202.0	2706.6	1.5300	5.5970	7.1271
0.225	124.00	0.001064	0.7933	520.45	2013.1	2533.6	520.69	2191.3	2712.0	1.5705	5.5173	7.0878
0.250	127.43	0.001067	0.7187	535.08	2002.1	2537.2	535.34	2181.5	2716.9	1.6072	5.4455	7.0526

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Agua saturada: tabla de presión (unidades SI)* *(Continuación)*

		Volumen específico, m^3/kg		Energía interna, kJ/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Presión MPa P	Temp. °C T	Líquido saturado v_f	Vapor saturado v_g	Líquido saturado u_f	Evap. u_{fg}	Vapor saturado u_g	Líquido saturado h_g	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
0.275	130.60	0.001070	0.6573	548.57	1992.0	2540.5	548.87	2172.4	2721.3	1.6407	5.3801	7.0208
0.300	133.55	0.001073	0.6573	548.57	1992.0	2540.5	561.45	2163.9	2725.3	1.6717	5.3201	6.9918
0.325	136.30	0.001076	0.5620	572.88	1973.5	2546.3	573.23	2155.8	2729.0	1.7005	5.2646	6.9651
0.350	138.88	0.001079	0.5243	583.93	1965.0	2548.9	584.31	2148.1	2732.4	1.7274	5.2130	6.9404
0.375	141.32	0.001081	0.4914	594.38	1956.9	2551.3	594.79	2140.8	2735.6	1.7527	5.1647	6.9174
0.40	143.63	0.001084	0.4625	604.29	1949.3	2553.6	604.73	2133.8	2738.5	1.7766	5.1193	6.8958
0.45	147.93	0.001088	0.4140	622.75	1934.9	2557.6	623.24	2120.7	2743.9	1.8206	5.0359	6.8565
0.50	151.86	0.001093	0.3749	639.66	1921.6	2561.2	640.21	2108.5	2748.7	1.8606	4.9606	6.8212
0.55	155.48	0.001097	0.3427	655.30	1909.2	2564.5	655.91	2097.0	2752.9	1.8972	4.8920	6.7892
0.60	158.85	0.001101	0.3157	669.88	1897.5	2567.4	670.54	2086.3	2756.8	1.9311	4.8289	6.7600
0.65	162.01	0.001104	0.2927	683.55	1886.5	2570.1	684.26	2076.0	2760.3	1.9627	4.7704	6.7330
0.70	164.97	0.001108	0.2729	696.43	1876.1	2572.5	697.20	2066.3	2763.5	1.9922	4.7158	6.7080
0.75	167.77	0.001111	0.2556	708.62	1866.1	2574.7	709.45	2057.0	2766.4	2.0199	4.6647	6.6846
0.80	170.43	0.001115	0.2404	720.20	1856.6	2576.8	721.10	2048.0	2769.1	2.0461	4.6166	6.6627
0.85	172.96	0.001118	0.2270	731.25	1847.4	2578.7	732.20	2039.4	2771.6	2.0709	4.5711	6.6421
0.90	175.38	0.001121	0.2150	741.81	1838.7	2580.5	742.82	2031.1	2773.9	2.0946	4.5280	6.6225
0.95	177.69	0.001124	0.2042	751.94	1830.2	2582.1	753.00	2023.1	2776.1	2.1171	4.4869	6.6040
1.00	179.91	0.001127	0.19444	761.67	1822.0	2583.6	762.79	2015.3	2778.1	2.1386	4.4478	6.5864
1.10	184.09	0.001133	0.17753	780.08	1806.3	2586.4	781.32	2000.4	2781.7	2.1791	4.3744	6.5535
1.20	187.99	0.001139	0.16333	797.27	1791.6	2588.8	798.64	1986.2	2784.8	2.2165	4.3067	6.5233
1.30	191.64	0.001149	0.15125	813.42	1777.5	2590.9	814.91	1972.7	2787.6	2.2514	4.2438	6.4953
1.40	195.07	0.001144	0.14084	828.68	1764.1	2592.8	830.29	1959.7	2790.0	2.2842	4.1850	6.4692
1.50	198.32	0.001154	0.13177	843.14	1751.3	2594.5	844.87	1947.3	2792.1	2.3150	4.1298	6.4448
1.75	205.76	0.001166	0.11349	876.44	1721.4	2597.8	878.48	1918.0	2796.4	2.3851	4.0044	6.3895
2.00	212.42	0.001177	0.09963	906.42	1693.8	2600.3	908.77	1890.7	2799.5	2.4473	3.8935	6.3408
2.25	218.45	0.001187	0.08875	933.81	1668.2	2602.0	936.48	1865.2	2801.7	2.5034	3.7938	6.2971

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Agua saturada: tabla de presión (unidades SI)* *(Continuación)*

		Volumen específico, m^3/kg		Energía interna, kJ/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Presión MPa P	Temp. °C T	Líquido saturado v_f	Vapor saturado v_g	Líquido saturado u_f	Evap. u_{fg}	Vapor saturado u_g	Líquido saturado h_g	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
2.50	223.99	0.001197	0.07998	959.09	1644.0	2603.1	962.09	1841.0	2803.1	2.5546	3.7028	6.2574
2.75	229.12	0.001207	0.07275	982.65	1621.2	2603.8	985.97	1817.9	2803.9	2.6018	3.6190	6.2208
3.00	233.90	0.001216	0.06668	1004.76	1599.3	2604.1	1008.41	1795.7	2804.1	2.6456	3.5412	6.1869
3.25	238.38	0.001226	0.06152	1025.62	1578.4	2604.0	1029.60	1774.4	2804.0	2.6866	3.4685	6.1551
3.50	242.60	0.001235	0.05707	1045.41	1558.3	2603.7	1049.73	1753.7	2803.4	2.7252	3.4000	6.1252
4.0	250.40	0.001252	0.049778	1082.28	1520.0	2602.3	1087.29	1714.1	2801.4	2.7963	3.2737	6.0700
5.0	263.99	0.001286	0.039441	1147.78	1449.3	2597.1	1154.21	1640.1	2794.3	2.9201	3.0532	5.9733
6.0	275.64	0.001319	0.032440	1205.41	1384.3	2589.7	1213.32	1571.0	2784.3	3.0266	2.8625	5.8891
7.0	285.88	0.001351	0.027370	1257.51	1323.0	2580.5	1266.97	1505.1	2772.1	3.1210	2.6922	5.8132
8.0	295.06	0.001384	0.023518	1305.54	1264.3	2569.8	1316.61	1441.3	2757.9	3.2067	2.5365	5.7431
9.0	303.40	0.001418	0.020484	1350.47	1207.3	2557.8	1363.23	1378.9	2742.1	3.2857	2.3915	5.6771
10.0	311.06	0.001452	0.018026	1393.00	1151.4	2544.4	1407.53	1317.1	2724.7	3.3595	2.2545	5.6140
11.0	318.15	0.001489	0.015987	1433.68	1096.1	2529.7	1450.05	1255.5	2705.6	3.4294	2.1233	5.5527
12.0	324.75	0.001527	0.014263	1472.92	1040.8	2513.7	1491.24	1193.6	2684.8	3.4961	1.9962	5.4923
13.0	330.93	0.001567	0.012780	1511.09	985.0	2496.1	1531.46	1130.8	2662.2	3.5604	1.8718	5.4323
14.0	336.75	0.001611	0.011485	1548.53	928.2	2476.8	1571.08	1066.5	2637.5	3.6231	1.7485	5.3716
15.0	342.24	0.001658	0.010338	1585.58	869.8	2455.4	1610.45	1000.0	2610.5	3.6847	1.6250	5.3097
16.0	347.43	0.001711	0.009306	1622.63	809.1	2431.7	1650.00	930.6	2580.6	3.7460	1.4995	5.2454
17.0	352.37	0.001770	0.008365	1660.16	744.8	2405.0	1690.25	856.9	2547.2	3.8078	1.3698	5.1776
18.0	357.06	0.001840	0.007490	1698.86	675.4	2374.3	1731.97	777.1	2509.1	3.8713	1.2330	5.1044
19.0	361.54	0.001924	0.006657	1739.87	598.2	2338.1	1776.43	688.1	2464.5	3.9387	1.0841	5.0227
20.0	365.81	0.002035	0.005834	1785.47	507.6	2293.1	1826.18	583.6	2409.7	4.0137	0.9132	4.9269
21.0	369.89	0.002206	0.004953	1841.97	388.7	2230.7	1888.30	446.4	2334.7	4.1073	0.6942	4.8015
22.0	373.80	0.002808	0.003526	1973.16	108.2	2081.4	2034.92	124.0	2159.0	4.3307	0.1917	4.5224
22.09	374.14	0.003155	0.003155	2029.58	0	2029.6	2099.26	0	2099.3	4.4297	0	4.4297

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Vapor de agua sobrecalentado (unidades SI)*

	P = 10 kPa (45.81)				P = 50 kPa (81.33				P = 100 kPa (99.62)			
T	v	u	h	s	v	u	h	s	v	u	h	s
Sat.	14.674	2437.9	2584.6	8.1501	3.240	2483.8	2645.9	7.5939	1.6940	2506.1	2675.5	7.3593
50	14.869	2443.9	2592.6	8.1749								
100	17.196	2515.5	2687.5	8.4479	3.418	2511.6	2682.5	7.6947	1.6958	2506.6	2676.2	7.3614
150	19.513	2587.9	2783.0	8.6881	3.889	2585.6	2780.1	7.9400	1.9364	2582.7	2776.4	7.6133
200	21.825	2661.3	2879.5	8.9037	4.356	2659.8	2877.6	8.1579	2.1723	2658.0	2875.3	7.8342
250	24.136	2736.0	2977.3	9.1002	4.821	2735.0	2976.0	8.3555	2.4060	2733.7	2974.3	8.0332
300	26.445	2812.1	3076.5	9.2812	5.284	2811.3	3075.5	8.5372	2.6388	2810.4	3074.3	8.2157
400	31.063	2968.9	3279.5	9.6076	6.209	2968.4	3278.9	8.8641	3.1026	2967.8	3278.1	8.5434
500	35.679	3132.3	3489.0	9.8977	7.134	3131.9	3488.6	9.1545	3.5655	3131.5	3488.1	8.8341
600	40.295	3302.5	3705.4	10.1608	8.058	3302.2	3705.1	9.4177	4.0278	3301.9	3704.7	9.0975
700	44.911	3479.6	3928.7	10.4028	8.981	3479.5	3928.5	9.6599	4.4899	3479.2	3928.2	9.3398
800	49.526	3663.8	4159.1	10.6281	9.904	3663.7	4158.9	9.8852	4.9517	3663.5	4158.7	9.5652
900	54.141	3855.0	4396.4	10.8395	10.828	3854.9	4396.3	10.0967	5.4135	3854.8	4396.1	9.7767
1000	58.757	4053.0	4640.6	11.0392	11.751	4052.9	4640.5	10.2964	5.8753	4052.8	4640.3	9.9764
1100	63.372	4257.5	4891.2	11.2287	12.674	4257.4	4891.1	10.4858	6.3370	4257.3	4890.9	10.1658
1200	67.987	4467.9	5147:8	11.4090	13.597	4467.8 '	5147.7	10.6662	6.7986	4467.7	5147.6	10.3462
1300	72.603	4683.7	5409.7	11.5810	14.521	4683.6	5409.6	J.0.8382	7.2603	4683.5	5409.5	10.5182
	P = 200 kPa (120.23)				P = 300 kPa (133.55)				P = 400 kPa (143.63)			
Sat.	0.88573	2529.5	2706.6	7.1271	0.60582	2543.6	2725.3	6.9918	0.46246	2553.6	2738.5	6.8958
150	0.95964	2576.9	2768.8	7.2795	0.63388	2570.8	2761.0	7.0778	0.47084	2564.5	2752.8	6.9299
200	1.08034	2654.4	2870.5	7.5066	0.71629	2650.7	2865.5	7.3115	0.53422	2646.8	2860.5	7.1706
250	1.19880	2731.2	2971.0	7.7085	0.79636	2728.7	2967.6	7.5165	0.59512	2726.1	2964.2	7.3788
300	1.31616	2808.6	3071.8	7.8926	0.87529	2806.7	3069.3	7.7022	0.65484	2804.8	3066.7	7.5661
400	1.54930	2966.7	3276.5	8.2217	1.03151	2965.5	3275.0	8.0329	0.77262	2964.4	3273.4	7.8984
500	1.78139	3130.7	3487.0	8.5132	1.18669	3130.0	3486.0	8.3250	0.88934	3129.2	3484.9	8.1912
600	2.01297	3301.4	3704.0	8.7769	1.34136	3300.8	3703.2	8.5892	1.00555	3300.2	3702.4	8.4557
700	2.24426	3478.8	3927.7	9.0194	1.49573	3478.4	3927.1	8.8319	1.12147	3477.9	3926.5	8.6987
800	2.47539	3663.2	4158.3	9.2450	1.64994	3662.9	4157.8	9.0575	1.23722	3662.5	4157.4	8.9244

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Vapor de agua sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

	P = 200 kPa (120.23)				P = 300 kPa (133.55)				P = 400 kPa (143.63)			
T	v	u	h	s	v	u	h	s	v	u	h	s
900	2.70643	3854.5	4395.8	9.4565	1.80406	3854.2	4395.4	9.2691	1.35288	3853.9	4395.1	9.1361
1000	2.93740	4052.5	4640.0	9.6563	1.95812	4052.3	4639.7	9.4689	1.46847	4052.0	4639.4	9.3360
1100	3.16834	4257.0	4890.7	9.8458	2.11214	4256.8	4890.4	9.6585	1.58404	4256.5	4890.1	9.5255
1200	3.39927	4467.5	5147.3	10.0262	2.26614	4467.2	5147.1	9.8389	1.69958	4467.0	5146.8	9.7059
1300	3.63018	4683.2	5409.3	10.1982	2.42013	4683.0	5409.0	10.0109	1.81511	4682.8	5408.8	9.8780
	P = 500 kPa (151.86)				P = 600 kPa (158.85)				P = 800 kPa (170.43)			
Sat.	0.37489	2561.2	2748.7	6.8212	0.31567	2567.4	2756.8	6.7600	0.24043	2576.8	2769.1	6.6627
200	0.42492	2642.9	2855.4	7.0592	0.35202	2638.9	2850.1	6.9665	0.26080	2630.6	2839.2	6.8158
250	0.47436	2723.5	2960.7	7.2708	0.39383	2720.9	2957.2	7.1816	0.29314	2715.5	2950.0	7.0384
300	0.52256	2802.9	3064.2	7.4598	0.43437	2801.0	3061.6	7.3723	0.32411	2797.1	3056.4	7.2327
350	0.57012	2882.6	3167.6	7.6328	0.47424	2881.1	3165.7	7.5463	0.35439	2878.2·	3161.7	7.4088
400	0.61728	2963.2	3271.8	7.7937	0.51372	2962.0	3270.2	7.7078	0.38426	2959.7	3267.1	7.5715
500	0.71093	3128.4	3483.8	8.0872	0.59199	3127.6	3482.7	8.0020	0.44331	3125.9	3480.6	7.8672
600	0.80406	3299.6	3701.7	8.3521	0.66974	3299.1	3700.9	8.2673	0.50184	3297.9	3699.4	8.1332
700	0.89691	3477.5	3926.0	8.5952	0.74720	3477.1	3925.4	8.5107	0.56007 ".	3476.2	3924.3	8.3770
800	0.98959	3662.2	4157.0	8.8211	0.82450	3661.8	4156;5	8.7367	0.61813	3661.1	4155.7	8.6033
900	1.08217	3853.6	4394.7	9.0329	0.90169	3853.3	4394.4	8.9485	0.67-610	3852.8	4393.6	8.8153
1000	1.17469	4051.8	4639.1	9.2328	0.97883	4051.5	4638.8	9.1484	0.73401	4051.0	4638.2	9.0153
1100	1.26718	4256.3	4889.9	9.4224	1.05594	4256.1	4889.6	9.3381	0.79188	4255.6	4889.1	9.2049
1200	1.35964	4466.8	5146.6	9.6028	1.13302	4466.5	5146.3	9.5185	0.84974	4466.1	5145.8	9.3854
1300	1.45210	4682.5	5408.6	9.7749	1.21009	4682.3	5408.3	9.6906	0.90758	4681.8	5407.9	9.5575
	P= 1.00 MPa(179.91)				P = 1.20 MPa (187.99)				P = 1.40 MPa (195.07)			
Sato	0.19444	2583.6	2778.1	6.5864	0.16333	2588.8	2784.8	6.5233	0.14084	2592.8	2790.0	6.4692
200	0.20596	2621.9	2827.9	6.6939	0.16930	2612.7	2815.9	6.5898	0.14302	2603.1	2803.3	6.4975
250	0.23268	2709.9	2942.6	6.9246	0.19235	2704.2	2935.0	6.8293	0.16350	2698.3	2927.2	6.7467
300	0.25794	2793.2	3051.2	7.1228	0.21382	2789.2	3045.8	7.0316	0.18228	2785.2	3040.4	6.9533
350	0.28247	2875.2	3157.7	7.3010	0.23452	2872.2	3153.6	7.2120	0.20026	2869.1	3149.5	7.1359
400	0.30659	2957.3	3263.9	7.4650	0.25480	2954.9	3260.7	7.3773	0.21780	2952.5	3257.4	7.3025
500	0.35411	3124.3	3478.4	7.7621	0.29463	3122.7	3476.3	7.6758	0.25215	3121.1	3474.1	7.6026

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Vapor de agua sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

	P = 1.00 MPa (179.91)				P = 1.20 MPa (187 .99)				P = *1.40* MPa (195.07)			
T	v	u	h	s	v	u	h	s	v	u	h	s
600	0.40109	3296.8	3697.9	8.0289	0.33393	3295.6	3696.3	7.9434	0.28596	3294.4	3694.8	7.8710
700	0.44779	3475.4	3923.1	8.2731	0.37294	3474.5	3922.0	8.1881	0.31947	3473.6	3920.9	8.1160
800	0.49432	3660.5	4154.8	8.4996	0.41177	3659.8	4153.9	8.4149	0.35281	3659.1	4153.0	8.3431
900	0.54075	3852.2	4392.9	8.7118	0.45051	3851.6	4392.2	8.6272	0.38606	3851.0	4391.5	8.5555
1000	0.58712	4050.5	4637.6	8.9119	0.48919	4050.0	4637.0	8.8274	0.41924	4049.5	4636.4	8.7558
1100	0.63345	4255.1	4888.5	9.1016	0.52783	4254.6	4888.0	9.0171	0.45239	4254.1	4887.5	8.9456
1200	0.67977	4465.6	5145.4	9.2821	0.56646	4465.1	5144.9	9.1977	0.48552	4464.6	5144.4	9.1262
1300	0.72608	4681.3	5407.4	9.4542	0.60507	4680.9	5406.9	9.3698	0.51864	4680.4	5406.5	9.2983
	P = 1.60 MPa (201.40)				P = 1.80 MPa (207.15)				P = 2.00 MPa (212.42)			
Sat.	0.12380	2595.9	2794.0	6.4217	0.11042	2598.4	2797.1	6.3793	0.09963	2600.3	2799.5	6.3408
225	0.13287	2644.6	2857.2	6.5518	0.11673	2636.6	2846.7	6.4807	0.10377	2628.3	2835.8	6.4146
250	0.14184	2692.3	2919.2	6.6732	0.12497	2686.0	2911.0	6.6066	0.11144	2679.6	2902.5	6.5452
300	0.15862	2781.0	3034.8	6.8844	0.14021	2776.8	3029.2	6.8226	0.12547	2772.6	3023.5	6.7663
350	0.17456	2866.0	3145.4	7.0693	0.15457	2862.9	3141.2	7.0099	0.13857	2859.8	3137.0	6.9562
400	0.19005	2950.1	3254.2	7.2373	0.16847	2947.7	3250.9	7.1793	0.15120	2945.2	3247.6	7.1270
500	0.22029	3119.5	3471.9	7.5389	0.19550	3117.8	3469.7	7.4824	0.17568	3116.2	3467.6	7.4316
600	0.24998	3293.3	3693.2	7.8080	0.22199	3292.1	3691.7	7.7523	0.19960	3290.9	3690.1	7.7023
700	0.27937	3472.7	3919.7	8.0535	0.24818	3471.9	3918.6	7.9983	0.22323	3471.0	3917.5	7.9487
800	0.30859	3658.4	4152.1	8.2808	0.27420	3657.7	4151.3	8.2258	0.24668	3657.0	4150.4	8.1766
900	0.33772	3850.5	4390.8	8.4934	0.30012	3849.9	4390.1	8.4386	0.27004	3849.3	4389.4	8.3895
1000	0.36678	4049.0	4635.8	8.6938	0.32598	4048.4	4635.2	8.6390	0.29333	4047.9	4634.6	8.5900
1100	0.39581	4253.7	4887.0	8.8837	0.35180	4253.2	4886.4	8.8290	0.31659	4252.7	4885.9	8.7800
1200	0.42482	4464.2	5143.9	9.0642	0.37761	4463.7	5143.4	9.0096	0.33984	4463.2	5142.9	8.9606
1300	0.45382	4679.9	5406.0	9.2364	0.40340	4679.4	5405.6	9.1817	0.36306	4679.0	5405.1	9.1328
	P = 2.50 MPa (223.99)				P = 3.00 MPa (233.90)				P = 3.50 MPa (242.60)			
Sat.	0.07998	2603.1	2803.1	6.2574	0.06668	2604.1	2804.1	6.1869	0.05707	2603.7	2803.4	6.1252
225	0.08027	2605.6	2605.6	6.2638	–	–	–	–	–	–	–	–
250	0.08700	2662.5	2662.5	6.4084	0.07058	2644.0	2855.8	6.2871	0.05873	2623.7	2829.2	6.1748
300	0.09890	2761.6	2761.6	6.6437	0.08114	2750.0	2993.5	6.5389	0.06842	2738.0	2977.5	6.4460
350	0.10976	2851.8	2851.8	6.8402	0.09053	2843.7	3115.3	6.7427	0.07678	2835.3	3104.0	6.6578
400	0.12010	2939.0	2939.0	7.0147	0.09936	2932.7	3230.8	6.9211	0.08453	2926.4	3222.2	6.8404
450	0.13014	3025.4	3025.4	7.1745	0.10787	3020.4	3344.0	7.0833	0.09196	3015.3	3337.2	7.0051
500	0.13998	3112.1	3112.1	7.3233	0.11619	3107.9	3456.5	7.2337	0.09918	3103.7	3450.9	7.1571
600	0.15930	3288.0	3288.0	7.5960	0.13243	3285.0	3682.3	7.5084	0.11324	3282.1	3678.4	7.4338
700	0.17832	3468.8	3468.8	7.8435	0.14838	3466.6	3911.7	7.7571	0.12699	3464.4	3908.8	7.6837

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Vapor de agua sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

	P = 2.50 MPa (223.99)				P = 3.00 MPa (233.90)				P = 3.50 MPa (242.60)			
T	v	u	h	s	v	u	h	s	v	u	h	s
800	0.19716	3655.3	4148.2	8.0720	0.16414	3653.6	4146.0	7.9862	0.14056	3651.8	4143.8	7.9135
900	0.21590	3847.9	4387.6	8.2853	0.17980	3846.5	4385.9	8.1999	0.15402	3845.0	4384.1	8.1275
1000	0.23458	4046.7	4633.1	8.4860	0.19541	4045.4	4631.6	8.4009	0.16743	4044.1	4630.1	8.3288
1100	0.25322	4251.5	4884.6	8.6761	0.21098	4250.3	4883.3	8.5911	0.18080	4249.1	4881.9	8.5191
1200	0.27185	4462.1	5141.7	8.8569	0.22652	4460.9	5140.5	8.7719	0.19415	4459.8	5139.3	8.7000
1300	0.29046	4677.8	5404.0	9.0291	0.24206	4676.6	5402.8	8.9442	0.20749	4675.5	5401.7	8.8723
	P = 500 kPa (151.86)				P = 600 kPa (158.85)				P = 800 kPa (170.43)			
Sat.	0.04978	2602.3	2801.4	6.0700	0.04406	2600.0	2798.3	6.0198	0.03944	2597.1	2794.3	5.9733
275	0.05457	2667.9	2886.2	6.2284	0.04730	2650.3	2863.1	6.1401	0.04141	2631.2	2838.3	6.0543
300	0.05884	2725.3	2960.7	6.3614	0.05135	2712.0	2943.1	6.2827	0.04532	2697.9	2924.5	6.2083
350	0.06645	2826.6	3092.4	6.5820	0.05840	2817.8	3080.6	6.5130	0.05194	2808.7	3068.4	6.4492
400	0.07341	2919.9	3213.5	6.7689	0.06475	2913.3	3204.7	6.7046	0.05781	2906.6	3195.6	6.6458
450	0.08003	3010.1	3330.2	6.9362	0.07074	3004.9	3323.2	6.8745	0.06330	2999.6	3316.1	6.8185
500	0.08643	3099.5	3445.2	7.0900	0.07651	3095.2	3439.5	7.0300	0.06857	3090.9	3433.8	6.9758
600	0.09885	3279.1	3674.4	7.3688	0.08765	3276.0	3670.5	7.3109	0.07869	3273.0	3666.5	7.2588
700	0.11095	3462.1	3905.9	7.6198	0.09847	3459.9	3903.0	7.5631	0.08849	3457.7	3900.1	7.5122
800	0.12287	3650.1	4141.6	7.8502	0.10911	3648.4	4139.4	7.7942	0.09811	3646.6	4137.2	7.7440
900	0.13469	3843.6	4382.3	8.0647	0.11965	3842.1	4380.6	8.0091	0.10762	3840.7	4378.8	7.9593
1000	0.14645	4042.9	4628.7	8.2661	0.13013	4041.6	4627.2	8.2108	0.11707	4040.3	4625.7	8.1612
1100	0.15817	4248.0	4880.6	8.4566	0.14056	4246.8	4879.3	8.4014	0.12648	4245.6	4878.0	8.3519
1200	0.16987	4458.6	5138.1	8.6376	0.15098	4457.4	5136.9	8.5824	0.13587	4456.3	5135.7	8.5330
1300	0.18156	4674.3	5400.5	8.8099	0.16139	4673.1	5399.4	8.7548	0.14526	4672.0	5398.2	8.7055
	P= 1.00 MPa(179.91)				P = 1.20 MPa (187.99)				P = 1.40 MPa (195.07)			
Sat.	0.03244	2589.7	2784.3	5.8891	0.02737	2580.5	2772.1	5.8132	0.02352	2569.8	2757.9	5.7431
300	0.03616	2667.2	2884.2	6.0673	0.02947	2632.1	2838.4	5.9304	0.02426	2590.9	2785.0	5.7905
350	0.04223	2789.6	3043.0	6.3334	0.03524	2769.3	3016.0	6.2282	0.02995	2747.7	2987.3	6.1300
400	0.04739	2892.8	3177.2	6.5407	0.03993	2878.6	3158.1	6.4477	0.03432	2863.8	3138.3	6.3633
450	0.05214	2988.9	3301.8	6.7192	0.04416	2977.9	3287.0	6.6326	0.03817	2966.7	3272.0	6.5550
500	0.05665	3082.2	3422.1	6.8802	0.04814	3073.3	3410.3	6.7974	0.04175	3064.3	3398.3	6.7239

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Vapor de agua sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

	P = 6.00 MPa (275.64)				*P* = 7.00 MPa (285.88)				P = 8.00 MPa (295.06)			
T	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*
550	0.06101	3174.6	3540.6	7.0287	0.05195	3167.2	3530.9	6.9486	0.04516	3159.8	3521.0	6.8778
600	0.06525	3266.9	3658.4	7.1676	0.05565	3260.7	3650.3	7.0894	0.04845	3254..4	3642.0	7.0205
700	0.07352	3453.2	3894.3	7.4234	0.06283	3448.6	3888.4	7.3476	0.05481	3444.0	3882.5	7.2812
800	0.08160	3643.1	4132.7	7.6566	0.06981	3639.6	4128.3	7.5822	0.06097	3636.1	4123.8	7.5173
900	0.08958	3837.8	4375.3	7.8727	0.07669	3835.0	4371.8	7.7991	0.06702	3832.1	4368.3	7.7350
1000	0.09749	4037.8	4622.7	8.0751	0.08350	4035.3	4619.8	8.0020	0.07301	4032.8	4616.9	7.9384
1100	0.10536	4243.3	4875.4	8.2661	0.09027	4240.9	4872.8	8.1933	0.07896	4238.6	4870.3	8.1299
1200	0.11321	4454.0	5133.3	8.4473	0.09703	4451.7	5130.9	8.3747	0.08489	4449.4	5128.5	8.3115
1300	0.12106	4669.6	5396.0	8.6199	0.10377	4667.3	5393.7	8.5472	0.09080	4665.0	5391.5	8.4842
	P = 9.00 MPa (303.40)				*P* = 10.00 MPa (311.06)				*P* = 12.50 MPa (327.89)			
Sat.	0.02048	2557.8	2742.1	5.6771	0.01803	2544.4	2724.7	5.6140	0.01350	2505.1	2673.8	5.4623
325	0.02327	2646.5	2855.9	5.8711	0.01986	2610.4	2809.0	5.7568	—	—	—	—
350	0.02580	2724.4	2956.5	6.0361	0.02242	2699.2	2923.4	5.9442	0.01613	2624.6	2826.2	5.7117
400	0.02993	2848.4	3117.8	6.2853	0.02641	2832.4	3096.5	6.2119	0.02000	2789.3	3039.3	6.0416
450	0.03350	2955.1	3256.6	6.4843	0.02975	2943.3	3240.8	6.4189	0.02299	2912.4	3199.8	6.2718
500	0.03677	3055.1	3386.1	6.6575	0.03279	3045.8	3373.6	6.5965	0.02560	3021.7	3341.7	6.4617
550	0.03987	3152.2	3511.0	6.8141	0.03564	3144.5	3500.9	6.7561	0.02801	3124.9	3475.1	6.6289
600	0.04285	3248.1	3633.7	6.9588	0.03837	3241.7	3625.3	6.9028	0.03029	3225.4	3604.0	6.7810
650	0.04574	3343.7	3755.3	7.0943	0.04101	3338.2	3748.3	7.0397	0.03248	3324.4	3730.4	6.9218
700	0.04857	3439.4	3876.5	7.2221	0.04358	3434.7	3870.5	7.1687	0.03460	3422.9	3855.4	7.0536
800	0.05409	3632.5	4119.4	7.4597	0.04859	3629.0	4114.9	7.4077	0.03869	3620.0	4103.7	7.2965
900	0.05950	3829.2	4364.7	7.6782	0.05349	3826.3	4361.2	7.6272	0.04267	3819.1	4352.5	7.5181
1000	0.06485	4030.3	4613.9	7.8821	0.05832	4027.8	4611.0	7.8315	0.04658	4021.6	4603.8	7.7237
1100	0.07016	4236.3	4867.7	8.0739	0.06312	4234.0	4865.1	8.0236	0.05045	4228.2	4858.8	7.9165
1200	0.07544	4447.2	5126.2	8.2556	0.06789	4444.9	5123.8	8.2054	0.05430	4439.3	5118.0	8.0987
1300	0.08072	4662.7	5389.2	8.4283	0.07265	4660.4	5387.0	8.3783	0.05813	4654.8	5381.4	8.2717
	P = 15 MPa (342.24)				*P* = 17.5 MPa (354.75)				*P* = 20 MPa (365.81)			
Sat.	.010338	2455.4	2610.5	5.3097	.0079204	2390.2	2528.8	5.1418	.0058342	2293.1	2409.7	4.9269
350	.011470	2520.4	2692.4	5.4420	–	–	–	–	–	–	–	–
400	.015649	2740.7	2975.4	5.8810	.0124477	2685.0	2902.8	5.7212	.0099423	2619.2	2818.1	5.5539
450	.018446	2879.5	3156.2	6.1403	.0151740	2844.2	3109.7	6.0182	.0126953	2806.2	3060.1	5.9016
500	.020800	2996.5	3308.5	6.3442	.0173585	2970.3	3274.0	6.2382	.0147683	2942.8	3238.2	6.1400
550	.022927	3104.7	3448.6	6.5198	.0192877	3083.8	3421.4	6.4229	.0165553	3062.3	3393.5	6.3347
600	.024911	3208.6	3582.3	6.6775	.0210640	3191.5	3560.1	6.5866	.0181781	3174.0	3537.6	6.5048
650	.026797	3310.4	3712.3	6.8223	.0227372	3296.0	3693.9	6.7356	.0196929	3281.5	3675.3	6.6582

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Vapor de agua sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

	P = 15 MPa (342.24)				P = 17.5 MPa (354.75)				P = 20 MPa (365.81)			
T	v	u	h	s	v	u	h	s	v	u	h	s
700	.028612	3410.9	3S40.1	6.9572	.0243365	3398.8	3824.7	6.8736	.0211311	3809.1	3809.1	6.7993
800	.032096	3611.0	4092.4	7.2040	.0273849	3601.9	4081.1	7.1245	.0238532	4069.8	4069.8	7.0544
900	.035457	3811.9	4343.8	7.4279	.0303071	3804.7	4335.1	7.3507	.0264463	4326.4	4326.4	7.2830
1000	.038748	4015.4	4596.6	7.6347	.0331580	4009.3	4589.5	7.5588	.0289666	4582.5	4582.5	7.4925
1100	.042001	4222.6	4852.6	7.8282	.0359695	4216.9	4846.4	7.7530	.0314471	4840.2	4840.2	7.6874
1200	.045233	4433.8	5112.3	8.0108	.0387605	4428.3	5106.6	7.9359	.0339071	5101.0	5101.0	7.8706
1300	.048455	4649.1	5375.9	8.1839	.0415417	4643.5	5370.5	8.1093	.0363574	5365.1	5365.1	8.0441
	P = 25 MPa				P = 30MPa				P = 35 MPa			
375	.001973	1798.6	1847.9	4.0319	.001789	1737.8	1791.4	3.9303	.001700	1702.9	1762.4	3.8721
400	.006004	2430.1	2580.2	5.1418	.002790	2067.3	2151.0	4.472S	.002100	1914.0	1987.5	4.2124
425	.007882	2609.2	2806.3	5.4722	.005304	2455.1	2614.2	5.1503	.003428	2253.4	2373.4	4.7747
450	.009162	2720.7	2949.7	5.6743	.006735	2619.3	2821.4	5.4423	.004962	2498.7	2672.4	5.1962
500	.011124	2884.3	3162.4	5.9592	.008679	2820.7	3081.0	5.7904	.006927	2751.9	2994.3	5.6281
550	.012724	3017.5	3335.6	6.1764	.010168	2970.3	3275.4	6.0342	.008345	2920.9	3213.0	5.9025
600	.014138	3137.9	3491.4	6.3602	.011446	3100.5	3443.9	6.2330	.009527	3062.0	3395.5	6.1178
650	.015433	3251.6	3637.5	6.5229	.012596	3221.0	3598.9	6.4057	.010575	3189.8	3559.9	6.3010
700	.016647	3361.4	3777.6	6.6707	.013661	3335.8	3745.7	6.5606	.011533	3309.9	3713.5	6.4631
800	.018913	3574.3	4047.1	6.9345	.015623	3555.6	4024.3	6.8332	.013278	3536.8	4001.5	6.7450
900	.021045	3783.0	4309.1	7.1679	.017448	3768.5	4291.9	7.0717	.014883	3754.0	4274.9	6.9886
1000	.023102	3990.9	4568.5	7.3801	.019196	3978~8	4554.7	7.2867	.016410	3966.7	4541.1	7.2063
1100	.025119	4200.2	4828.2	7.5765	.020903	4189.2	4816.3	7.4845	.017895	4178.3	4804.6	7.4056
1200	.027115	4412.0	5089.9	7.7604	.022589	4401.3	5079.0	7.6691	.019360	4390.7	5068.4	7.5910
1300	.029101	4626.9	1847.9	7.9342	.024266	4616.0	5344.0	7.8432	.020815	4605.1	5333.6	7.7652
	P = 40 MPa				P = 50 MPa				P = 60 MPa			
375	.0016406	1677.1	1742.7	3.8289	.0015593	1638.6	1716.5	3.7638	.0015027	1609.3	1699.5	3.7140
400	.0019077	1854.5	1930.8	4.1134	.0017309	1788.0	1874.6	4.0030	.0016335	1745.3	1843.4	3.9317
425	.0025319	2096.8	2198.1	4.5028	.0020071	1959.6	2060.0	4.2733	.0018165	1892.7	2001.7	4.1625
450	.0036931	2365.1	2512.8	4.9459	.0024862	2159.6	2283.9	4.5883	.0020850	2053.9	2179.0	4.4119
500	.0056225	2678.4	2903.3	5.4699	.0038924	2525.5	2720.1	5.1725	.0029557	2390.5	2567.9	4.9320

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Agua líquida comprimida (unidades SI)*

	P = 5.00 MPa (263.99)				P = 10.00 MPa (311.06				P = 15.00 MPa (342.24)			
T	v	u	h	s	v	u	h	s	v	u	h	s
600	.0080943	3022.6	3346.4	6.0113	6.0113	2942.0	3247.6	5.8177	.0048345	2861.1	3151.2	5.6451
650	.0090636	3158.0	3520.6	6.2054	6.2054	3093.6	3441.8	6.0342	~0055953	3028.8	3364.6	5.8829
700	.0099415	3283.6	3681.3	6.3750	6.3750	3230.5	3616.9	6.2189	.0062719	3177.3	3553.6	6.0824
800	.0115228	3517.9	3978.8	6.6662	6.6662	3479.8	3933.6	6.5290	.0074588	3441.6	3889.1	6.4110
900	.0129626	3739.4	4257.9	6.9150	6.9150	3710.3	4224.4	6.7882	.0085083	3681.0	4191.5	6.6805
1000	.0143238	3954,6	4527.6	7.1356	7.1356	3930.5	4501.1	7.0146	.0094800	3906.4	4475.2	6.9126
1100	.0156426	4167.4	4793.1	7.3364	7.3364	4145.7	4770.6	7.2183	.0104091	4124.1	4748.6	7.1194
1200	.0169403	4380.1	5057.7	7.5224	7.5224	4359.1	5037.2	7.4058	.0113167	4338.2	5017.2	7.3082
1300	.0182292	4594.3	5323.5	7.6969	7.6969	4572.8	5303.6	7.5807	.0122155	4551.4	5284.3	7.4837

Agua líquida comprimida (unidades SI)

	P = 5.00 MPa (263.99)				P = 10.00 MPa (311.06)				P = 15.00 MPa (342.24)			
T	v	u	h	s	v	u	h	s	v	u	h	s
Sat.	.0012859	1147.78	1154.21	2.9201	.0014524	139~.00	1407.53	3.3595	.0016581	1585.58	1610.45	3.6847
0	.0009977	0.03	5.02	0.0001	.0009952	0.10	10.05	0.0003	.0009928	0.15	15.04	0.0004
20	.0009995	83.64	88.64	0.2955	.0009972	83.35	93.32	0.2945	.0009950	83.05	97.97	0.2934
40	.0010056	166.93	171.95	0.5705	.0010034	166.33	176.36	0.5685	.0010013	165.73	180.75	0.5665
60	.0010149	250.21	255.28	0.8284	.0010127	249.34	259.47	0.8258	.0010105	248.49	263.65	0.8231
80	.0010268	333.69	338.83	1.0719	.0010245	332.56	342.81	1.0687	.0010222	331.46	346.79	1.0655
100	.0010410	417.50	422.71	1.3030	.0010385	416.09	426.48	1.2992	.0010361	414.72	430.26	1.2954
120	.0010576	501.79	507.07	1.5232	.0010549	500.07	510.61	1.5188	.0010522	498.39	514.17	1.5144
140	.0010768	586.74	592.13	1.7342	.0010737	584.67	595.40	1.7291	.0010707	582.64	598.70	1.7241
160	.0010988	672.61	678.10	1.9374	.0010953	670.11	681.07	1.9316	.0010918	667.69	684.07	1.9259
180	.0011240	759.62	765.24	2.1341	.0011199	756.63	767.83	2.1274	.0011159	753.74	770.48	2.1209
200	.0011530	848.08	853.85	2.3254	.0011480	844.49	855.97	2.3178	.0011433	841.04	858.18	2.3103
220	.0011866	938.43	944.36	2.5128	.0011805	934.07	945.88	2.5038	.0011748	929.89	947.52	2.4952
240	.0012264	1031.34	1037.47	2.6978	.0012187	1025.94	1038.13	2.6872	.0012114	1020.82	1038.99	2.6770

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Agua líquida comprimida (unidades SI)* *(Continuación)*

	P = 5.00 MPa (263.99				P = 10.00 MPa (311.06)				P = 15.00 MPa (342.24)			
T	v	u	h	s	v	u	h	s	v	u	h	s
260	.0012748	1127.92	1134.30	2.8829	.0012645	1121.03	1133.68	2.8698	.0012550	1114.59	1133.41	2.8575
280					0013216	1220.90	1234.11	3.0547	.0013084	1212.47	1232.09	3.0392
300					.0013972	1328.34	1342.31	3.2468	.0013770	1316.58	1337.23	3.2259
320									.0014724	1431.05	1453.13	3.4246
340									.0016311	1567.42	1591.88	3.6545
	P = 9.00 MPa (303.40)				P = 10.00 MPa (311.06)				P = 12.50 MPa (327.89)			
Sat.	.0020353	1785.47	1826.18	4.0137	—	—	—	—	—	—	—	—
0	.0009904	0.20	20.00	0.0004	.0009856	0.25	29.82	0.0001	.0009766	0.20	49.03	-0.0014
20	.0009928	82.75	102.61	0.2922	.0009886	82.16	111.82	0.2898	.0009804	80.98	130.00	0.2847
40	.0009992	165.15	185.14	0.5646	.0009951	164.01	193.87	0.5606	.0009872	161.84	211.20	0.5526
60	.0010084	247.66	267.82	0.8205	.0010042	246.03	276.16	0.8153	.0009962	242.96	292.77	0.8051
80	.0010199	330.38	350.78	1.0623	.0010156	328.28	358.75	1.0561	.0010073	324.32	374.68	1.0439
100	.0010337	413.37	434.04	1.2917	.0010290	410.76	441.63	1.2844	.0010201	405.86	456.87	1.2703
120	.0010496	496.75	517.74	1.5101	.0010445	493.58	524.91	1.5017	.0010348	487.63	539.37	1.4857
140	.0010678	580.67	602.03	1.7192	.0010621	576.86	608.73	1.7097	.0010515	569.76	622.33	1.6915
160	.0010885	665.34	687.11	1.9203	.0010821	660.81	693.27	1.9095	.0010703	652.39	705.91	1.8890
180	.0011120	750;94	773.18	2.1146	.0011047	745.57	778.71	2.1024	.0010912	735.68	790.24	2.0793
200	.0011387	837.70	860.47	2.3031	.0011302	831.34	865.24	2.2892	.0011146	819.73	875.46	2.2634
220	.0011693	925.89	949.27	2.4869	.0011590	918.32	953.09	2.4710	.0011408	904.67	961.71	2.4419
240	.0012046	1015.94	1040.04	2.6673	.0011920	1006.84	1042.60	2.6489	.0011702	990.69	1049.20	2.6158
260	.0012462	1108.53	1133.45	2.8459	.0012303	1097.38	1134.29	2.8242	.0012034	1078.06	1138.23	2.7860
280	.0012965	1204.69	1230.62	3.0248	.0012755	1190.69	1228.96	2.9985	.0012415	1167.19	1229.26	2.9536
300	.0013596	1306.10	1333.29	3.2071	.0013304	1287.89	1327.80	3.1740	.0012860	1258.66	1322.95	3.1200
320	.0014437	1415.66	1444.53	3.3978	.0013997	1390.64	1432.63	3.3538	.0013388	1353.23	1420.17	3.2867
340	.0015683	1539.64	1571.01	3.6074	.0014919	1501.71	1546.47	3.5425	.0014032	1451.91	1522.07	3.4556
360	.0018226	1702.78	1739.23	3.8770	.0016265	1626.57	1675.36	3.7492	.0014838	1555.97	1630.16	3.6290
380	—	—	—	—	.0018691	1781.35	1837.43	4.0010	.0015883	1667.13	1746.54	3.8100

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Agua sólido saturado-vapor saturado (unidades SI)*

	Volumen específico, m^3/kg			Energía interna, kJ/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión kPa, MPa P	Líquido saturado v_f	Vapor saturado v_g	Líquido saturado u_f	Evap. u_{fg}	Vapor saturado u_g	Líquido saturado h_g	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
0.01	0.6113	1.0908	206.153	–333.40	2708.7	2375.3	–333.40	2834.7	2501.3	–1.2210	10.3772	9.1562
0	0.6108	1.0908	206.315	–333.42	2708.7	2375.3	–333.42	2834.8	2501.3	–1.2211	10.3776	9.1565
–2	0.5177	1.0905	241.663	–337.61	2710.2	2372.5	–337.61	2835.3	2497.6	–1.2369	10.4562	9.2193
–4	0.4376	1.0901	283.799	–341.78	2711.5	2369.8	–341.78	2835.7	2494.0	–1.2526	10.5358	9.2832
–6	0.3689	1.0898	334.139	–345.91	2712.9	2367.0	–345.91	2836.2	2490.3	–1.2683	10.6165	9.3482
–8	0.3102	1.0894	394.414	–350.02	2714.2	2364.2	–350.02	2836.6	2486.6	–1.2839	10.6982	9.4143
–10	0.2601	1.0891	466.757	–354.09	2715.5	2361.4	–354.09	2837.0	2482.9	–1.2995	10.7809	9.4815
–12	0.2176	1.0888	553.803	–358.14	2716.8	2358.7	–358.14	2837.3	2479.2	–1.3150	10.8648	9.5498
–14	0.1815	1.0884	658.824	–362.16	2718.0	2355.9	–362.16	2837.6	2475.5	–1.3306	10.9498	9.6192
–16	0.1510	1.0881	785.907	–366.14	2719.2	2353.1	–366.14	2837.9	2471.8	–1.3461	11.0359	9.6898
–18	0.1252	1.0878	940.183	–370.10	2720.4	,2350.3	–370.10	2838.2	2468.1	–1.3617	11.1233	9.7616
–20	0.10355	1.0874	1128.113	–374.03	2721.6	2341.5	–374.03	2838.4	2464.3	–1.3772	11.2120	9.8348
–22	0.08535	1.0871	1357.864	–377.93	2722.7	2344.7	–377.93	2838.6	2460.6	–1.3928	11.3020	9.9093
–24	0.07012	1.0868	1639.753	–381.80	2723.7	2342.0	–381.80	2838.7	2456.9	–1.4083	11.3935	9.9852
–26	0.05741	1.0864	1986.776	–385.64	2724.8	2339.2	–385.64	2838.9	2453.2	–1.4239	11.4864	10.0625
–28	0.04684	1.0861	2415.201	–389.45	2725.8	2336.4	–389.45	2839.0	2449.5	–1.4394	11.5808	10.1413
–30	0.03810	1.0858	2945.228	–393.23	2726.8	2333.6	–393.23	2839.0	2445.8	–1.4550	11.6765	10.2215
–32	0.03090	1.0854	3601.823	–396.98	2727.8	2330.8	–396.98	2839.1	2442.1	–1.4705	11.7733	10.3028
–34	0.02499	1.0851	4416.253	–400.71	2728.7	2328.0	–400.71	2839.1	2438.4	–1.4860	11.8713	10.3853
–36	0.02016	1.0848	5430.116	–404.40	2729.6	2325.2	–404.40	2839.1	2434.7	–1.5014	11.9704	10.4690
–38	0.01618	1.0844	6707.022	–408.06	2730.5	2322.4	–408.06	2839.0	2431.0	–1.5168	12.0714	10.5546.
–40	0.01286	1.0841	8366.396	–411.70	2731.3	2319.6	–411.70	2838.9	2427.2	–1.5321	12.1768	10.6447

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del amoniaco (unidades SI)*
TABLA *Amoniaco saturado (unidades SI)*

		Volumen específico, m^3/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión abs. kPa P	Líquido saturado v_f	Evap. v_{gg}	Vapor saturado u_f	Líquido saturado h_f	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
–50	40.86	0.001424	2.62524	2.62667	-43.76	1416.34	1372.57	–0.1916	6.3470	6.1553
–48	45.94	0.001429	2.35297	2.35440	-35.04	1410.95	1375.90	–0.1528	6.2666	6.1139
–46	51.52	0.001434	2.11359	2.11503	-26.31	1405.50	1379.19	–0.1142	6.1875	6.0733
–44	57.66	0.001439	1.90262	1.90406	-17.56	1400.00	1332.44	–0.0759	6.1095	6.0336
–42	64.38	0.001444	1.71625	1.71769	-8.79	1394.44	1385.65	–0.0378	6.0326	5.9948
–40	71.72	0.001450	1.55124	1.55269	0	1388.82	1388.82	0	5.9568	5.9568
–38	79.74	0.001455	1.40482	1.40627	8.81	1383.13	1391.94	0.0376	5.8820	5.9196
–36	88.48	0.001460	1.27461	1.27607	17.64	1377.39	1395.03	0.0749	5.8082	5.8831
–34	97.98	0.001465	1.15857	1.16004	26.49	1371.58	1398.07	0.1120	5.7353	5.8473
–32	108.29	0.001471	1.05496	1.05643	35.36	1365.70	1401.06	0.1489	5.6634	5.8123
–30	119.46	0.001476	0.96226	0.96374	44.26	1359.76	1404.01	0.1856	5.5924	5.7780
–28	131.54	0.001482	0.87916	0.88064	53.17	1353.74	1406.92	0.2220	5.5223	5.7443
–26	144.59	0.001487	0.80453	0.80602	62.11	1347.66	1409.77	0.2582	5.4530	5.7113
–24	158.65	0.001493	0.73738	0.73887	71.07	1341.51	1412.58	0.2942	5.3846	5.6788
–22	173.80	0.001498	0.67685	0.67835	80.05	1335.29	1415.34	0.3301	5.3170	5.6470
–20	190.08	0.001504	0.62220	0.62371	89.05	1329.00	1418.05	0.3657	5.2501	5.6158
–18	207.56	0.001510	0.57277	0.57428	98.08	1322.64	1420.71	0.4011	5.1840	5.5851
–16	226.29	0.001516	0.52800	0.52951	107.12	1316.20	1423.32	0.4363	5.1187	5.5550
–14	246.35	0.001522	0.48737	0.48889	116.19	1309.68	1425.88	0.4713	5.0541	5.5254
–12	267.79	0.001528	0.45045	0.45197	125.29	1303.09	1428.38	0.5061	4.9901	5.4963
–10	290.67	0.001534	0.41684	0.41837	134.41	1296.42	1430.83	0.5408	4.9269	5.4676
–8	315.08	0.001540	0.38621	0.38775	143.55	1289.67	1433.22	0.5753	4.8642	5.4395
–6	341.07	0.001546	0.35824	0.35979	152.72	1282.84	1435.56	0.6095	4.8023	5.4118
–4	368.72	0.001553	0.33268	0.33423	161.91	1275.93	1437.84	0.6437	4.7409	5.3846
–2	398.10	0.001559	0.30928	0.31084	171.12	1268.94	1440.06	0.6776	4.6801	5.3577

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del amoniaco (unidades SI)*
TABLA *Amoniaco saturado (unidades SI)* *(Continuación)*

		Volumen específico, m^3/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión abs. kPa P	Líquido saturado v_f	Evap. v_{gg}	Vapor saturado u_f	Líquido saturado h_f	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
0	429.29	0.001566	0.28783	0.28940	180.36	1261.86	1442.22	0.7114	4.6199	5.3313
2	462.34	0.001573	0.26815	0.26972	189.63	1254.69	1444.32	0.7450	4.5603	5.3053
4	497.35	0.001579	0.25005	0.25163	198.93	1247.43	1446.35	0.7785	4.5012	5.2796
6	534.39	0.001586	0.23341	0.23499	208.25	1240.08	1448.32	0.8118	4.4426	5.2543
8	573.54	0.001593	0.21807	0.21966	217.60	1232.63	1450.23	0.8449	4.3845	5.2294
10	614.87	0.001600	0.20392	0.20553	226.97	1225.10	1452.07	0.8779	4.3269	5.2048
12	658.48	0.001608	0.19086	0.19247	236.38	1217.46	1453.84	0.9108	4.2698	5.1805
14	704.43	0.001615	0.17878	0.18040	245.81	1209.72	1455.53	0.9435	4.2131	5.1565
16	752.81	0.001623	0.16761	0.16923	255.28	1201.88	1457.16	0.9760	4.1568	5.1328
18	803.71	0.001630	0.15725	0.15888	264.77	1193.94	1458.71	1.0085	4.1009	5.1094
20	857.22	0.001638	0.14764	0.14928	274.30	1185.89	1460.18	1.0408	4.0455	5.0863
22	913.41	0.001646	0.13872	0.14037	283.85	1177.73	1461.58	1.0730	3.9904	5.0634
24	972.38	0.001654	0.13043	0.13208	293.44	1169.45	1462.89	1.1050	3.9357	5.0407
26	1034.21	0.001663	0.12272	0.12438	303.07	1161.06	1464.13	1.1370	3.8813	5.0182
28	1099.00	0.001671	0.11553	0.11720	3'12.72	1152.55	1465.27	1.1688	3.8272	4.9960
30	1166.83	0.001680	0.10883	0.11051	322.42	1143.92	1466.33	1.2005	3.7735	4.9740
32	1237.80	0.001688	0.10258	0.10427	332.14	1135.16	1467.30	1.2321	3.7200	4.9521
34	1312.00	0.001697	0.09675	0.09845	341.91	1126.27	1468.17	1.2635	3.6669	4.9304
36	1389.52	0.001707	0.09129	0.09300	351.71	1117.25	1468.95	1.2949	3.6140	4.9089
38	1470.46	0.001716	0.08619	0.08790	361.55	1108.09	1469.64	1.3262	3.5613	4.8875
40	1554.92	0.001725	0.08141	0.08313	371.43	1098.79	1470.22	1.3574	3.5088	4.8662
42	1642.98	0.001735	0.07693	0.07866	381.35	1089.34	1470.69	1.3885	3.4566	4.8451
44	1734.75	0.001745	0.07272	0.07447	391.31	1079.75	1471.06	1.4195	3.4045	4.8240
46	1830.33	0.001755	0.06878	0.07053	401.32	1070.00	1471.32	1.4504	3.3526	4.8030
48	1929.82	0.001766	0.06507	0.06684	411.38	1060.09	1471.46	1.4813	3.3009	4.7822
50	2033.32	0.001777	0.06159	0.06336	421.48	1050.01	1471.49	1.5121	3.2493	4.7613

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del amoniaco (unidades SI)*
TABLA *Amoniaco sobrecalentado (unidades SI)*

Presión abs. kPa. (T saturación)		Temperatura, °C											
		–20	*–10*	*0*	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*	*100*
	v	2.4463	2.5471	2.6474	2.7472	2.8466	2.9458	3.0447	3.1435	3.2421	3.3406	3.4390	—
50	*h*	1434.6	1455.7	1476.9	1498.1	1519.3	1540.6	1562.0	1583.5	1605.1	1626.9	1648.8	—
(–46.53)	*s*	6.3187	6.4006	6.4795	6.5556	6.6293	6.7008	6.7703	6.8379	6.9038	6.9682	7.0312	—
	v	1.6222	1.6905	1.7582	1.8255	1.8924	1.9591	2.0255	2.0917	2.1577	2.2237	2.2895	—
75	*h*	1431.7	1453.3	1474.8	1496.2	1517.7	1539.2	1560.7	1582.4	1604.1	1626.0	1648.0	—
(–39.16)	*s*	6.1120	6.1954	6.2756	6.3527	6.4272	6.4993	6.5693	6.6373	6.7036	6.7683	6.8315	—
	v	1.210 1	1.2621	1.3136	1.3647	1.4153	1.4657	1.5158	1.5658	1.6156	1.6652	1.7148	1.8137
100	*h*	1428.8	1450.8	1472.6	1494.4	1516.1	1537.7	1559.5	1581.2	1603.1	1625.1	1647.1	1691.7
(–33.59)	*s*	5.9626	6.0477	6.1291	6.2073	6.2826	6.3553	6.4258	6.4943	6.5609	6.6258	6.6892	6.8120
	v	0.9627	1.0051	1.0468	1.0881	1.1290	1.1696	1.2100	1.2502	1.2903	1.3302	1.3700	1.4494
125	*h*	1425.9	1448.3	1470.5	1492.5	1514.4	1536.3	1558.2	1580.1	1602.1	1624.1	1646.3	1691.0
(–29.06)	*s*	5.8446	5.9314	6.0141	6.0933	6.1694	6.2428	6.3138	6.3827	6.4496	6.5149	6.5785	6.7017
	v	0.7977	0.8336	0.8689	0.9037	0.9381	0.9723	1.0062	1.0398	1.0734	1.1068	1.1401	1.2065
150	*h*	1422.9	1445.7	1468.3	1490.6	1512.8	1534.8	1556.9	1578.9	1601.0	1623.2	1645.4	1690.2
(–25.21)	*s*	5.7465	5.8349	5.9189	5.9992	6.0761	6.1502	6.2217	6.2910	6.3583	6.4238	6.4877	6.6112
	v	—	0.6193	0.6465	0.6732	0.6995	0.7255	0.7513	0.7769	0.8023	0.8275	0.8527	0.9028
200	*h*	—	1440.6	1463.8	1486.8	1509.4	1531.9	1554.3	1576.6	1598.9	1621.3	1643.7	1688.8
(–18.85)	*s*	—	5.6791	5.7659	5.8484	5.9270	6.0025	6.0751	6.1453	6.2133	6.2794	6.3437	6.4679
	v	—	0.4905	0.5129	0.5348	0.5563	0.5774	0.5983	0.6190	0.6396	0.6600	0.6803	0.7206
250	*h*	—	1435.3	1459.3	1482.9	1506.0	1529.0	1551.7	1574.3	1596.8	1619.4	1641.9	1687.3
(–13.65)	*s*	—	5.5544	5.6441	5.7288	5.8093	5.8861	5.9599	6.0309	6.0997	6.1663	6.2312	6.3561
	v	—	—	0.4238	0.4425	0.4608	0.4787	0.4964	0.5138	0.5311	0.5483	0.5653	0.5992
300	*h*	—	—	1454.7	1478.9	1502.6	1525.9	1549.0	1571.9	1594.7	1617.5	1640.2	1685.8
(–9.22)	*s*	—	—	5.5420	5.6290	5.7113	5.7896	5.8645	5.9365	6.0060	6.0732	6.1385	6.2642

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del amoniaco (unidades SI)*
TABLA *Amoniaco sobrecalentado (unidades SI)*

Presión abs. kPa (T saturación)		Temperatura °C											
		-20	*-10*	*0*	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*	*100*
350 (-5.34)	*v*	—	—	0.3601	0.3765	0.3925	0.4081	0.4235	0.4386	0.4536	0.4685	0.4832	0.5124
	h	—	—	1449.9	1474.9	1499.1	1522.9	1546.3	1569.5	1592.6	1615.5	1638.4	1684.3
	s	—	—	54532	5.5427	5.6270	5.7068	5.7828	5.8557	5.9259	5.9938	6.0596	6.1860
400 (-1.87)	*v*	—	—	0.3123	0.3270	0.3413	0.3552	0.3688	0.3823	0.3955	0.4086	0.4216	0.4473
	h	—	—	1445.1	1470.7	1495.6	1519.8	1543.6	1567.1	1590.4	1613.6	1636.7	1682.8
	s	—	—	5.3741	5.4663	5.5525	5.6338	5.7111	5.7850	5.8560	5.9244	5.9907	6.1179
450 (1.27)	*v*	—	—	—	0.2885	0.3014	0.3140	0.3263	0.3384	0.3503	0.3620	0.3737	0.3967
	h	—	—	—	1466.5	1492.0	1516.7	1540.9	1564.7	1588.2	1611.6	1634.9	1681.3
	s	—	—	—	5.3972	5.4855	5.5685	5.6470	5.7219	5.7936	5.8627	5.9295	6.0575
		20	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*	*100*	*120*	*140*	*160*	*180*
500 (-4.15)	*v*	0.2695	0.2810	0.2923	0.3033	0.3141	0.3248	0.3353	0.3562	0.3768	0.3972	—	—
	h	1488.3	1513.5	1538.1	1562.3	1586.1	1609.6	1633.1	1679.8	1726.6	1773.8	—	—
	s	5.4244	5.5090	5.5889	5.6647	5.7373	5.8070	5.8744	6.0031	6.1253	6.2422	—	—
600 (-9.29)	*v*	0.2215	0.2315	0.2412	0.2506	0.2598	0.2689	0.2778	0.2955	0.3128	0.3300	—	—
	h	1480.8	1507.1	1532.5	1557.3	1581.6	1605.7	1629.5	1676.8	1724.0	1771.5	—	—
	s	5.3156	5.4037	5.4862	5.5641	5.6383	5.7094	5.7778	5.9081	6.0314	6.1491	—	—
700 (-18.85)	*v*	0.1872	0.1961	0.2046	0.2129	0.2210	'0.2289	0.2367	0.2521	0.2671	0.2819	—	—
	h	1473.0	1500.4	1526.7	1552.2	1577.1	1601.6	1625.8	1673.7	1721.4	1769.2	—	—
	s	5.2196	5.3115	5.3968	5.4770	5.5529	5.6254	5.6949	5.8268	5.9512	6.0698	—	—
800 (-13.65)	*v*	0.1614	0.1695	0.1772	0.1846	0.1919	0.1990	0.2059	0.2195	0.2328	0.2459	0.2589	—
	h	1464.9	1493.5	1520.8	1547.0	1572.5	1597.5	1622.1	1670.6	1718.7	1766.9	1815.3	—
	s	5.1328	5.2287	5.3171	5.3996	5.4774	5.5513	5.6219	5.7555	5.8811	6.0006	6.1150	—
900 (-9.22)	*v*	—	0.1487	0.1558	0.1626	0.1692	0.1756	0.1819	0.1942	0.2061	0.2179	0.2295	—
	h	—	1486.5	1514.7	1541.7	1567.9	1593.3	1618.4	1667.5	1716.1	1764.5	1813.2	—
	s	—	5.1530	5.2447	5.3296	5.4093	5.4847	5.5565	5.6919	5.8187	5.9389	6.0541	—
10000 (24.91)	*v*	—	0.1321	0.1387	0.1450	0.1511	0.1570	0.1627	0.1739	0.1848	0.1955	0.2060	0.2164
	h	—	1479.1	1508.5	1536.3	1563.1	1589.1	1614.6	1664.3	1713.4	1762.2	1811.2	1860.5
	s	—	5.0826	5.1778	5.2654	5.3471	5.4240	5.4971	5.6342	5.7622	5.8834	5.9992	6.1105

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del amoniaco (unidades SI)*
TABLA *Amoniaco sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

Presión abs. kPa (T saturación)		Temperatura °C 40	50	60	70	80	100	120	140	160	180	200	220
	v	0.1129	0.1185	0.1238	0.1289	0.1339	0.1435	0.1527	0.1618	0.1707	0.1795	—	—
1200	*h*	1495.4	1525.1	1553.3	1580.5	1606.8	1658.0	1708.0	1757.5	1807.1	1856.9	—	—
(-30.95)	*s*	5.0564	5.1497	5.2357	5.3159	5.3916	5.5325	5.6631	5.7860	5.9031	6.0156	—	—
	v	0.0943	0.0994	0.1042	0.1088	0.1132	0.1217	0.1299	0.1378	0.1455	0.1532	—	—
1400	*h*	1481.6	1513.4	1543.1	1571.5	1598.8	1651.4	1702.5	1752.8	1802.9	1853.2	—	—
(36.26)	*s*	4.9463	5.0462	5.1370	5.2209	5.2994	5.4443	5.5775	5.7023	5.8208	5.9343	—	—
	v	—	0.0851	0.0895	0.0937	0.0977	0.1054	0.1127	0.1197	0.1266	0.1334	—	—
1600	*h*	—	1501.0	1532.5	1562.3	1590.7	1644.8	1696.9	1748.0	1798.7	1849.5	—	—
(41.03)	*s*	—	4.9510	5.0472	5.1351	5.2167	5.3659	5.5018	5.6286	5.7485	5.8631	—	—
	v	—	0.0738	0.0780	0.0819	0.0857	0.0927	0.0993	0.1057	0.1119	0.1180	—	—
1800	*h*	—	1487.9	1521.4	1552.7	1582.2	1638.0	1691.2	1743.1	1794.5	1845.7	—	—
(45.37)	*s*	—	4.8614	4.9637	5.0561	5.1410	5.2948	5.4337	5.5624	5.6838	5.7995	—	—
	v	—	0.0647	0.0687	0.0725	0.0760	0.0825	0.0886	0.0945	0.1002	0.1057	—	—
20000	*h*	—	1473.9	1509.8	1542.7	1573.5	1631.1	1685.5	1738.2	1790.2	1842.0	—	—
(49.36)	*s*	—	4.7754	4.8848	4.9821	5.0707	5.2294	5.3714	5.5022	5.6251	5.742	—	—

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-12 (diclorodifluorometano)*
TABLA *R-J2 saturado (unidades SI)*

		Volumen específico, m^3/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión abs. MPa P	Líquido saturado v_f	Evap. v_{gg}	Vapor saturado u_f	Líquido saturado h_f	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
–90	0.00284	0.000608	4.414937	4.415545	–43.284	189.748	146.464	-0.20863	1.03593	0.82730
–85	0.00424	0.000612	3.036704	3.037316	–39.005	187.737	148.731	-0.18558	0.99771	0.81213
–80	0.00617	0.000617	2.137728	2.138345	–34.721	185.740	151.018	-0.16312	0.96155	0.79843
–75	0.00879	0.000622	1.537030	1.537651	–30.430	183.751	153.321	-0.14119	0.92725	0.78606
–70	0.01227	0.000627	1.126654	1.127280	–26.128	181.764	155.636	-0.11977	0.89465	0.77489
–65	0.01680	0.000632	0.840534	0.841166	–21.814	179.774	157.960	-0.09880	0.86361	0.76480
–60	0.02262	0.000637	0.637274	0.637911	–17.485	177.775	160.289	-0.07827	0.83397	0.75570
–55	0.02998	0.000642	0.490358	0.491000	–13.141	175.762	162.621	-0.05815	0.80563	0.74748
–50	0.03915	0.000648	0.382457	0.383105	–8.779	173.730	164.951	-0.03841	0.77848	0.74007
–45	0.05044	0.000654	0.302029	0.302682	–4.400	171.676	167.276	-0.01903	0.75241	0.73338
–40	0.06417	0.000659	0.241251	0.241910	0	169.595	169.595	0	0.72735	0.72735
–35	0.08071	0.000666	0.194732	0.195398	4.420	167.482	171.903	0.01871	0.70322	0.72193
–30	0.10041	0.000672	0.158703	0.159375	8.862	165.335	174.197	0.03711	0.67993	0.71704
–25	0.12368	0.000679	0.130487	0.131166	13.327	163.149	176.476	0.05522	0.65742	0.71264
–20	0.15093	0.000685	0.108162	0.108847	17.816	160.920	178.736	0.07306	0.63563	0.70869
–15	0.18260	0.000693	0.090326	0.091018	22.331	158.643	180.974	0.09063	0.61450	0.70513
–10	0.21912	0.000700	0.075946	0.076646	26.874	156.314	183.188	0.10796	0.59397	0.70194
–5	0.26096	0.000708	0.064255	0.064963	31.446	153.928	185.375	0.12506	0.57400	0.69907
0	0.30861	0.000716	0.054673	0.055389	36.052	151.479	187.531	0.14196	0.55453	0.69649
5	0.36255	0.000724	0.046761	0.047485	40.694	148.961	189.654	0.15865	0.53551	0.69416
10	0.42330	0.000733	0.040180	0.040914	45.375	146.365	191.740	0.17517	0.51689	0.69206
15	0.49137	0.000743	0.034671	0.035413	50.100	143.684	193.784	0.19154	0.49862	0.69015
20	0.56729	0.000752	0.030028	0.030780	54.874	140.909	195.783	0.20777	0.48064	0.68841
25	0.65162	0.000763	0.026091	0.026854	59.702	138.028	197.730	0.22388	0.46292	0.68680
30	0.74490	0.000774	0.022734	0.023508	64.592	135.028	199.620	0.23991	0.44539	0.68530
35	0.84772	0.000786	0.019855	0.020641	69.551	131.896	20 1.446	0.25587	0.42800	0.68387
40	0.96065	0.000798	0.017373	0.018171	74.587	128.613	203.200	0.27179	0.41068	0.68248
45	1.08432	0.000811	0.015220	0.016032	79.712	125.160	204.872	0.28771	0.39338	0.68109
50	1.21932	0.000826	0.013344	0.014170	84.936	121.514	206.450	0.30366	0.37601	0.67967
55	1.36630	0.000841	0.011701	0.012542	90.274	117.645	207.920	0.31967	0.35849	0.67817
60	1.52592	0.000858	0.010253	0.011111	95.743	113.521	209.264	0.33580	0.34073	0.67653
65	1.69884	0.000877	0.008971	0.009847	101.362	109.099	210.460	0.35209	0.32262	0.67471

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-12 (diclorodifluorometano)*
TABLA *R-J2 saturado (unidades SI)* *(Continuación)*

		Volumen específico, m^3/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión abs. MPa P	Líquido saturado v_f	Evap. v_{fg}	Vapor saturado u_f	Líquido saturado h_f	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
70	1.88578	0.000897	0.007828	0.008725	107.155	104.326	211.481	0.36861	0.30401	0.67262
75	2.08745	0.000920	0.006802	0.007723	113.153	99.136	212.288	0.38543	0.28474	0.67017
80	2.30460	0.000946	0.005875	0.006821	119.394	93.437	212.832	0.40265	0.26457	0.66722
85	2.53802	0.000976	0.005029	0.006005	125.932	87.107	213.039	0.42040	0.24320	0.66361
90	2.78850	0.001012	0.004246	0.005258	132.841	79.961	212.802	0.43887	0.22018	0.65905
95	3.05689	0.001056	0.003508	0.004563	140.235	71.707	211.942	0.45833"	0.19477	0.65310
100	3.34406	0.001113	0.002790	0.003903	148.314	61.810	210.124	0.47928	0.16564	0.64492
105	3.65093	0.001197	0.002045	0.003242	157.521	49.047	*20§.5ó8*	0.50285	0.12970	0.63254
110	3.97846	0.001364	0.001098	0.002462	169.550	28.444	197.995	0.53334	0.07423	0.60758
112	4.11548	0.001792	0	0.001792	183.418	0	183.418	0.56888	0	0.56888

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-12 (diclorodifluorometano)*
TABLA *R-J2 sobrecalentado (unidades SI)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		0.05 MPa			0.10 MPa			0.15 MPa	
–20	0.341859	181.170	0.79172	0.167702	179.987	0.74064	—	—	—
–10	0.356228	186.889	0.81388	0.175223	185.839	0.76331	0.114826	184.753	0.73240
0	0.370509	192.705	0.83557	0.182648	191.765	0.78541	0.119980	190.800	0.75495
10	0.384717	198.614	0.85681	0.189995	197.770	0.80700	0.125051	196:906	0.77690
20	0.398864	204.617	0.87764	0.197277	203.855	0.82812	0.130053	203.077	0.79832
30	0.412960	210.710	0.89808	0.204507	210.018	0.84879	0.135000	209.314	0.81924
40	0.427014	216.891	0.91814	0.211692	216.262	0.86905	0.139900	215.621	0.83971
50	0.441031	223.160	0.93784	0.218839	222.583	0.88892	0.144761	221.998	0.85975
60	0.455018	229.512	0.95720	0.225956	228.982	0.90842	0.149589	228.446	0.87940
70	0.468980	235.946	0.97623	0.233045	235.457	0.92757	0.154391	234.963	0.89867
80	0.482919	242.460	0.99494	0.240112	242.007	0.94638	0.159168	241.549	0.91759
		0.20 MPa			0.25 MPa			0.30 MPa	
0	0.088609	189.805	0.73249	0.069752	188.779	0.71437	0.057150	187.718	0.69894
10	0.092550	196.020	0.75484	0.073024	195.109	0.73713	0.059984	194.173	0.72215
20	0.096419	202.281	0.77657	0.076219	201.468	0.75920	0.062735	200.636	0.74458
30	0.100229	208.597	0.79775	0.079351	207.866	0.780.66	0.065419	207.119	0.76633
40	0.103990	214.971	0.81843	0.082432	214.309	0.80157	0.68049	213.635	0.78747
50	0.107710	221.405	0.83866	0.085470	220.803	0.82198	0.070636	220.191	0.80808
60	0.111397	227.902	0.85846	0.088474	227.351	0.84193	0.073186	226.793	0.82820
70	0.115056	234.462	0.87786	0.091449	233.956	0.86147	0.075706	233.444	0.84787
80	0.118691	241.087	0.89689	0.094399	240.620	0.88061	0.078200	240.147	0.86712
90	0.122305	247.775	0.91556	0.097328	247.341	0.89937	0.080673	246.904	0.88599
100	0.125902	254.525	0.93390	0.100239	254.122	0.91779	0.083127	253.716	0.90449
110	0.129484	261.338	0.95191	0.103135	260.962	0.93588	0.085566	260.482	0.92265

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-12 (diclorodifluorometano)*
TABLA *R-J2 sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		0.40 MPa			0.50 MPa			0.60 MPa	
20	0.045837	198.906	0.72043	0.035646	197.077	0.70043	—	—	—
30	0.047971	205.577	0.74281	0.037464	203.963	0.72352	0.030422	202.263	0.70679
40	0.050046	212.250	0.76447	0.039215	210.810	0.74574	0.031966	209.307	0.72965
50	0.052072	218.939	0.78549	0.040912	217.643	0.76722	0.033450	216.300	0.75163
60	0.054059	225.653	0.80595	0.042566	224.479	0.78806	0.034887	223.268	0.77287
70	0.056014	232.401	0.82591	0.044185	231.330	0.80832	0.036286	230.231	0.79346
80	0.057941	239.188	0.84540	0.045775	238.206	0.82807	0.037653	237.201	0.81348
90	0.059846	246.017	0.86447	0.047341	245.112	0.84735	0.038996	244.188	0.83299
100	0.061731	252.892	0.88315	0.048886	252.054	0.86621	0.040316	251.200	0.85204
110	0.063601	259.815	0.90145	0.050415	259.035	0.88467	0.041619	258.242	0.87066
120	0.065456	266.786	0.91941	0.051929	266.057	0.90276	0.042907	265.318	0.88889
130	0.067299	273.806	0.93704	0.053430	273.123	0.92050	0.044181	271.431	0.90675
		0.70 MPa			0.80 MPa			0.90 MPa	
40	0.016761	207.732	0.71529	0.022830	206.074	0.70210	0.019744	204.320	0.68972
50	0.028100	214.903	0.73783	0.024068	213.446	0.72527	0.020912	211.921	0.71361
60	0.029387	222.017	0.75951	0.025247	220.720	0.74744	0.22012	219.373	0.73633
70	0.030632	229.099	0.78045	0.026380	227.934	0.76878	0.023062	226.730	0.75808
80	0.031843	236.171	0.80076	0.027477	235.114	0.78940	0.024073	234.028	0.77905
90	0.033028	243.244	0.82051	0.028545	242.279	0.80941	0.025051	241.290	0.79932
100	0.034189	250.330	0.83976	0.029588	249.443	0.82887	0.026005	248.537	0.81901
110	0.035332	257.436	0.85855	0.030612	256.616	0.84784	0.026937	255.781	0.83817
120	0.036459	264.568	0.87693	0.031619	263.806	0.86636	0.027852	263.032	0.85685
130	0.037572	271.730	0.89492	0.032612	271.019	0.88448	0.028751	270.298	0.87510
140	0.038673	278.925	0.91254	0.033592	278.259	0.90221	0.029639	277.585	0.89295
150	0.039765	286.155	0.92984	0.034563	285.529	0.91960	0.030515	284.896	0.91043

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-12 (diclorodifluorometano)*
TABLA *R-J2 sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		1.00 MPa			1.20 MPa			1.40 MPa	
50	0.018366	210.317	0.70259	0.014483	206.813	0.68165	—	—	—
60	0.019410	217.970	0.72591	0.015463	214.964	0.70649	0.012579	211.613	0.68806
70	0.020397	225.485	0.74814	0.016368	222.851	0.72982	0.013448	219.984	0.71281
80	0.021341	232.910	0.76946	0.017221	230.568	0.75198	0.014247	228.059	0.73601
90	0.022251	240.278	0.79004	0.018032	238,171	0.77321	0.014997	235.940	0.75802
100	0.023133	247.612	0.80996	0.018812	245.699	0.79366	0.015710	243.692 .	0.77907
110	0.023993	254.931	0.82931	0.019567	253.180	0.81344	0.016393	251.355	0.79934
120	0.024835	262.246	0.84816	0.020301	260.632	0.83265	0.017053	258.961	0.81893
130	0.025661	269.567	0.86655	0.021018	268.072	0.85133	0.017695	266.530	0.83795
140	0.026474	276.902	0.88452	0.021721	275.509	0.86955	0.018321	274.078	0.85644
150	0.027275	284.255	0.90211	0.022412	282.952	0.88735	0.018934	281.618	0.87447
160	0.028068	291.632	0.91933	0.023093	290.408	0.90477	0.019535	289.158	0.89208
		1.60 MPa			1.80 MPa			2.00 MPa	
70	0.011208	216.810	0.69641	0.009406	213.208	0~67992	—	—	—
80	0.011984	225.344	0.72092	0.010187	222.363	0.70622	0.008704	219.024	0.69143
90	0.012698	233.563	0.74387	0.010884	231.007	0.73036	0.009406	228.226	0.71713
100	0.013366	241.575	0.76564	0.011525	239~332	0.75297	0.010035	236.936	0.74079
110	0.014000	249.448	0.78646	0.012126	247.446	0.77443	0.010615	245.336	0.76300
120	0.014608	257.225	0.80649	0.012697	255.417	0.79497	0.011159	253.528	0.78411
130	0.015195	264.937	0.82586	0.013244	263.288	0.81474	0.011676	261.577	0.80433
140	0.015765	272.606	0.84465	0.013772	271.090	0.83385	0.012172	269.526	0.82380
150	0.016320	280.250	0.86293	0.014284	278.847	0.85240	0.012651	277.405	0.84265
160	0.016864	287.880	0.88076	0.014784	286.574	0.87045	0.013116	285.237	0.86094
170	0.017398	295.506	0.89816	0.015272	294.284	0.88805	0.013570	293.037	0.87874
180	0.017923	303.136	0.91519	0.015752	301.988	0.90524	0.014013	300.819	0.89611

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-12 (diclorodifluorometano)*
TABLA *R-J2 sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		2.50 MPa			3.00 MPa			3.50 MPa	
90	0.006595	219.736	0.68284	—	—	—	—	—	—
100	0.007264	230.029	0.71081	0.005231	220.723	0.67755	—	—	—
110	0.007837	239.453	0.73573	0.005886	232.256	0.70806	0.004324	222.360	0.67559
120	0.008351	248.379	0.75873	0.006419	242.398	0.73420	0.004959	235.086	0.70840
130	0.008827	256.986	0.78035	0.006887	251.825	0.75788	0.005456	245.865	0.73548
140	0.009273	265.377	0.80091	0.007313	260.818	0.77991	0.005884	·255.728	0.75965
150	0.009697	273.616	0.82062	0.007709	269.521	0.80072	0.006270	265.053	0.78195
160	0.010104	281.748	0.83961	0.008083	278.024	0.82059	0.006626	274.027	0.80291
170	0.010497	289.802	0.85799	0.008439	286.384	0.83967	0.006961	282.759	0.82284
180	0.010879	297.802	0.87584	0.008782	294.640	0.85809	0.007279	291.319	0.84194
190	0.011250	305.764	0.89322	0.00911.4	302.820	0.87594	0.007584	299.752	0.86035
200	0.011614	313.701	0.91018	0.009436	310.946	0.89330	0.007878	308.092	0.87816
		4.00MPa			5.00 MPa				
120	0.003736	225.180	0.67769	0.001369	176.303	0.54710			
130	0.004325	238.691	0.71164	0.002501	216.458	0.64811			
140	0.004781	249.930	0.73918	0.003139	235.004	.0.69359			
150	0.005172	260.124	0.76357	0.003585	248.416	0.72568			
160	0.005522	269.710	0.78596	0.003950	259.910	0.75253			
170	0.005845	278.903	0.80694	0.004268	270.400	0.77648			
180	0.006147	287.825	0.82685	0.004555	280.276	0.79851			
190	0.006434	296.552	0.84590	0.004821	289.740	0.81917			
200	0.006708	305.136	0.86424	0.005071	298.916	0.83877			
210	0.006972	313.614	0.88197	0.005308	307.882	0.85753			
220	0.007228	322.013	0.89917	0.005535	316.690	0.87557			
230	0.007477	330.352	0.91592	0.005753	325.380	0.89301			

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-22 (clorodifluorometano)*
TABLA *Refrigerante-22 saturado (unidades SI)*

		Volumen específico, m^3/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión abs. MPa P	Líquido saturado v_f	Evap. v_{gg}	Vapor saturado u_f	Líquido saturado h_f	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
–70	0.0205	0.000670	0.940268	0.940938	–30.607	249.425	218.818	–0.1401	1.2277	1.0876
–65	0.0280	0.000676	0.704796	0.705472	–25.658	246.925	221.267	–0.1161	1.1862	1.0701
–60	0.0375	0.000682	0.536470	0.537152	–20.652	244.354	223.702	–0.0924	1.1463	1.0540
–55	0.0495	0.000689	0.414138	0.414827	–15.585	241.703	226.117	–0.0689	1.1079	1.0390
–50	0.0644	0.000695	0.323862	0.324557	–10.456	238.965	228.509	–0.0457	1.0708	1.0251
–45	0.0827	0.000702	0.256288	0.256990	–5.262	236.132	230.870	–0.0227	1.0349	1.0122
–40	0.1049	0.000709	0.205036	0.205745	0	233.198	233.197	0	1.0002	1.0002
–35	0.1317	0.000717	0.165683	0.166400	5.328	230.156	235.484	0.0225	0.9664	0.9889
–30	0.1635	0.000725	0.135120	0.135844	10.725	227.001	237.726	0.0449	0.9335	0.9784
–25	0.2010	0.000733	0.111126	0.111859	16.191	223.727	239.918	0.0670	0.9015	0.9685
–20	0.2448	0.000741	0.092102	0.092843	21.728	220.327	242.055	0.0890	0.8703	0.9593
–15	0.2957	0.000750	0.076876	0.077625	27.334	216.798	244.132	0.1107	0.8398	0.9505
–10	0.3543	0.000759	0.064581	0.065340	33.012	213.132	246.144	0.1324	0.8099	0.9422
–5	0.4213	0.000768	0.054571	0.055339	38.762	209.323	248.085	0.1538	0.7806	0.9344
0	0.4976	0.000778	0.046357	0.047135	44.586	205.364	249.949	0.1751	0.7518	0.9269
5	0.5838	0.000789	0.039567	0.040356	50.485	201.246	251.731	0.1963	0.7235	0.9197
10	0.6807	0.000800	0.033914	0.034714	56.463	196.960	253.423	0.2173	0.6956	0.9129
15	0.7891	0.000812	0.029176	0.029987	62.523	192.495	255.018	0.2382	0.6680	0.9062
20	0.9099	0.000824	0.025179	0.026003	68.670	187.836	256.506	0.2590	0.6407	0.8997
25	1.0439	0.000838	0.021787	0.022624	74.910	182.968	257.877	0.2797	0.6137	0.8934
30	1.1919	0.000852	0.018890	0.019742	81.250	177.869	259.119	0.3004	0.5867	0.8871
35	1.3548	0.000867	0.016401	0.017269	87.700	172.516	260.216	0.3210	0.5598	0.8809
40	1.5335	0.000884	0.014251	0.015135	94.272	166.877	261.149	0.3417	0.s:~29	0.8746
45	1.7290	0.000902	0.012382	0.013284	100.982	160.914	261.896	0.3624	0.5058	0.8682
50	1.9423	0.000922	0.010747	0.011669	107.851	154.576	262.428	0.3832	0.4783	0.8615
55	2.1744	0.000944	0.009308	0.010252	114.905	147.800	262.705	0.4042	0.4504	0.8546
60	2.4266	0.000969	0.008032	0.009001	122.180	140.497	262.678	0.4255	0.4217	0.8472
65	2.6999	0.000997	0.006890	0.007887	129.729	132.547	262.276	0.4472	0.3920	0.8391
70	2.9959	0.001030	0.005859	0.006889	137.625	123.772	261.397	0.4695	0.3607	0.8302
75	3.3161	0.001069	0.004914	0.005983	145.986	113.902	259.888	0.4927	0.3272	0.8198
80	3.6623	0.001118	0.004031	0.005149	155.011	102.475	257.486	0.5173	0.2902	0.8075
85	4.0368	0.001183	0.003175	0.004358	165.092	88.598	253.690	0.5445	0.2474	0.7918
90	4.4425	0.001282	0.002282	0.003564	177.204	70.037	247.241	0.5767	0.1929	0.7695
95	4.8835	0.001521	0.001030	0.002551	196.359	34.925	231.284	0.6273	0.0949	0.7222
96.006	4.9773	0.001906	0	0.001906	212.546	0	212.546	0.6708	0	0.6708

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-22 (clorodifluorometano)*
TABLA *Refrigerante-22 sobrecalentado (unidades SI)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		0.05 MPa			0.10MPa			0.15 MPa	
–40	0.440633	234.724	1.07616	0.216331	233.337	1.00523	—	—	—
–30	0.460641	240.602	1.10084	0.226754	239.359	1.03052	0.148723	238.078	0.98773
–20	0.480543	246.586	1.12495	0.237064	245.466	1.05513	0.155851	244.319	1.01288
–10	0.500357	252.676	1.14855	0.247279	251.665	1.07914	0.162879	250.631	1.03733
0	0.520095	258.874	1.1'7166	0.257415	257.956	1.10261	0.169823	257.022	1.06116
10	0.539771	265.180	1.19433	0.2674!S5	264.345	1.12558	0.176699	263.496	1.08444
20	0.559393	271.594	1.21659	0.277500	270.831	1.14-809	0.183516	270.057	1.10721
30	0.578970	278.115	1.23846	0.287467	277.416	1.17017	0.190284	276.709	1.12952
40	0.598507	284.743	1.25998	0.297394	284.101	1.19187	0.197011	283.452	1.15140
50	0.618011	291.478	1.28114	0.307287	290.887	1.21320	0.203702	290.289	1.17289
60	0.631485	298.319	1.30199	0.317149	297.772	1.23418	0.210362	297.220	1.19402
70	0.656935	305.265	1.32253	0.326986	304.757	1.25484	0.216997	304.246	1.21479
80	0.676362	312.314	1.34278	0.336801	311.842	1.27519	0.223608	311.368	1.23525
90	0.695771	319.465	1.36275	0.346596	319.026	1.29524	0.230200	318.584	1.25540
		0.20 MPa			0.25 MPa			0.30 MPa	
–20	0.115203	243.140	0.98184	—	—	—	—	—	—
–10	0.120647	249.574	1.00676	0.095280	248.492	0.98231	0.078344	247.382	0.96170
0	0.126003	256.069	1.03098	0.099689	255.097	1.00695	0.082128	254.104	0.98677
10	0.131286	262.633	1.05458	0.104022	261.755	1.03089	0.085832	260.861	1.01106
20	0.136509	269.273	1.07763	0.108292	268.476	1.05421	0.089469	267.667	1.03468
30	0.141681	275.992	1.10016	0.112508	275.267	1.07699	0.093051	274.531	1.05771
40	0.146809	282.796	1.12224	0.116681	282.132	1.09927	0.096588	281.460	1.08019
50	0.151902	289.686	1.14390	0.120815	289.076	1.12109	0.100085	288.460	1.10220
60	0.156963	296.664	1.16516	0.124918	296.102	1.14250	0.103550	295.535	1.12376
70	0.161997	303.731	1.18607	0.128993	303.212	1.16353	0J06986	302.689	1.14491
80	0.167008	310.890	1.20663	0.133044	310.409	1.18420	0.110399	309.924	1.16569
90	0.171999	318.139	1.22687	0.137075	317.692	1.20454	0.113790	317.241	1.18612
100	0.176972	325.480	1.24681	0.141089	325.063	1.22456	0.117164	324.643	1.20623
110	0.181931	332.912	1.26646	0.145086	332.522	1.24428	0.120522	332.129	1.22603

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-22 (clorodifluorometano)*
TABLA *Refrigerante-22 sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		0.40 MPa			0.50 MPa			0.60 MPa	
0	0.060131	252.051	0.95359	—	—	—	—	—	—
10	0.063060	259.023	0.97866	0.049355	257.108	0.95223	0.040180	255.109	0.92945
20	0.065915	266.010	1.00291	0.051751	264.295	0.97717	0.042280	262.517	0.95517
30	0.068710	273.029	1.02646	0.054081	271.483	1.00128	0.044307	269.888	0.97989
40	0.071455	280.092	1.04938	0.056358	278.690	1.02467	0.046276	277.250	1.00378
50	0.074160	287.209	1.07175	0.058590	285.930	1.04743	0.048198	284.622	1.02695
60	0.076830	294.386	1.09362	0.060786	293.215	1.06963	0.050081	292.020	1.04950
70	0.079470	301.630	1.11504	0.062951	300.552	1.09133	0.051931	299.456	1.07149
80	0.082085	308.944	1.13605	0.065090	307.949	1.11257	0.053754	306.938	1.09298
90	0.084679	316.332	1.15668	0.067206	315.410	1.13340	0.055553	314.475	1.11403
100	0.087254	323.796	1.17695	0.069303	322.939	1.15386	0.057332	322.071	1.13466
110	0.089813	331.339	1.19690	0.071384	330.539	1.17395	0.059094	329.731	1.15492
120	0.092358	338.961	1.21654	0.073450	338.213	1.19373	0.060842	337.458	1.17482
130	0.094890	346.664	1.23588	0.075503	345.963	1.21319	0.062576	345.255	1.19441
		0.70 MPa			0.80 MPa			0.90MPa	
20	0.035487	260.667	0.93565	0.030366	258.737	0.91787	0.026355	256.713	0.90132
30	0.037305	268.240	0.96105	0.032034	266.533	0.94402	0.027915	264.760	0.92831
40	0.039059	275.769	0.98549	0.033632	274.243	0.96905	0.029397	272.670	0.95398
50	0.040763	283.282	1.00910	0.035175	281.907	0.99314	0.030819	280.497	0.97859
60	0.042424	290.800	1.03201	0.036674	289.553	1.01644	0.032193	288.278	1.00230
70	0.044052	298.339	1.05431	0.038136	297.202	1.03906	0.033528	296.042	1.02526
80	0.045650	305.912	1.07606	0.039568	304.868	1.06108	0.034832	303.807	1.04757
90	0.047224	313.527	1.09732	0.040974	312.565	1.08257	0.036108	311.590	1.06930
100	0.048778	321.192	1.11815	0.042359	320.303	1.10359	0.037363	319.401	1.09052
110	0.050313	328.914	1.13856	0.043725	328.087	1.12417	0.038598	327.251	1.11128
120	0.051834	336.696	1.15861	0.045076	335.925	1.14437	0.039817	335.147	1.13162
130	0.053341	344.541	1.17832	0.046413	343.821	1.16420	0.041022	343.094	1.15158
140	Q,054836	352.454	1.19770	0.047738	351.778	1.18369	0.042215	351.097	1.17119
150	0.056321	360.435	1.21679	0.049052	359.799	1.20288	0.043398	359.159	1.19047

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-22 (clorodifluorometano)*
TABLA *Refrigerante-22 sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		1.00 MPa			1.20 MPa			1.40 MPa	
30	0.024600	262.912	0.91358	—	—	—	—	—	—
40	0.025995	271.042	0.93996	0.020851	267.602	0.91411	0.017120	263.861	0.89010
50	0.027323	279.046	0.96512	0.022051	276.011	0.94055	0.018247	272.766	0.91809
60	0.028601	286.973	0.98928	0.023191	284.263	0.96570	0.019299	281.401	0.94441
70	0.029836	294.859	1.01260	0.024282	292.415	0.98981	0.020295	289.858	0.96942
80	0.031038	302.727	1.03520	0.025336	300.508	1.01305	0.021248	298.202	0.99339
90	0.032213	310.599	1.05718	0.026359	308.570	1.03556	0.022167	306.473	1.01649
100	0.033364	318.488	1.07861	0.027357	316.623	1.05744	0.023058	314.703	1.03884
110	0.034495	326.405	1.09955	0.028334	324.682	1.07875	0.023926	322.916	1.06056
120	0.035609	334.360	1.12004	0.029292	332.762	1.09957	0.024775	331.128	1.08172
130	0.036709	342.360	1.14014	0.030236	340.871	1.11994	0.025608	339.354	1.10238
140	0.037797	350.410	1.15986	0.031166	349.019	1.13990	0.026426	347.603	1.12259
150	0.038873	358.514	1.17924	0.032084	357.210	1.15949	0.027233	355,885	1.14240
160	0.039940	366.677	1.19831	0.032993	365.450	1.17873	0.028029	364.206	1.16183
		1.60 MPa			1.80 MPa			2.00 MPa	
50	0.015351	269.262	0.89689	0.013052	265.423	0.87625	—	—	—
60	0.016351	278.358	0.92461	0.014028	275.097	0.90573	0.012135	271.563	0.88729
70	0.017284	287.171	0.95068	0.014921	284.331	0.93304	0.013008	281.310	0.91612
80	0.018167	295.797	0.97546	0.015755	293.282	0.95876	0.013811	290.640	0.94292
90	0.019011	304.301	0.99920	0.016546	302.046	0.98323	0.014563	299.697	0.96821
100	0.019825	312.725	1.02209	0.017303	310.683	1.00669	0.015277	308.571	0.99232
110	0.020614	321.103	1.04424	0.018032	319.239	1:02932	0.015960	317.322	1.01546
120	0.021382	329.457	1.06576	0.018738	327.745	1.05123	0.016619	325.991	1.03780
130	0.022133	337.805	1.08673	0.019427	336.224	1.07253	0.017258	334.610	1.05944
140	0.022869	346.162	1.10721	0.020099	344.695	1.09329	0.017881	343.201	1.08049
150	0.023592	354.540	1.12724	0.020759	353.172	1.11356	0.018490	351.783	1.10102
160	0.024305	362.945	1.14688	0.021407	361.666	1.13340	0.019087	360.369	1.12107
170	0.025008	371.386	1.J6614	0.022045	370.186	1.15284	0.019673	368.970	1.14070
180	0.025703	379.869	1.18507	0.022675	378.738	1.17193	0.020251	377.595	1.15995

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-22 (clorodifluorometano)*
TABLA *Refrigerante-22 sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		2.50 MPa			3.00 MPa			3.50 MPa	
70	0.009459	272.677	0.87476	—	—	—	—	—	—
80	0.010243	283.332	0.90537	0.007747	274.530	0.86780	0.005765	262.739	0.82489 I
90	0.010948	293.338	0.93332	0.008465	286.042	0.89995	0.006597	277.268	0.86548
100	0.011598	302.935	0.95939	0.009098	296.663	0.92881	0.007257	289.504	0.89872
110	0.012208	312.261	0.98405	0.009674	306.744	0.95547	0.007829	300.640	0.92818
120	0.012788	321.400	1.00760	0.010211	316.470	0.98053	0.008346	311.129	0.95520
130	0.013343	330.412	1.03023	0.010717	325.955	1.00435	0.008825	321.196	0.98049
140	0.013880	339.336	1.05210	0.011200	335.270	1.02718	0.009276	330.976	1.00445
150	0.014400	348.205	1.07331	0.011665	344.467	1.04918	0.009704	340.554	1.02736
160	0.014907	357.040	1.09395	0.012114	353.584	1.07047	0.010114	349.989	1.04940
170	0.015402	365.860	1.11408	0.012550	362.647	1.09116	0.010510	359.324	1.07071
180	0.015887	374.679	1.13376	0.012976	371.679	1.11131	0.010894	368.590	1.09138
190	0.016364	383.508	1.15303	0.013392	380.695	1.13099	0.011268	377.810	1.11151
200	0.016834	392.354	1.17192	0.013801	389.708	1.15024	0.011634	387.004	1.13115
		4.00 MPa			5.00MPa			6.00MPa	
90	0.005037	265.629	0.82544	—	—	—	—	—	—
100	0.005804	280.997	0.86721	0.003334-	253.042	0.78005	—	—	—
110	0.006405	293.748	0.90094	0.004255	275.919	0.84064	0.002432	243.278	0.74674
120	0.006924	305.273	0.93064	0.004851	291.362	0.88045	0.003333	272.385	0.82185
130	0.007391	316.080	0.95778	0.005335	304.469	0.91337	0.003899	290.253	0.86675
140	0.007822	326.422	0.98312	0.005757	316.379	0.94256	0.004345	304.757	0.90230
150	0.008226	336.446	1.00710	0.006139	327.563	0.96931	0.004728	317.633	0.93310
160	0.008610	346.246	1.02999	0.006493	338.266	0.99431	0.005071	329.553	0.96094
170	0.008978	355.885	1.05199	0.006826	348.633	1.01797	0.005386	340.849	0.98673
180	0.009332	365.409	1.07324	0.007142	358.760	1.04057	0.005680	351.715	1.01098
190	0.009675	374.853	1.09386	0.007444	368.713	1.06230	0.005958	362.271	1.03402
200	0.010009	384.240	1.11391	0.007735	378.537	1.08328	0.006222	372.602	1.05609
210	0.010335	393.593	1.13347	0.008018	388.268	1.10363	0.006477	382.764	1.07734
220	0.010654	402.925	1.15259	0.008292	397.932	1.12343	0.006722	392.801	1.09790

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-134ª (1,1,1,2-tetrafluoretano)*
TABLA *Refrigerante-134ª saturado (unidades SI)*

		Volumen específico, m³/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión abs. MPa P	Líquido saturado v_f	Evap. v_{gg}	Vapor saturado u_f	Líquido saturado h_f	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
–33	0.0737	0.000718	0.25574	0.25646	157.417	220.491	377.908	0.8346	0.9181	1.7528
–30	0.0851	0.000722	0.22330	0.22402	16L118	218.683	379.802	0.8499	0.8994	1.7493
–26.25	0.1013	0.000728	0.18947	0.19020	165.&02	216.360	382.162	0.8690	0.8763	1.7453
–25	0.1073	0.000730	0.17956	0.18029	167.381	215.569	382.950	0.8754	0.8687	1,7441
–20	0.1337	0.000738	0.14575	0.14649	173.744	212.340	386.083	0.9007	0.8388	1.7395
–15	0.1650	0.000746	0.11932	0.12007	180.193	209.004	389.197	0.9258	0.8096	1,7354
–10	0.2017	0.000755	0.098454	0.099209	186.721	205.564	392.285	0.9507	0.7812	1.7319
–5	0.2445	0.000764	0.081812	0.082576	193.324	202.016	395.340	0.9755	0.7534	1.7288
0	0.2940	0.000773	0.068420	0.069193	200.000	198.356	398.356	1.0000	0.7262	1.7262
5	0.3509	0.000783	0.057551	0.058334	206.751	194.572	401.323	1.0243	0.6995	1.7239
10	0.4158	0.000794	0.048658	0.049451	213.580	190.652	404.233	1.0485	0.6733	1.7218
15	0.4895	0.000805	0.041326	0.042131	220.492	186.582	407.075	1.0725	0.6475	1.7200
20	0.5728	0.000817	0.035238	0.036055	227.493	182.345	409.838	1.0963	0.6220	1.7183
25	0.6663	0.000829	0.030148	0.030977	234.590	177.920	412.509	1.1201	0.5967	1.7168
30	0.7710	0.000843	0.025865	0.026707	241.790	173.285	415.075	1.1437	0.5716	1.7153
35	0.8876	0.000857	0.022237	0.023094	249.103	168.415	417.518	1.1673	0.5465	1.7139
40	1.0171	0.000873	0.019147	0.020020	256.539	163.282	419.821	1.1909	0.5214	1.7123
45	1.1602	0.000890	0.016499	0.017389	264.110	157.852	421.962	1.2145	0.4962	1.7106
50	1.3180	0.000908	0.014217	0.015124	271.830	152.085	423.915	1.2381	0.4706	1.7088
55	1.4915	0.000928	0.012237	0.013166	279.718	145.933	425.650	1.2619	0.4447	1.7066
60	1.6818	0.000951	0.010511	0.011462	287.794	139.336	427.130	1.2857	0.4182	1.7040
65	1.8898	0.000976	0.008995	0.009970	296.088	132.216	428.305	1.3099	0.3910	1.7009
70	2.1169	0.001005	0.007653	0.008657	304.642	124.468	429.110	1.3343	0.3627	1.6970
75	2.3644	0.001038	0.006453	0.007491	313.513	115.939	429.451	1.3592	0.3330	1.6923
80	2.6337	0.001078	0.005368	0.006446	322.794	106.395	429.189	1.3849	0.3013	1.6862
85	2.9265	0.001128	0.004367	0.005495	332.644	95.440	428.084	1.4117	0.2665	1.6782
90	3.2448	0.001195	0.003412	0.004606	343.380	82.295	425.676	1.4404	0.2266	1.6670
95	3.5914	0.001297	0.002432	0.003729	355.834	64.984	420.818	1.4733	0.1765	1.6498
101.15	4.0640	0.001969	0	0.001969	390.977	0	390.977	1.5658	0	1.5658

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-134ª (1,1,1,2-tetrafluoretano)*
TABLA *Refrigerante-134a sobrecalentado*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		0.10MPa			0.15 MPa			0.20 MPa	
-25	0.19400	383.212	1.75058	—	—	—	—	—	—
-20	0.19860	387.215	1.76655	—	—	—	—	—	—
-10	0.20765	395.270	1.79775	0.13603	393.839	1.76058	0.10013	392.338	1.73276
0	0.21652	403.413	1.82813	0.14222	402.187	1.79171	0.10501	400.911	1.76474
10	0.22527	411.668	1.85780	0.14828	410.602	1.82197	0.10974	409.500	1.79562
20	0.23393	420.048	1.88689	0.15424	419.111	1.85150	0.11436	418.145	1.82563
30	0.24250	428.564	1.91545	0.16011	427.730	1.88041	0.11889	426.875	1.85491
40	0.25102	437.223	1.94355	0.16592	436.473	1.90879	0.12335	435.708	1.88357
50	0.25948	446.029	1.97123	0.17168	445.350	1.93669	0.12776	444.658	1.91171
60	0.26791	454.986	1.99853	0.17740	454.366	1.96416	0.13213	453.735	1.93937
70	0.27631	464.096	2.02547	0.18308	463.525	1.99125	0.13646	462.946	1.96991
80	0.28468	473.359	2.05208	0.18874	472.831	2.01798	0.14076	472.296	1.99346
90	0.29303	482.777	2.07937	0.19437	482.285	2.04428	0.14504	481.788	2.01997
100	0.30136	492.349	2.10437	0.1999	491.888	2.07046	0.14930	491.424	2.046614
		0.25 MPa			0.30 MPa			0.40 MPa	
0	0.082637	399.579	1.74284	—	—	—	—	—	—
10	0.086584	408.357	1.77440	0.071110	407.171	1.75637	0.051681	404.651	1.72611
20	0.090408	417.151	1.80492	0.074415	416.124	1.78744	0.054362	413.965	1.75844
30	0.094139	425.997	1.83460	0.077620	425.096	1.81754	0.056926	423.216	1.78947
40	0.097798	434.925	1.86357	0.080748	434.124	1.84684	0.059402	432.465	1.81949
50	0.101401	443.953	1.89195	0.083816	443.234	1.87547	0.061812	441.751	1.84868
60	0.104958	453.094	1.91980	0.086838	452.442	1.90354	0.064169	451.104	1.87718
70	0.108480	462.359	1.94720	0.089821	461.763	1.93110	0.066484	460.545	1.90510
80	0.111972	471.754	1.97419	0.082774	471.206	1.95823	0.068767	470.088	1.93252
90	0.115440	481.285	2.00080	0.095702	480.777	1.98495	0.071022	479.745	1.95948
100	0.118888	490.955	2.02707	0.098609	490.482	2.01131	0.073254	489.523	1.98604
110	0.122318	500.766	2.05302	0.101498	500.324	2.03734	0.075468	499.428	2.01223
120	0.125734	510.720	2.07866	0.104371	510.304	2.06305	0.077665	509.464	2.03809

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-134ª (1,1,1,2-tetrafluoretano)*
TABLA *Refrigerante-134a sobrecalentado (Continuación)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		0.50 MPa			0.60 MPa			0.70 MPa	
20	0.042256	411.645	1.73420	—	—	—	—	—	—
30	0.044457	421.221	1.76632	0.036094	419.093	1.74610	0.030069	416.809	1.72770
40	0.046557	430.720	1.79715	0.037958	428.881	1.77786	0.031781	426.933	1.76056
50	0.048581	440.205	1.82696	0.039735	438.589	1.80838	0.033392	436.895	1.79187
60	0.050547	449.718	1.85596	0.041447	448.279	1.83791	0.034929	446.782	1.82201
70	0.052467	459.290	1.88426	0.043108	457.994	1.86664	0.036410	456.655	1.85121
80	0.054351	468.942	1.91199	0.044730	467.764	1.89471	0.037848	466.554	1.87964
90	0.056205	478.690	1.93921	0.046319	477.611	1.92220	0.039251	476.507	1.90743
100	0.058035	488.546	1.96598	0.047883	487.550	1.94920	0.040627	486.535	1.93467
110	0.059845	498.518	1.99235	0.049426	497.594	1.97576	0.041980	496.654	1.96143
120	0.061639	508.613	2.01836	0.050951	507.750	2.00193	0.043314	506.875	1.98777
130	0.063418	518.835	2.04403	0.052461	518.026	2.02774	0.044633	517.207	2.01372
140	0.065184	529.187	2.06940	0.053958	528.425	2.05322	0.045938	527.656	2.03932
		0.80 MPa			0.90 MPa			1.00 MPa	
40	0.027113	424.860	1.74457	0.023446	422.642	1.72943	0.020473	420.249	1.71479
50	0.028611	435.114	1.77680	0.024868	433.235	1.76273	0.021849	431.243	1.74936
60	0.030024	445.223	1.80761	0.026192	443.595	1.79431	0.023110	441.890	1.78181
70	0.031375	455.270	1.83732	0.027447	453.835	1.82459	0.024293	452.345	1.81273
80	0.032678	465.308	1.86616	0.028649	464.025	1.85387	0.025417	462.703	1.84248
90	0.033944	475.375	1.89427	0.029810	474.216	1.88232	0.026497	473.027	1.87131
100	0.035180	485.499	1.92177	0.030940	484.441	1.91010	0.027543	483.361	1.89938
110	0.036392	495.698	1.94874	0.032043	494.726	1.93730	0.028561	493.736	1.92682
120	0.037584	505.988	1.97525	0.033126	505.088	1.96399	0.029556	504.175	1.95371
130	0.038760	516.379	2.00135	0.034190	515.542	1.99025	0.030533	514.694	1.98013
140	0.039921	526.880	2.02708	0.035241	526.096	2.01611	0.031495	525.305	2.00613
150	0.041071	537.496	2.05247	0.036278	536.760	2.04161	0.032444	536.017	2.03175

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-134ª (1,1,1,2-tetrafluoretano)*
TABLA *Refrigerante-134a sobrecalentado (Continuación)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		1.20 MPa			1.40 MPa			1.60 MPa	
50	0.017243	426.845	1.72373	—	—	—	—	—	—
60	0.018439	438.210	1.75837	0.015032	434.079	1.73597	0.012392	429.322	1.71349
70	0.019530	449.179	1.79081	0.016083	445.720	1.77040	0.013449	441.888	1.75066
80	0.020548	459.925	1.82168	0.017040	456.944	1.80265	0.014378	453.722	1.78466
90	0.021512	470.551	1.85135	0.017931	467.931	1.83333	0.015225	465.145	1.81656
100	0.022436	481.128	1.88009	0.018775	478.790	1.86282	0.016015	476.333	1.84695
110	0.023329	491.702	1.90805	0.019583	489.589	1.89139	0.016763	487.390	187619
120	0.024197	502.307	1.93537	0.020362	500.379	1.91918	0.017479	498.387	1.90452
130	0.025044	512.965	1.96214	0.021118	511.192	1.94634	0.018169	509.371	1.93211
140	0.025874	523.697	1.98844	0.021856	522.054	1.97296	0.018840	520.376	1.95908
150	0.026691	534.514	2.01431	0.022579	532.984	1.99910	0.019493	531.427	1.98551
160	0.027495	545.426	2.03980	0.023289	543.994	2.02481	0.020133	342.542	2.01147
170	0.028289	556.443	2.06494	0.023988	555.097	2.05015	0.020761	553.735	2.03702
		1.80 MPa			2.0 MPa			2.50 MPa	
70	0.011341	437.562	1.73085	0.009581	432.531	1.71011	—	—	—
80	0.012273	450.202	1.76717	0.010550	446.304	1.74968	0.007221	433.797	1.70180
90	0.013854	462.164	1.80057	0.011374	458.951	1.78500	0.008157	449.499	1.74567
100	0.013854	473.741	1.83202	0.012111	470.996	1.81772	0.008907	463.279	1.78311
110	0.014560	485.095	1.82056	0.012789	482.693	1.84866	0.009558	476.129	1.81709
120	0.015230	496.325	1.89098	0.013424	494.187	1.87827	0.010148	488.457	1.84886
130	0.015871	507.498	1.91905	0.014028	505.569	1.90686	0.010694	500.474	1.87904
140	0.016490	518.659	1.94639	0.014608	516.900	1.93463	0.011208	512.307	1.90804
150	0.017091	529.841	1.97314	0.015168	528.224	1.96171	0.011698	524.037	1.93609
160	0.017677	541.068	1.99936	0.015712	539.571	1.98821	0.012169	535.722	1.96338
170	0.018251	552.357	2.02513	0.016242	550.963	2.01421	0.012624	547.399	1.99004
180	0.018814	563.724	2.05049	0.016762	562.418	2.03977	0.013066	559.098	2.01614
190	0.019369	575.177	2.07549	0.017272	573.950	2.06494	0.013498	570.841	2.04177

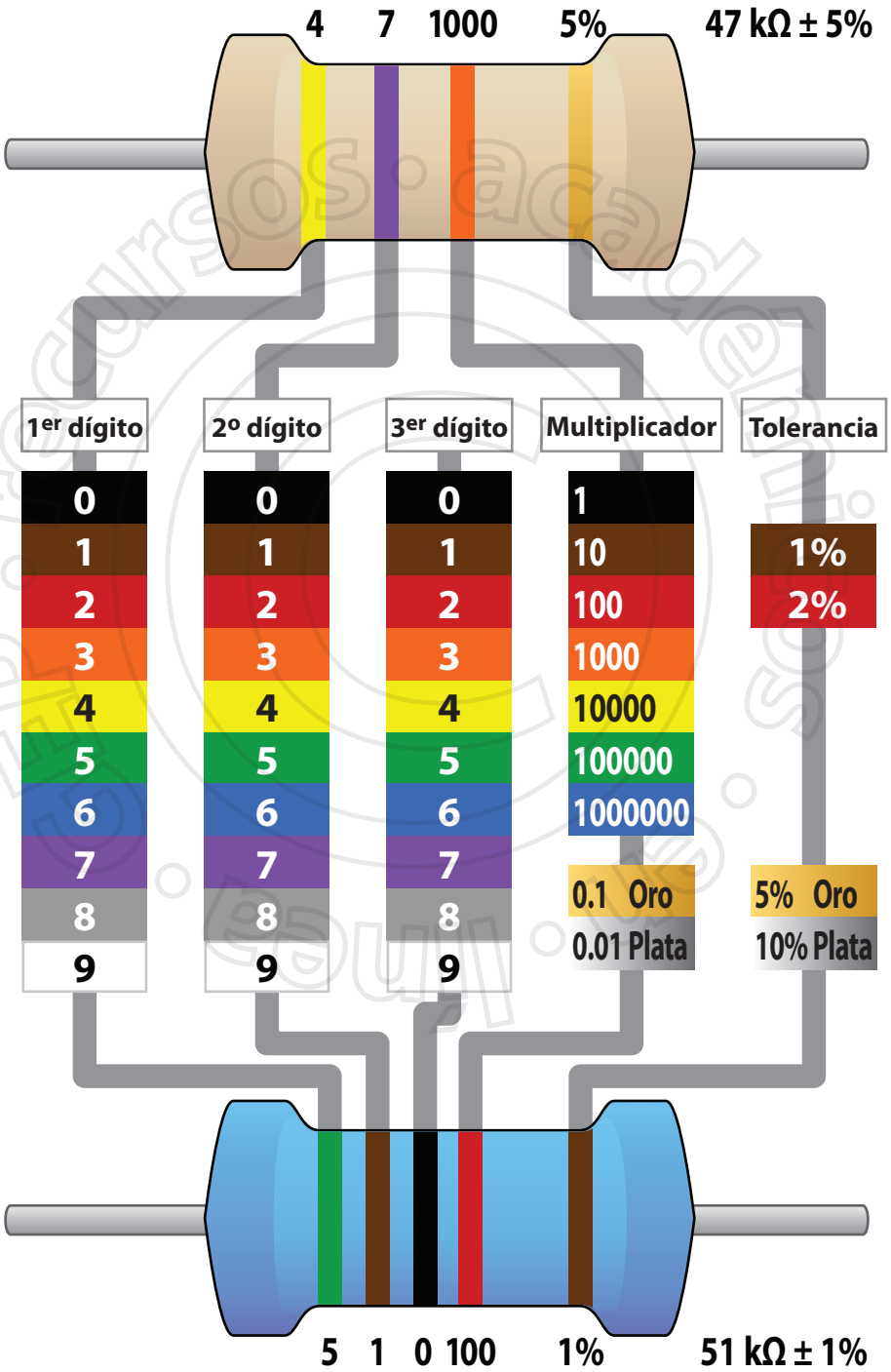
D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-134ª (1,1,1,2-tetrafluoretano)*
TABLA *Refrigerante-134a sobrecalentado (Continuación)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		3.0 MPa			3.50 MPa			4.0 MPa	
90	0.005755	436.193	1.69950	—	—	—	—	—	—
100	0.006653	453.731	1.74717	0.004839	440.433	1.70386	—	—	—
110	0.007339	468.500	1.78623	0.005667	459.211	1.75355	0.004277	446.844	1.71480
120	0.007924	482.043	1.82113	0.006289	474.697	1.79346	0.005055	465.987	1.76415
130	0.008446	494.915	1.85347	0.006813	488.771	1.82881	0.005559	481.865	1.80404
140	0.008926	507.388	1.88403	0.007279	502.070	1.86142	0.006027	496.295	1.83940
150	0.009375	519.618	1.91328	0.007706	514.928	1.89216	0.006444	509.925	1.87200
160	0.009801	531.704	1.94151	0.008103	527.496	1.92151	0.006825	523.072	1.90271
170	0.010208	543.713	1.96892	0.008480	539.890	1.94980	0.007181	535.917	1.93203
180	0.010601	555.690	1.99565	0.008839	552.185	1.97724	0.007517	548.573	1.96028
190	0.010982	567.670	2.02180	0.009185	564.430	2.00397	0.007837	561.117	1.98766
200	0.011353	579.678	2.04745	0.009519	576.665	2.03010	0.008145	573.601	2.01332

D.R. © 2011 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Código de colores de los resistores eléctricos



D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1

a) $N_e = 3.9357 \times 10^{24} e$

b) $N_e = 9.363 \times 10^{16} e$

1.2

$N = 1.248 \times 10^{16} e$

1.3

$m = 1.665 \times 10^{-10}$ g

1.4

$q_1 = 3.72 \times 10^{-8}$ C ; $q_2 = 1.118 \times 10^{-7}$ C

1.5

a) $F = 22.5$ N

b) La fuerza es de atracción

1.6

$r = 0.5196$ m

1.7

$F = 457300.77$ N ; ángulo de $70.85°$

1.8

$F = 108$ N a la derecha

1.9

$F = 388.96$ N ; ángulo de $75.53°$

1.10

$F = 63.28125$ N a la derecha

1.11

$F = 8729.53$ N ; $\theta = -29.93°$

1.12

a) $F = 279.435$ N

b) $\theta = 68.06°$

c) $E_p = -3.6$ J

1.13

$x = 0.2$ m

1.14

a) $q_1 = 2.942 \times 10^{12} e$

b) $q_2 = 8.827 \times 10^{12} e$

1.15

$r = 0.2412$ m

1.16

$F = 55.54$ N ; $\theta = 235.54°$

1.17

a) $F = 199.94$ N ; $\theta = -11.99°$

b) $E_p = 9.192$ J

c) $V = 30.64 \times 10^5$ V

1.18

$F = 3.75 \times 10^{-5}$ N

1.19

r = 2.12 m

1.20

$E_R = 72182.51 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ $\underline{|\theta = 178.74°}$

1.21

a) $E = 12877.48 \frac{\text{N}}{\text{C}} \uparrow$

b) $F = 0.6438$ N $\downarrow$

1.22

a) $T = 0.9396$ N

b) $q = 1.4267$ μC

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.23

a) $q = 1.5 \times 10^{-8}$ C

b) $T = 8.28 \times 10^{-3}$ N

1.24

a) $q = 5.489 \times 10^{-6}$ C

b) $T = 0.1298$ N

1.25

a) $T = 0.044$ N

b) $q = 69.54$ μC

1.26

$F = 9.2 \times 10^{-6}$ N

1.27

$r = 0.416$ m

1.28

$E = 5.5737 \times 10^{-11} \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$

1.29

$E = 1.022 \times 10^{-7} \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$

1.30

$E_x = 9.42 \times 10^{6} \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$

1.31

a) $t = 1.5 \times 10^{-8}$ s

b) $v = at = 13.26 \times 10^{6} \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

1.32

a) $E = 240 \dfrac{\text{V}}{\text{m}}$

b) $F = 3.8448 \times 10^{-17}$ N

c) $E_p = 1.9224 \times 10^{-18}$ J

d) $v = 20.54 \times 10^{5} \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

e) $a = 4.2204 \times 10^{13} \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

1.33

a) $F = 8.2538 \times 10^{-8}$ N

b) $v = 21.904 \times 10^{5} \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

1.34

a) $E = 1680.59 \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$

b) $v = 3.84 \times 10^{6} \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

1.35

a) $t = 1.23 \times 10^{-9}$ s

b) $v = 6.49 \times 10^{7} \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

c) $E_c = 1.91 \times 10^{-15}$ J

1.36

a) $v = 1.258 \times 10^{7} \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

b) $t = 2.38 \times 10^{-8}$ s

1.37

a) $x = 0.455$ m ; $y = 0.4851$ m

b) $E_c = 4.265 \times 10^{-6}$ J

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.38

a) $V = 1070$ volts

b) $m = 4624.66$ kg

1.39

a) $d = 2.2$ m

b) $q = 183.8$ nC

1.40

$E = 6 \times 10^{7} \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$; alejándose de la barra

1.41

$E = 9.216 \times 10^{11} \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$

1.42

$v = 2.85 \ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

1.43

a) $q = 7.848 \times 10^{-6}$ C

b) Hacia arriba

1.44

a) $\phi_E = 600 \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{C}}$

b) $\phi_E = -599.998 \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{C}}$

c) $\phi_T = +\phi_T + \phi_T = 600 - 599.99 = 0$

1.45

$E = 13500000 \ \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$

1.46

a) $\sigma = 33.33 \times 10^{-6} \dfrac{\text{C}}{\text{m}^2}$

b) $E = 30.13 \times 10^{5} \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$

1.47

$E = 4.86 \times 10^{9} \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$

1.48

a) $q = 3.0627 \times 10^{-8}$ C

b) $q = 0$

1.49

$E = 1.33 \times 10^{6} \ \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$

1.50

$E_{p3} = 20.16$ J

1.51

a) $E_p = -3$ J

b) $E_T = 9.428$ J

c) $E = 1.8$ J

1.52

$E_{p3} = -0.4725$ J

1.53

$v = 0.1106 \ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

1.54

a) $E = 6000 \ \dfrac{\text{V}}{\text{m}}$

b) $F = 9.6 \times 10^{-16}$ N

c) $E_p = 1.92 \times 10^{-17}$ J

d) $v_A = 6.49 \times 10^{6} \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

e) $a = 1.05 \times 10^{15} \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

1.55

$V_{a-b} = 25000$ V

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.56

$N_e = 2.708 \times 10^{18} e$

1.57

a) $E = 37500 \ \frac{\text{N}}{\text{C}}$

b) $F = 6 \times 10^{-15}$ N

c) $a = 6.586 \times 10^{15} \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

d) $V = 1.63 \times 10^{7}$ m

1.58

a) $F = 1.92 \times 10^{-16}$ N

b) $a = 2.1075 \times 10^{14} \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

c) $v_a = 2.053 \times 10^{6} \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

1.59

$V_p = 5.81 \times 10^{6}$ V

1.60

a) $r = 0.065$ m

b) $q = 5.78 \times 10^{-9}$ C

1.61

$q = 2.7 \times 10^{-8}$ C

1.62

$a = 1.229 \times 10^{14} \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

1.63

a) $\Delta V = -20.719$ V

b) En el origen

1.64

a) $E = 0$

b) $V = 1.17 \times 10^{6}$ V

c) $E = 5.85 \times 10^{6} \ \frac{\text{N}}{\text{C}}$

1.65

a) $E_x = -\frac{dV}{dx} = -7 + 4xy$

$E_y = -\frac{dV}{dy} = 2x^2 - 3z^3$

$E_z = -\frac{dV}{dz} = -9yz^2$

b) $E = 55.54 \ \frac{\text{N}}{\text{C}}$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1
$q = 5 \times 10^{-9}$ C

2.2
$L = 12.4745$ cm

2.3
$C = 0.2124$ nF

2.4
$q = 6 \times 10^{-9}$ C

2.5
$\sigma = 75 \times 10^{-7} \ \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$

2.6
$r = 8.046$ cm

2.7
$d = 0.3336$ mm

2.8
$V = 24$ volts

2.9
$C = 12.5114$ nF

2.10
$q = 28.2$ μC

2.11
$k_d = 25$

2.12
$L = 10.9$ cm

2.13
$C = 12$ nF

2.14
$C_0 = 0.4551$ nF

2.15
$r = 8991783.668$ km

2.16
$q = 1801.6444$ pF

2.17
$A = 2.3065$ mm

2.18
$A = 0.11138 \ \text{m}^2$

2.19
$E_c = 3.8016$ J

2.20
$q = 300.3997 \ m\text{C}$

2.21
$N = 6.66666 \times 10^{13}$ electrones

2.22
$C_e = 0.84$ μFd

2.23
$C_e = 190.3797$ μFd

2.24
$C_e = 200$ μFd

2.25
$C_1 = C_2 = 720$ μFd

2.26
$C_e = 30$ μF

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.27
$C_e = 50\ \mu F$

2.28
$C_e = 207.5774\ \mu F$

2.29
$q = 14.1985 \times 10^{-6}\ C$

2.30
$C = 5.5744\ \mu F$

2.31
$V = 312.8455\ V$

2.32
$N_e = 1.3958333 \times 10^{15}$ electrones

2.33
$E_c = 0.0294\ J$

2.34
$E_c = 1.23366\ J$

2.35
$q = 3600\ \mu C$

2.36
$q_{c1} = q_{c2} = 10800\ \mu C$

2.37
$q_T = 25200\ \mu C$

2.38
$V_{C3} = 24\ V$

2.39
$V_{C2} = 36\ V$

2.40
$q_{C1} = 11520\ \mu C$

2.41
a) $V_{c1} = 38.4\ V$

b) $q_{C2} = 7680\ \mu C$

2.42
$C = 1.593\ nF$

2.43
$q = 6.2233 \times 10^{-5}\ C$

$C = 6.1166 \times 10^{-11}\ F$

2.44
$C_0 = 2.224 \times 10^{-9}\ Fd$

$k_d = 7.4373$

2.45
$q = 900\ \mu C$

$C = 4.5 \times 10^{-6}\ Fd$

2.46
$k_d = 74$

2.47
$$\sigma = 34.9264\ \frac{nC}{cm^2}$$

2.48
a) $C_e = 53.212\ \mu Fd$

b) $q_T = 6385.32\ \mu C$

2.49
a) $C_e = 26.6666\ \mu Fd$

b) $E_{Ce} = 191999.5\ \mu J$

2.50
$$E_c = \frac{(CV^2)}{4}$$

2.51
$d = 4.67$ mm

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1

a) $q = 0.999\ I_0\tau$

b) $q = I_0\tau$

3.2

$I = 5.729 \times 10^{-7}$ A

3.3

$v = 1.559 \times 10^{-4}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.4

$v_d = 4.777 \times 10^{-4}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.5

$n = 5.699 \times 10^{24}\ \frac{e}{\text{m}^3}$

3.6

$t = 4.5714$ s

3.7

a) $q = 600$ C

b) $N = 3.744 \times 10^{21} e$

3.8

a) $\Delta q = 10.8874$ C

b) $I = 1.0887$ A

3.9

$J = 5.62 \times 10^{6}\ \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

3.10

a) $I = 126$ A

b) $J = 50.4 \times 10^{5}\ \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

3.11

$J = 1876.26240\ \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

3.12

$R = 0.01069\ \Omega$

3.13

$R = 173.24\ \Omega$

3.14

$r = 2.727 \times 10^{-3}$ m

3.15

a) $\rho = 1.7 \times 10^{-8}\ \Omega\text{m}$

b) Cobre

3.16

a) $L = 9.945$ m

b) $d = 3.788 \times 10^{-4}$ m

3.17

a) $L = 8.107$ m

b) $d = 0.5924$ mm

3.18

$I = 36.9047$ A

3.19

a) $q = 8347.739$ C

b) $N = 5.217 \times 10^{22}$ electrones

3.20

$R = 2.8104\ \Omega$

3.21

$\alpha = 9.8259 \times 10^{-3}\ °\text{C}^{-1}$

3.22

$\Delta T = 13.49\ °\text{C}$

3.23

$T = 908.8\ °\text{C}$

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.24
a) $R = 7.104\ \Omega$
b) $0.833\ \text{A} \geqq I \geqq 0.7038\ \text{A}$

3.25
a) $P = 2970\ \text{W}$
b) $V = 990\ \text{V}$

3.26
a) $I = 0.472\ \text{A}$
b) $R = 268.8\ \Omega$

3.27
a) $I = 7.874\ \text{A}$
b) $R = 16.129\ \Omega$

3.28
a) $I = 0.2047\ \text{A}$
b) $q = 17688.18\ \text{C}$

3.29
$R = 0.4586\ \Omega$

3.30
a) $I = 625\ \text{A}$
b) $d = 50000\ \text{m}$

3.31
a) $I = 621.41\ \text{A}$
b) 10.616 km

3.32
a) $Q = 4269441.17\ \text{cal}$
b) $P = 1185.95\ \text{W} = 1.185\ \text{kW}$
c) \$ = \$0.948

3.33
a) 2.76 MW
b) $V = 526.315\ \text{kV}$

3.34
a) $I_e = 34.81\ \text{A}$
b) $P_e = 4421.05\ \text{W}$
c) $Q = 15849.28\ \text{cal}$

3.35
a) $I = 0.7874\ \text{A}$
b) \$ = \$7.6

3.36
a) $R = 1.9208\ \Omega$
b) $r = 0.578\ \Omega$

3.37
a) $R = 0.27\ \Omega$
b) $V = 9.45\ \text{V}$
c) $P = 110.25\ \text{W}$

3.38
a) Calentador $I = 12.5\ \text{A}$
b) Tostador $I = 6.25\ \text{A}$
c) Parrilla $I = 8.33\ \text{A}$

3.39
a) $R_{eq} = 720\ \Omega$
b) $I = 0.0347\ \text{A}$
c) $V_{R2} = 6.94\ \text{V}$

3.40
a) $R_{eq} = 71.287\ \Omega$
b) $P = 8.767\ \text{W}$
c) $I_{R3} = 0.15625\ \text{A}$

3.41
$R_1 = 200\ \Omega\ ;\ R_2 = 100\ \Omega$

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.42

a) $R_{eq} = 82.3\ \Omega$

b) $I_T = 1.458$ A

c) $V_{R1} = 29.14$ V , $V_{R2} = 46.956$ V , $V_{R3} = 15.65$ V ,
$V_{R4} = 31.3$ V , $V_{R5} = 43.71$ V
$I_{R1} = I_{R5} = 1.457$ A , $I_{R2} = 0.67$ A ,
$I_{R3} = I_{R4} = 0.78$ A

3.43

a) $R_{eq} = 401.57\ \Omega$

b) $I_{R4} = 0.1321$ A

c) $V_{R1} = 53.78$ V

3.44

a) $R_{eq} = 25\ \Omega$

b) $I_{R4} = 0.1875$ A

c) $V_{R1} = 24$ V

3.45

$I_1 = 4.39$ A ; $I_2 = -4.02$ A ; $I_3 = 0.3717$ A

3.46

$I_1 = 0.45$ A ; $I_2 = 1.1318$ A ; $I_3 = 1.1318$ A

3.47

$I_1 = 3$ A ; $I_2 = 2$ A ; $I_3 = -1$ A

3.48

a) $I_{R1} = 0.6945$ A

b) $I_{R2} = 0.1894$ A

c) $I_{R3} = 0.884$ A

3.49

a) $I_{R1} = 1.063$ A

b) $I_{R2} = 0.6736$ A

c) $I_{R3} = 0.3894$ A

3.50

a) $I_1 = 0.2594$ A

b) $I_2 = 0.6698$ A

c) $I_3 = 0.9292$ A

3.51

a) $\tau = 16.38$ s

b) $q = 2.275 \times 10^{-4}$ C

c) $I = 1.0235 \times 10^{-5}$ A

3.52

a) $\tau = 13.16$ s

b) $\tau = 6.11$ s

c) $I_0 = 4.6875 \times 10^{-6}$ A

d) $I(t) = 1.4123 \times 10^{-5}$ A

3.53

a) $C = 1.333 \times 10^{-4}$ F

b) $I = 9.017 \times 10^{-6}$ A

3.54

a) $C = 1.333 \times 10^{-4}$ F

b) $q = 1.259 \times 10^{-3}$ C

3.55

a) $V_c = 7.56$ V

b) $t = 1.795 \times 10^{-4}$ s

3.56

$I = 0.227$ A

3.57

a) $R_{eq} = 12.94\ \Omega$

b) $I = 0.277$ A

3.58

a) $P_{suministrada} = 2121.88$ W

b) $E_{marcha} = 33944.4$ J

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

4.1

$F = 1.925 \times 10^{-12}$ N

4.2

a) $B = 1.33$ T

b) $F = 6.66$ N

c) $\theta = 90°$

4.3

a) $F = 7.609 \times 10^{-13}$ N

b) $r = 2.989 \times 10^{-5}$ m

4.4

a) $a_n = 8.166 \times 109 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

b) $B = 1.325 \times 10^{-6}$ T

4.5

$v = 1.247 \times 10^{8} \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

4.6

a) $r = 0.06535$ m

b) $\omega = 1.346 \times 10^{8} \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

c) $T = 4.66 \times 10^{-8}$ s

4.7

$\beta = 44.64$ mT

4.8

a) $\beta_x = -0.05$ T

b) $\beta_z = -0.075$ T

4.9

$a = 4.3254 \times 10^{-4} \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

4.10

$a_n = 1.7069 \times 10^{5} \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

4.11

a) $B = 0.01032$ T

b) Saliendo de la página

4.12

a) $f = 1.45$ Hz

b) $v = 9.113 \times 10^{7} \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

c) $T = 6.8946 \times 10^{-8}$ s

4.13

a) $\omega = 1.8 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

b) $r = 28888.8$ m

c) $x = 1.977 \times 10^{-4}$ m

4.14

$B = 0.457$ T

4.15

a) $F_{0a} = 0.0813$ N, entrando a la página

b) $F_{ab} = 0.0813$ N, hacia arriba

c) $F_{bc} = 0.0813$ N, saliendo de la página hacia abajo

4.16

$F = 0.05779$ N

4.17

$\theta = 7.48°$

4.18

$\beta = 0.091$ T

4.19

a) $B = 0.05322$ T

b) Perpendicular al conductor hacia arriba (90°)

Recursos Académicos en Línea © Grupo Editorial Patria

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.20

a) $F = 2 \times 10^{-5} \ \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$

b) La fuerza es de atracción

4.21

$F = 7 \times 10^{-4}$ N , hacia el conductor que conduce 30 A

4.22

$F = 1.1 \times 10^{-3} \ \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$, hacia el conductor 1

4.23

a) De izquierda a derecha

b) $\beta = 0.109$ T

4.24

a) $M = 0.0216$ Nm

b) Giro contrario a las manecillas del reloj

4.25

a) $M = 0.0222$ Nm

b) Giro contrario a las manecillas del reloj

4.26

a) $M = 1.95$ Nm

b) Giro contrario a las manecillas del reloj

4.27

a) $I = 6.243$ A

b) $\mu = 0.1103 \ \text{Am}^2$

4.28

a) $M = 0.0237$ Nm

b) Hacia la derecha

4.29

$\beta = 7 \times 10^{-5}$ T , entrando en la página

4.30

$\beta = 1.256 \times 10^{-5}$ T, saliendo de la página

4.31

$\beta = 2 \times 10^{-4}$ T

4.32

$\beta = 2.714 \times 10^{-5}$ T, hacia a la derecha

4.33

a) $\beta = 1.656 \times 10^{-4}$ T

b) Entrando a la página

4.34

$\beta = 6.4147 \times 10^{-5}$ T; $\theta = 171.39°$

4.35

$\beta = 2.459 \times 10^{-4}$ T; $\theta = 31.36°$

4.36

a) $I = 31.645$ A

b) Sentido hacia la izquierda

4.37

$\beta = 1 \times 10^{-4}$ T, con un ángulo de cero grados

4.38

$\phi_B = 8.9619 \times 10^{-3}$ Wb

4.39

$\phi_B = -0.02826$ Wb

4.40

$\phi_B = 0.00255$ Wb

4.41

$\phi_B = 1.6735 \times 10^{-7}$ Wb

4.42

a) $\beta = 0.03204$ T

b) $\phi_B = 9.06 \times 10^{-5}$ Wb

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.43
a) $\beta = 160.22$ T
b) $\phi_B = 0.453$ Wb

4.44
$I = 4 \times 10^{-8}$ A

4.45
a) $\beta = 0.09272$ T
b) $\phi_B = 1.8206 \times 10^{-4}$ Wb

4.46
a) $\beta = 258.46$ T
b) $\phi_B = 0.1826$ Wb

4.47
$\beta = 0.1295$ T

4.48
$\theta = 18.72°$

4.49
$\beta = 1.8728$ T

4.50
a) $m = 2.549 \times 10^{-24}$ kg
b) $\omega = 21991.48 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

4.51
a) $\beta = 0.0125$ T
b) $\phi_\beta = -1.3198 \times 10^{-4}$ Wb

4.52
a) $\phi_B = -1.3125 \times 10^{-5}$ Wb
b) $\phi_B = -1.136 \times 10^{-5}$ Wb

4.53
a) $\beta = 3.82 \times 10^{-6}$ T
b) Entrando a la página.

4.54
$\theta = 60.108°$

4.55
$\beta = 4.6314 \times 10^{-12}$ T

4.56
a) $r = 0.3609$ m
b) $T = 3.2749 \times 10^{-8}$ s

4.57
a) $\beta = 0.054$ T
b) $\phi_B = 0.0152$ Wb

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

5.1
$\varepsilon = 0.95$ mV

5.2
$\Phi_{\beta} = 0.0264$ Wb

5.3
$t = 0.212$ s

5.4
$\varepsilon = 24$ V

5.5
$\Phi_{\beta} = 0.3652$ Wb

5.6
$t = 0.525$ s

5.7
$N = 115.2737$ espiras

5.8
$\beta = 2.07499 \ \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$

5.9
$t = 0.0353$ s

5.10
$\Phi_{fin} = 25°$

5.11
$L = 9.64$ cm

5.12
$\Phi_{fin} = 23.22°$

5.13
$\varepsilon = 55.751$ V

5.14
$L = 11.45$ cm

5.15
$\theta = 73.9°$

5.16
$\beta = 1.5673$ T

5.17
$\beta = 18.2635$ T

5.18
$N = 16.39416$ espiras

5.19
$I = 0.7897$ A

5.20
$\beta = 7.1619 \ \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$

5.21
$N = 92.809$ espiras

5.22
$I = 0.0821$ A

5.23
$v = 1.7433 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

5.24
$F = 0.4666$ N

5.25
$\varepsilon = 19.0$ V

5.26
$\beta = 3.353377$ T

5.27
$\Phi_{\beta} = 0.218332$ Wb

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.28
$L = 9.3456$ cm

5.29
$\varepsilon = 2.6784 \times 10^{-8}$ V

5.30
$\varepsilon = 15.1104 \times 10^{-6}$ V

5.31
$L = 14.2122 \times 10^{-5}$ Hy

5.32
$L = 0.29994$ Hy

5.33
$l = 3.23$ cm

5.34
$N = 98.117$ espiras

5.35
$d = 33.59$ cm

5.36
$\varepsilon = -76\ \mu$Hy

5.37
a) $L_0 = 15.99$ mHy
b) $k_\beta = 308.9113$
c) $L = k_n L_0 = 308.913(15.99 \times 10^3 \text{ Hy}) = 4.9395$ Hy

5.38
a) $N_s = 1140$ espiras
b) $I_s = 0.1894$ A

5.39
a) $\frac{Ne}{Ns} = 10$
b) $I_e = 0.2$ A

5.40
a) $I_e = 2$ a
b) $V_s = 28.2352$ V

5.41
$P_e = 105.8823$ W

5.42
$I_e = 1.5822$ A

5.43
$V_e = 60.1$ V

5.44
$P_p = 25.3846$ W

5.45
$Q = 6552.8064$ cal

5.46
a) $P = 63.1578$ W
b) $I_e = 0.5263$ A

5.47
a) $I_e = 0.386363$ A
b) $N_s = 442$ espiras

5.48
$\varepsilon = 9.2257$ V

5.49
$\varepsilon_{ins} = 3.4544$ V

5.50
$N = 418.2$ espiras

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Respuestas

En seguida aparecen las operaciones y las soluciones de los problemas enunciados al principio de la unidad.

Problemas a resolver
Exponentes, logaritmos y porcentajes

1.1
a) 64
b) 28561
c) $(x + 4)\,(x + 4)\,(x + 4)$
d) $(3x + a)\,(3x + a) \cdots, n = 1, 2, 3, \cdots$

1.2 Realizar la operación con calculadora y con la hoja de cálculo
a) 125
b) 38,416
c) 729
d) 177,987.51

1.3 Realizar la operación con calculadora y con la hoja de cálculo
a) 4,096
b) 531,441
c) xa^5
d) $(2x + a)^9$

1.4
a) 144
b) 10, 240,000
c) $[\,(3x + n)^4\,(x + m)^4\,]$

1.5
a) $\dfrac{81}{625}$
b) $\dfrac{30.25}{40.32}$

1.6
a) $\sqrt[6]{z^7}$
b) $2ab^4\ \sqrt[3]{x^2}$
c) $\sqrt[7]{(3x+4ab)^2}$
d) $8\sqrt[3]{z}$

1.7
a) 25.398
b) 3.6228
c) 8.712
d) –2.1544

1.8 Realizar la operación con calculadora y con la hoja de cálculo
a) 2.5198
b) 1.5874
c) 2.43155
d) 2.4494

1.9
a) 3.79792
b) 26.77
c) 6.1589
d) 26.8377

1.10
a) 6.48
b) 18.97
c) 15
d) 43.282

1.11
a) 1.9437
b) 0.784
c) 1.323
d) 1.5587

Potencia de un monomio

1.12
a) $25x^8a^6b^2$
b) $\dfrac{-27y^3a^6b^3}{8x^9}$
c) $36a^8x^6$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Realiza producto de potencia de igual base:

1.13

a) 81
b) 128
c) -3125

Eleva la potencia a otra potencia

1.14

a) x^8
b) 1
c) x^8a^8

Realiza el producto elevándolo a una potencia:

1.15

a) $81x^4y^4$
b) $-162a^4x^4$
c) $x^4a^4b^4$

1.16

a) $-x^3a^3b^3$

b) $\frac{1}{8}x^3y^3$

c) $\frac{16x^2a^2b^2}{25}$

Eleva el cociente a una potencia n:

1.17

a) $\frac{x^4}{a^4y^4}$

b) $-\frac{a^5}{x^5}$

1.18

a) $\frac{64x^3b^3}{y^3}$

b) $\frac{9x^2}{a^2b^2}$

Realiza el cociente de dos potencias de igual base con exponente diferente

1.19

a) $\frac{ab}{16x^3}$

b) $9ax^2$

c) $\frac{a}{5x^2}$

1.20

a) $16a^4b^2x^4$

b) $8a^2b^6x^2$

Exponente cero y negativo

1.21

a) 1
b) a^2

1.22

a) 1
b) $2c$
c) $4ab$

Exponente fraccionario

1.23

a) $4\sqrt[3]{4} = 6.3496$

b) 3

c) $2b^2x\left(\sqrt[7]{a^3}\right)\left(\sqrt[3]{b}\right)$

1.24

a) $3abmn\sqrt[4]{mn}$

b) $7a^3y\left(\sqrt[4]{x^3}\right)\left(\sqrt[3]{y}\right)$

c) $\frac{5}{7}m^2n^3x\left(\sqrt[5]{x}\right)$

Simplificar los siguientes radicales

1.25

a) $3a^2x\left(\sqrt[3]{bx}\right)$

b) $9\left(\sqrt[3]{3}\right)$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.26

a) $2x^2\left(\sqrt{3}\right)$

b) $4ax\left(\sqrt[3]{4}\right)$

c) $\dfrac{6a^3bx\left(\sqrt{3x}\right)}{5}$

Introduce el coeficiente dentro del radical

1.27

a) $\sqrt{x^4a^4}$

b) $\sqrt{9a^3x}$

c) $=\sqrt[3]{64am^4x^3}$

1.28

a) $\sqrt[3]{x^7y^2}$

b) $\sqrt[4]{512a^4bx^4}$

Realiza la suma de radicales semejantes

1.29

a) $5x\sqrt{a}$

b) $x^3\sqrt{a}$

1.30

a) $\dfrac{3x}{5}\left(\sqrt[5]{(mn)^3}\right)$

b) $11mn\sqrt[4]{33x}-8mn\sqrt{33x}$

Realiza la multiplicación de radicales semejantes con el mismo índice

1.31

a) $-36ax\left(\sqrt[4]{a^3x^3}\right)$

b) $-16m^4x\left(\sqrt[3]{abm^2n}\right)$

1.32

a) $(2abx^5)\left(\sqrt[3]{3mx^2y^2}\right)$

b) $\left(-18a^2x^3\right)\left(\sqrt[4]{18a^3x^2y}\right)$

Realiza la división de radicales del mismo índice

1.33

a) $\dfrac{2}{y}\sqrt[3]{2x}$

b) $2x\left(\sqrt{a-1}\right)$

Potenciación de radicales

1.34

a) $ax\sqrt{7x}$

b) $49a\left(\sqrt[3]{9ax^2}\right)$

1.35

a) $\left(25ax^4y^2\right)\sqrt[3]{4a}$

b) a^2y^3

Realiza la radicación de radicales

1.36

a) $\sqrt[6]{a}$

b) 5

c) 3

Resuelve las ecuaciones exponenciales

1.37

a) $x=0.0129$

b) $x=0.059$

c) $x=-0.051$

d) $x=0.2599$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Completa los cuadros de acuerdo con lo solicitado en el encabezado del cuadro

1.38

	Logaritmo	Cifra	Operación	Característica	Mantisa
a)	log 9 =	1	1 – 1 =0	0	0.95424
b)	log 10 =	2	2 – 1 = 1	1	1.0000
c)	log 12 =	2	2 – 1 = 1	1	1.07918

Operaciones con logaritmo base 10
Realiza el producto

1.39

a) 0.92216
b) 0.8310
c) 1.0145

Encuentra el cociente

1.40

a) 0.92216
b) 0.83104
c) 1.0145

Encuentra el logaritmo de un número elevado a una potencia

1.41

a) 6.80863
b) 4.51544
c) 6.23754

Obtén el logaritmo del radical

1.42

a) 0.95424
b) 0.64314

Realiza las siguientes operaciones con logaritmo de base (las respuestas tienen: de base 10)
Encuentra el producto

1.43

a) 3.00167293
b) 4.2393495

Obtén el cociente

1.44

a) 6.20508
b) 16.11136

Encuentra el logaritmo de un número elevado a una potencia

1.45

a) 11.8574912
b) 5.31960343

Obtén el logaritmo del radical

1.46

a) 0.95549886
b) 0.79087863
c) 0.91409188

Encuentra el antilogaritmo

1.47

Antilogaritmo

a) 9
b) 10
c) 12

1.48

Antilogaritmo

a) 42
b) 150
c) 28

Logaritmos naturales
Encuentra el logaritmo

1.49

a) 3.33220451
b) 3.73766962

1.50

a) 5.52146092
b) 6.04025471

Operaciones con logaritmos naturales
Realiza las siguientes operaciones

1.51

a) 3.55535
b) 5.78074

1.52

a) 0.82668
b) 0.35364

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1.53
a) 24.0609
b) 10.39721
c) 14.36248

1.54
Redonda a cuatro cifras significativas
a) 0.4118
b) 4.879
c) 2.482

1.55
Redondea a cuatro cifras significativas
a) 0.4149
b) 8.368
c) 0.3458

1.56
Expresa las siguientes cantidades en notación científica

	Número	Notación científica	Con calculadora
a)	1,033,756	103.3756×10^{4}	103.3756E+4 = 1,033,756
b)	0.0133756	0.133756×10^{-1}	0.133756E−1 = 0.0133756
c)	0.000018739	1.8739×10^{-5}	0.18739E−5 = 0.000018739
d)	0.00035	3.5×10^{-4}	0.00035E−4 = 3.5

1.57
Resuelve los siguientes problemas de porcentaje
a) 435.5
b) 1080

1.58
¿Qué porcentaje de
a) 27.78 %
b) 17.56 %

1.59
a) 3,200
b) 27,671.87
c) 76,944.44

Problemas reto
Respuestas

1.
a) $x = 11.58\ \%$
b) $x = 17.04\ \%$

2.
a)

Unidad = 1

1	2	3	4	5	6	7
						100

b)

Unidad = 80

1	2	3	4			
						80

El 4% de 80 es 3.2

3.
a) 0.0575

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.

a)

Teclas en la Calculadora	Resultado en pantalla
1500 × 12 *SHIFT* %	**180.00**
1500 × 12 *2da.* = =	**180.00**
1500 × 12 %	**180.00**

b)

Teclas en la Calculadora	Resultado en pantalla
660 × 880 *SHIFT* %	**75**
660 × 880 *2da.* = =	**75**
660 × 880 %	**75**

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

Series y sucesiones

2.1

a) $5,\ 7,\ 9,\cdots$

b) $-1,\ 0,\ 1/3,\ 19/21,\cdots$

2.2

a) $0,\ 2/3,\ 1,\ 6/5,\ 4/3,\ \cdots$

b) $7,\ 34,\ 81,\ 148,\ 235,\ \cdots$

2.3

a) $a_{100} = 25$

b)

$Si: x = 1 \therefore y = 7$

$Si: x = 2 \therefore y = 11$

$Si: x = 3 \therefore y = 15$

c)

$Si: x = 1 \therefore m = 0$

$Si: x = 2 \therefore m = 1/2$

$Si: x = 3 \therefore m = 3/4$

Progresiones aritméticas

2.4

a) $2,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\cdots$

b) $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192,\ \cdots$

c) $15,\ 21,\ 27,\ 33,\ 39,\ 45,\ 51,\ 57,\ 63,\ \cdots$

2.5

a) $d = 2$

b) $d = -4$

c) $d = 15$

2.6

a) $d = 6$

b) $d = -5$

c) $d = 8$

2.7

a) $a_{14} = 231$

b) $a_2 = 6$

c) $a_{20} = 376$

d) $a_1 = -32\ ,\ a_2 = -22\ ,\ a_3 = -12$

2.8

a) $a_8 = 32$

b) $a_{18} = 58$

2.9

a) $n = 17$

b) $n = 30$

2.10

$a_3 = 27\ ,\ a_2 = 33\ ,\ a_9 = -9$

2.11

$S_{20} = 1\,710$

2.12

$a_1 = 32$

Progresiones geométricas

2.13

a) $a_9 = 786\,432$

b) $a_{12} = 14\,336$

c) $a_5 = 0.035714285$ y $a_{10} = -0.0001540471$

2.14

a) $a_6 = 28125$

b) $a_6 = 6\,568.41$

c) $a_6 = 137\,781$

2.15

a) $n = 13$

b) $n = 12$

c) $n = 8$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2.16

$a_1 = \frac{1}{2^{16}}$

2.17

a) $a_{10} = 137\,781$

b) $S_{15} = 98\ 301$

c) $S_{16} = 1\,866\,640$

Aplicaciones

2.18

$S_{25} = 312.62 \ \ pesos$

2.19

$a_5 = \$1\,250$

2.20

$a_5 = \$638.22$

2.21

$a_3 = 27$

$a_2 = 33$

$a_1 = 39$

$\vdots$

$a_9 = -3$

Respuestas a problemas reto

Reto 1

a) 8,17

b) 6, 48

Reto 2

a) 7, 11, 15

b) 0, 1/3, 2/4, 3/5

Reto 3

a) 250

b) 40

Reto 4

a) F

b) F

c) F

Reto 5

a) NO

b) NO

Reto 6

–1, 0, 1/3, 1/2

Reto 7

–3, –4, –3

Reto 8

10

Reto 9

19

Reto 10

124

Reto 11

15

Reto 12

20 días

Reto 13

$r = 2, \ \ a_9 = 8704$

Reto 14

9

Reto 15

2

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

SERIES Y SUCESIONES

Objetivos

- Identificar las progresiones; aprender a encontrar los elementos de la progresión utilizando fórmula y la suma de los elementos que la forman.
- Aprender a encontrar los elementos de la serie aritmética utilizando fórmula, la suma de los elementos que la forman y calcular el número de elementos de las progresiones aritméticas.
- Identificar las progresiones geométricas; aprender a encontrar los elementos de la progresión utilizando fórmula y la suma de los elementos que la forman.

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Formulario

Sucesión o progresión

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$

Serie

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

Progresión aritmética

$a_n = a_{n-1} + d$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Diferencia común

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

Número de términos en progresión aritmética

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

Serie aritmética

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Progresión geométrica

$a_n = a_{n-1}\,(r)$

$a_n = a_1\, r^{n-1}$

Razón común

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Número de términos progresión geométrica

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

Serie geométrica

$$S_n = \frac{a_1\left(1 - r^n\right)}{1 - r} \quad ; \text{ Si } \quad r \neq 1$$

Terminología

d	Diferencia común
n	Número de términos
r	Razón común
S_n	Serie aritmética y geométrica
a_n	Término de la sucesión.
n	La posición del término

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

¿Qué sabes?

Aplica tus conocimientos y encuentra los resultados de cada problema

2.1

Encontrar los tres primeros términos y el décimo de $a_n = \frac{n^2}{5^n}$.

2.2

Obtener la suma de los tres primeros términos de la progresión $a_n = 5n - 6$

2.3

Determinar los tres primeros términos de la sucesión aritmética $a_n = 5n + 6$.

2.4

Encontrar el último término de la sucesión aritmética si $a_1 = 6$, $n = 9$ y $d = 3$.

2.5

Determinar la suma de los primeros 14 términos de la sucesión aritmética 25, 31, 37, …

2.6

Encontrar el noveno término de la sucesión geométrica 9, 45, 225,….

2.7

Determinar el valor del sexto término de la progresión geométrica 2.5, $(2.5)^4$, …

2.8

Calcular la suma de los 10 primeros términos de la sucesión geométrica 9, 45, 225, ...

2.9

Hallar el decimosexto término y la suma de los 17 primeros términos, si la razón es 2 y el primer término es 18.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas a resolver

CD2.1

a) Encontrar los primeros tres términos de la siguiente progresión: $a_n = 2n + 3$

b) Escribir los primeros tres términos y el vigesimoprimero de la progresión definida por: $a_n = \dfrac{n-2}{n}$

c) Hallar los primeros tres términos de la progresión dada por: $a_n = n^2 + 2n$

d) Encontrar los primeros cinco términos de la siguiente progresión: $a_n = 2n + n^3$

CD2.2

a) Escribir los primeros tres términos y el vigesimoprimero de la progresión definida por: $a_n = \dfrac{2n-2}{n+1}$

b) Hallar los primeros tres términos de la progresión dada por: $a_n = 10n^2 - 3n$

c) Escribir el número cien de la progresión: $a_n = \dfrac{2n}{n-20}$

CD2.3

a) Encontrar los primeros dos términos de la progresión dada por: $a_n = 2\log n^2$

b) Sustituir cada uno de los valores de *x* en las expresiones y encontrar sus resultados.
c) Sustituir cada uno de los valores de *x* en las expresiones y encontrar sus resultados.

CD2.4

a) Encontrar los cuatro primeros términos de la sucesión aritmética: $a_n = 4n + 3$

b) Hallar los cinco primeros términos de la sucesión aritmética: $a_n = 4n^2 + 3n$

CD2.5

a) Calcular la suma de cuatro primeros términos de la sucesión: $a_n = 3 \times (-1)^{n+1}$

b) Hallar la suma de los dos primeros términos de la sucesión: $a_n = \dfrac{25}{30 - n^2}$

c) Calcular la suma de los tres primeros términos de la sucesión: $a_n = 5 - n^2 + 3n$

CD2.6

Encontrar la suma de los tres primeros términos de las siguientes progresiones:

a) $a_n = 2.5 \times (2)^{n+1}$

b) $a_n = (-5)^{n-1}$

c) $a_n = \dfrac{1}{n}$

d) $a_1 = 8$, $a_n = 4a_{n-1} - 10$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Progresiones aritméticas

CD2.7
Encontrar los valores que faltan en las sucesiones:

a) 5, __, 11, 14, __, 20, 23,…
b) 3, __, 12, 24, __, 96, 192,…
c) 15,21, __, 33, 39, 45, __, 57, 63,…
d) 33, 42, 51, __, 69, __, 87, 96, 105,…

CD2.8
Hallar la diferencia común de las siguientes series aritméticas:
a) 7, 9, 11, …
b) 28, 24, 20, 16, 12, …
c) 155, 170, 185, …
d) 8, 11, 14, 17, …

CD2.9
Encontrar la diferencia común de las siguientes series aritméticas
a) 10, 16, 22, 28, 34,…
b) 50, 45, 40, 35, 30, …
c) 42, 50, 58, 66, 74,…
d) 45, 38, 31, 24, 17, …

CD2.10
a) Encontrar la diferencia común en una serie, si el primer término es 9 y el decimosegundo es 42.
b) Hallar el trigesimoquinto término de la serie aritmética 18, 23, 28, 33, 38, 43,….
c) Encontrar el primer término de una progresión aritmética en la que el decimosegundo término es 81 y su diferencia común es 5.
d) Hallar la diferencia común de una progresión aritmética si el primer término es 0 y el vigesimoprimero es 200.

CD2.11
a) Encontrar el decimocuarto término de una progresión aritmética si el primer término es –3 y la diferencia común es de 18.
b) Obtener el valor de x en la progresión aritmética $-3, x, 5$.
c) Encontrar el vigésimo término de la serie aritmética –4, 16,….
d) La diferencia entre los términos décimo y vigesimosegundo en la progresión aritmética es de 120, el cuarto término es –2. Encontrar los cuatro primeros términos.

CD2.12
a) Encontrar el último término de una sucesión aritmética si $a_1 = 4$, $n = 8$ y $d = 4$.
b) Hallar el último término de una sucesión aritmética si $a_1 = 7$, $n = 18$ y $d = 3$.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD2.13
a) ¿De cuántos términos estará formada la sucesión 3, 6, 9, … , 51 ?
b) Se desea conocer el número de términos de la sucesión aritmética 19, 30, 41, …, 388, cuya diferencia común es 11.

CD2.14
¿Cuáles son los tres primeros términos y el noveno de una progresión aritmética si el cuarto término es 21y el octavo es –3?

CD2.15
Encontrar la suma de los primeros 20 términos de la sucesión aritmética 19, 26, 33, …

CD2.16
Encontrar la suma de $10 + 15 + 20 + \cdots + 140$.

CD2.17
Encontrar la suma de los términos desde el decimoquinto al vigesimoctavo de la progresión aritmética 8, 12, …

CD2.18
Determinar el decimosexto y la suma de los primeros dieciséis términos de la progresión aritmética 5, 12, 19, 26, …

CD2.19
Encontrar el primer término de una sucesión aritmética cuya suma de 25 términos es 3200, si el último término es 224.

CD2.20
Encontrar el número de términos de una progresión aritmética y la diferencia común, si el primer término es 6, el último 106 y su suma es 616.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Progresiones geométricas

CD2.21
a) Encontrar el noveno término de la sucesión geométrica: 12, 48, 192,.…
b) Encontrar el decimosegundo término de la sucesión geométrica: 7, 14,.…
c) Encontrar el quinto y el décimo término de la progresión geométrica 3, –1,.…
d) Encontrar el noveno término de la progresión geométrica: $(4.5)^{-1}$, $(4.5)^{-2}$, $(4.5)^{-3}$, …

CD2.22
a) Encontrar el valor del sexto término de la progresión geométrica: 9, 45, 225, ….
b) Encontrar el valor del sexto término de la progresión geométrica 1.5, $(1.5)^4$, …
c) Encontrar el valor del sexto término de la progresión geométrica 7, 21, 63, …
d) Determinar los tres primeros términos, si $a_1 = 7$ y $r = 3$

CD2.23
a) Encontrar el número de términos de la progresión geométrica, si se sabe que $a_1 = 12, r = 3/4, a_n = 3/8$
b) Hallar el número de términos de la progresión geométrica: 17, 34, 68, …, 34816.
c) Determinar el número de términos de la progresión geométrica, si se sabe que $a_1 = 8$, $a_n = 17496$ y $r = 3$.
d) Encontrar el número de términos de la progresión geométrica, si se sabe que 5, 5/2, 5/4, … , 5/64

CD2.24
El décimo y vigésimo término de una progresión geométrica son: $a_{10} = 1/128$ y $a_{26} = 512$. Encontrar los primeros cuatro términos.

CD2.25
a) Encontrar el décimo término y la suma de los 12 primeros términos. La razón es 3 y el primer término es 7.
b) Determinar la suma de los 15 primeros términos de la progresión geométrica, si el tercero y el quinto son 12 y 48.
c) Encontrar el décimo término y la suma de los 16 primeros términos. La razón es 3 y el primer término es 7.

Aplicaciones
CD2.26
La señora Josefina pide prestados 2 500 pesos y acepta pagar 100 pesos al final de cada mes y el 12% anual de interés sobre el saldo. Calcular la suma de todo el interés pagado.

CD2.27
Un activo cuesta 20 000 pesos y la depreciación por año se estima en 50%. ¿Cuál es el valor del activo después de cinco años?

CD2.28
El bufete de abogados AK compró una aspiradora industrial que les costó 8 500 pesos. La Secretaría de Hacienda solo les reconoce una depreciación por año del 75% de valor al principio de cada año. Calcular el valor de la aspiradora después de 10 años.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas complementarios

Parte I

CD-I-2.1
Encontrar la diferencia común de las siguientes sucesiones:
a) 4 430, 4 680, 4 930
b) 70, 110, 150

CD-I-2.2
Despejar d de la siguiente expresión: $y = a + (b - 1)d$

CD-I-2.3
Encontrar la suma de los primeros tres números de las siguientes series:
a) 19, 30, 41, 42, 53
b) 2, 6, 18, 54, …

CD-I-2.4
Encontrar la razón común de las siguientes sucesiones:
a) 12, 48, 192
b) 7, 28, 112

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte II

CD-II-2.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) a_3 representa el decimotercer término de una sucesión _____

b) El subíndice n indica el término de una sucesión. _____

c) El sexto término de la sucesión aritmética 3, 7, 11,…. es 25 _____

d) Los términos de una sucesión se denotan con a_n _____

e) La expresión $a_n = a_1 + (n-1)d$ es una sucesión aritmética. _____

f) La razón común de una sucesión geométrica se denota con d. _____

g) La expresión $a_n = a_1(1 + r^{n-1})$ es una sucesión aritmética. _____

CD-II-2.2
Explicar el concepto de sucesión.

CD-II-2.3
¿Qué se entiende por sucesión aritmética?

CD-II-2.4
¿Qué es una sucesión geométrica?

CD-II-2.5
Explicar el concepto de serie.

CD-II-2.6
¿Las siguientes sucesiones son geométricas?
a) 3, 6, 12, 36, 108
b) 18, 21, 25, 30

CD-II-2.7
¿Las siguientes sucesiones son geométricas?
a) 9, 13, 17, 21, 25
b) 1, 5, 25, 125

CD-II-2.8
Encontrar la suma de 10 + 15 + 20 + … + 130.

CD-II-2.9
El primer término de una sucesión aritmética es 20 y el último término es 74; la suma de términos es 470. Encontrar la diferencia común.

CD-II-2.10
Encontrar el tercer término de la sucesión $a_n = 4n + n^2$

CD-II-2.11
Hallar el octavo término y calcular la suma de los ocho primeros términos de la sucesión 6, 24, 96, …

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte III

CD-III-2.1

Escribir los cuatro primeros términos de la sucesión $a_n = \frac{n-2}{n}$.

CD-III-2.2

Encontrar los tres primeros términos de la sucesión $a_n = n(n-4)$.

CD-III-2.3

Determinar los cinco primeros términos de la sucesión $a_n = \frac{1}{n} + 3$.

CD-III-2.4

Escribir los tres primeros términos y el octavo de la sucesión $a_n = 4n - 10$.

CD-III-2.5

Determinar los cuatro primeros términos y noveno de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 6 - n$

b) $a_n = 3n - 2$

c) $a_n = \frac{n}{n+3}$

d) $a_n = n^2 - n + 1$

e) e) $a_n = 6 + (-1)^{n+2}$

f) $a_n = \frac{3n}{n-15}$

CD-III-2.6

El primer término es 10 y el vigesimoprimero es 210. Encontrar la diferencia común.

CD-III-2.7

Hallar la diferencia común si el primer término es 1 y el décimo es 46.

CD-III-2.8

El primer término es 16 y el decimosegundo es 181. Encontrar la diferencia común.

CD-III-2.9

¿De cuántos términos está formada la sucesión 31, 46, 61, …, 211?

CD-III-2.10

¿De cuántos términos está formada la sucesión 13, 17, …, 53?

CD-III-2.11

¿De cuántos términos está formada la sucesión 3, 14, 25, …, 201?

CD-III-2.12

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Encontrar el último término de una sucesión aritmética si $a_1 = 4$, $n = 13$ y $d = 6$.

CD-III-2.13
Determinar el último término de una sucesión aritmética si $a_1 = 12$, $n = 25$ y $d = 7$.

CD-III-2.14
Encontrar el último término de una sucesión aritmética si $a_1 = 1$, $n = 33$ y $d = 8$.

CD-III-2.15
Hallar el último término de la sucesión aritmética 10, 16, 22, … La sucesión está formada por 20 términos.

CD-III-2.16
Encontrar el último término de la sucesión aritmética 55, 51, 47, …. La sucesión está formada por 15 términos.

CD-III-2.17
Determinar el último término de la sucesión aritmética 29, 33, 37, …. La sucesión está formada por 13 términos.

CD-III-2.18
Hallar el primer término de una sucesión aritmética cuya suma de 15 términos es 690 y el último término es 74.

CD-III-2.19
Encontrar el primer término de una sucesión aritmética cuya suma de 12 términos es 768 y el último término es 103.

CD-III-2.20
Determinar el primer término de una sucesión aritmética cuya suma de 21 términos es 2 835 y el último término es 225.

CD-III-2.21
Hallar la suma de los primeros 25 términos de la sucesión aritmética 32, 37, 42, ….

CD-III-2.22
Calcular la suma de los primeros 20 términos de la sucesión aritmética 42, 51, 60, ….

CD-III-2.23
Encontrar la suma de los primeros 20 términos de la sucesión aritmética 19, 30, 41, ….

CD-III-2.24
Se desea conocer el número de términos de la sucesión aritmética 100, 102, 104, …, cuya diferencia común es 2.

CD-III-2.25
Determinar el número de términos de la sucesión aritmética 42, 51, 60, …, 168, cuya diferencia común es 9.

CD-III-2.26
Se desea encontrar el número de términos de la sucesión aritmética 33, 37, 42, …, 102,, cuya diferencia común es 5.

CD-III-2.27

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Si el dólar aumenta de precio en $0.10 por día y el día de hoy se cotiza en $11.10 pesos a la venta, ¿en cuántos días alcanzará la cotización de 12.00 pesos?

CD-III-2.28
Si el euro aumenta de precio en $0.0354 por día y el día de hoy se cotiza en $14.4747 pesos a la venta, ¿en cuántos días alcanzará la cotización de 15.0057 pesos?

CD-III-2.29
Si la UDI aumenta de precio en $0.000132 por día y el día de hoy se cotiza en $3.690061, ¿en cuántos días alcanzará la cotización de $3.692569?

CD-III-2.30
Encontrar el quinto término de la sucesión geométrica 47, 141, 423, …

CD-III-2.31
Determinar el décimo término de la sucesión geométrica 17, 34, 68, …

CD-III-2.32
Hallar el sexto término de la sucesión geométrica 7, 28, 112, …

CD-III-2.33
Encontrar el número de términos de la sucesión 7, 28, 112, …, 7 168.

CD-III-2.34
Determinar el número de términos de la sucesión 17, 34, 68, …, 1 088.

CD-III-2.35
Hallar el número de términos de la sucesión 9, 45, 225, …, 3 515 625.

CD-III-2.36
Calcular la suma de los diez primeros términos de la sucesión geométrica 3, 9, 27, 81, 243, …

CD-III-2.37
Determinar la suma de los siete primeros términos de la sucesión geométrica 3, 12, 48, 192, …

CD-III-2.38
Calcular la suma de los doce primeros términos de la sucesión geométrica 2, 6, 18, 54, …

CD-III-2.39
La suma de los diez primeros términos de una sucesión geométrica es 797 148 y la razón es 3. Encontrar el primer término.

CD-III-2.40
La suma de los doce primeros términos de una sucesión geométrica es 531 440 y la razón es 3. Hallar el primer término.

CD-III-2.41
La suma de los ocho primeros términos de una sucesión geométrica es 65 535 y la razón es 4. Determinar el primer término.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Respuestas

En seguida aparecen las operaciones y las soluciones de los problemas enunciados al principio de la unidad.

¿Qué sabes?

2.1
Encontrar los tres primeros términos y el décimo de $a_n = \frac{n^2}{5^n}$.

$$a_1 = \frac{1^2}{5^1} = \frac{1}{5},\ a_2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25},\ a_3 = \frac{3^2}{5^3} = \frac{9}{125},\ \ldots$$

$$a_{10} = \frac{10^2}{5^{10}} = \frac{100}{9\ 765\ 625}$$

R. $a_1 = \frac{1}{5},\ a_2 = \frac{4}{25},\ a_3 = \frac{9}{125},\ \ldots$

$$a_{10} = \frac{100}{9\ 765\ 625}$$

2.2
Obtener la suma de los tres primeros términos de la progresión $a_n = 5n - 6$

$$a_1 = 5(1) - 6 = 5 - 6 = -1$$
$$a_2 = 5(2) - 6 = 10 - 6 = 4$$
$$a_3 = 5(3) - 6 = 15 - 6 = 9$$
$$S_3 = -1 + 4 + 9 = 12$$

R. $S_3 = 12$

2.3
Determinar los tres primeros términos de la sucesión aritmética $a_n = 5n + 6$.

$$a_1 = 5(1) + 6 = 5 + 6 = 11$$
$$a_2 = 5(2) + 6 = 10 + 6 = 16$$
$$a_3 = 5(3) + 6 = 15 + 6 = 21$$

R. $a_1 = 11,\ a_2 = 16,\ a_3 = 21$

2.4
Encontrar el último término de la sucesión aritmética si $a_1 = 6,\ n = 9$ y $d = 3$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n = 6 + (9-1)(3)$$
$$a_n = 6 + (8 \times 3)$$
$$a_n = 6 + 24$$
$$a_n = 30$$

R. $a_n = 30$

2.5
Determinar la suma de los primeros 14 términos de la sucesión aritmética 25, 31, 37, …

Primer paso:
$$d = a_1 - a_{n-1}$$
$$d = 31 - 25$$
$$d = 6$$

Segundo paso:
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{14} = 25 + (14-1)(6)$$
$$a_{14} = 25 + (13 \times 6)$$
$$a_{14} = 25 + 78$$
$$a_{14} = 103$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tercer paso:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{14}{2}(25 + 103)$$

$$S_n = \frac{14}{2}(128)$$

$$S_n = \frac{1792}{2}$$

$$S_n = 896$$

R. $S_n = 896$

2.6

Encontrar el noveno término de la sucesión geométrica 9, 45, 225,….

Primero se calcula la razón:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{45}{9} = 5$$

Segundo paso:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_9 = 9\left(5^{9-1}\right)$$

$$a_9 = 9\left(5^8\right)$$

$$a_9 = 9(390\ 625)$$

$$a_9 = 3\ 515\ 625$$

R. $a_9 = 3\ 515\ 625$

2.7

Determinar el valor del sexto término de la progresión geométrica 2.5, $(2.5)^4$, …

Primer paso:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{(2.5)^4}{2.5} = (2.5)^3$$

Segundo paso:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_6 = 2.5\left[\left(2.5^3\right)\right]^{6-1}$$

$$a_6 = 2.5\left[\left(2.5^3\right)\right]^5$$

$$a_6 = 2.5(2.5)^{15}$$

$$a_6 = 2\ 328\ 306.44$$

R. $a_6 = 2\ 328\ 306.44$

2.8

Calcular la suma de los 10 primeros términos de la sucesión geométrica 9, 45, 225, ...

Primer paso:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{45}{9} = 5$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Segundo paso:

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

$$S_{10} = \frac{9\left(1-5^{10}\right)}{1-5}$$

$$S_{10} = \frac{9\left(1-9\ 765\ 625\right)}{-4}$$

$$S_{10} = \frac{9\left(1-9\ 765\ 624\right)}{-4}$$

$$S_{10} = \frac{-87\ 890\ 616}{-4}$$

$$S_{10} = 21\ 972\ 654$$

R. $S_{10} = 21\ 972\ 654$

2.9

Hallar el decimosexto término y la suma de los 17 primeros términos, si la razón es 2 y el primer término es 18.

Primer paso:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_{16} = 18\left[(2)\right]^{16-1}$$

$$a_{16} = 18(2)^{15}$$

$$a_{16} = 18(32\ 768)$$

$$a_{16} = 589\ 824$$

Segundo paso:

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

$$S_{17} = \frac{18\left(1-2^{17}\right)}{1-2}$$

$$S_{17} = \frac{18\left(1-131\,072\right)}{-4}$$

$$S_{17} = \frac{18\left(131\,071\right)}{-4}$$

$$S_{17} = 2\ 359\ 278$$

R. $S_{17} = 2\ 359\ 278$

Problemas a resolver

CD2.1

a) Encontrar los primeros tres términos de la siguiente progresión: $a_n = 2n + 3$

$$a_1 = 2(1) + 3 = 5$$

$$a_2 = 2(2) + 3 = 7$$

$$a_3 = 2(3) + 3 = 9$$

R. $5, 7, 9, \ldots$

b) Escribir los primeros tres términos y el vigesimoprimero de la progresión definida por:

$$a_n = \frac{n-2}{n}$$

$$a_1 = \frac{1-2}{1} = -1$$

$$a_2 = \frac{2-2}{2} = 0$$

$$a_3 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$a_{21} = \frac{21-2}{21} = \frac{19}{21}$$

R. $-1,\ 0,\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{19}{21}$

c) Hallar los primeros tres términos de la progresión dada por: $a_n = n^2 + 2n$

$$a_1 = 1 + 2(1) = 3$$

$$a_2 = 4 + 2(2) = 8$$

$$a_3 = 9 + 2(3) = 15$$

R. $3, 8, 15, \ldots$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

d) Encontrar los primeros cinco términos de la siguiente progresión: $a_n = 2n + n^3$

$a_1 = 2(1) + 1^3 = 3$
$a_2 = 2(2) + 2^3 = 12$
$a_3 = 2(3) + 3^3 = 33$
$a_4 = 2(4) + 4^3 = 72$
$a_5 = 2(5) + 5^3 = 135$

R. $3, 12, 33, 72, 135, \ldots$

CD2.2

a) Escribir los primeros tres términos y el vigesimoprimero de la progresión definida por:

$$a_n = \frac{2n-2}{n+1}$$

$$a_1 = \frac{2(1)-2}{1+1} = 0$$
$$a_2 = \frac{2(2)-2}{2+1} = \frac{2}{3}$$
$$a_3 = \frac{2(3)-2}{3+1} = \frac{4}{4} = 1$$
$$a_4 = \frac{2(4)-2}{4+1} = \frac{6}{5}$$
$$a_5 = \frac{2(5)-2}{5+1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

R. $0, \frac{2}{3}, 1, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, \ldots$

b) Hallar los primeros tres términos de la progresión dada por: $a_n = 10n^2 - 3n$

$a_1 = 10(1) - 3(1) = 7$
$a_2 = 10(2)^2 - 3(2) = 34$
$a_3 = 10(3)^2 - 3(3) = 81$
$a_4 = 10(4)^2 - 3(4) = 148$
$a_5 = 10(5)^2 - 3(5) = 235$

R. $7, 34, 81, 148, 235, \ldots$

c) Escribir el número cien de la progresión:

$$a_n = \frac{2n}{n-20}$$

$$a_{100} = \frac{2(100)}{100-20}$$
$$a_{100} = \frac{200}{80} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$
$$a_{100} = 2.5$$

R. 2.5

CD2.3

a) Encontrar los primeros dos términos de la progresión dada por: $a_n = 2\log n^2$

$a_1 = 2\log(1)^2 = 0$
$a_2 = 2\log(2)^2 = 4\log(2) = 4 \times 0.301029995 = 1.204119$

R. $0, 1.204119, \ldots$

b) Sustituir cada uno de los valores de x en las expresiones y encontrar sus resultados.

$y = 4x + 3$, si x toma valores $1, 2, 3$.

Si $x = 1 \quad \therefore y = 4x + 3 = 4 + 3 = 7$
Si $x = 2 \quad \therefore y = 4x + 3 = 8 + 3 = 11$
Si $x = 3 \quad \therefore y = 4x + 3 = 12 + 3 = 15$
R. $7, 11, 15$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

c) Sustituir cada uno de los valores de x en las expresiones y encontrar sus resultados.

$m = \dfrac{x-1}{x+1}$, si x toma valores 1, 2, 3, 4.

Si $x = 1 \quad \therefore m = \dfrac{1-1}{1+1} = \dfrac{0}{2} = 0$

Si $x = 2 \quad \therefore m = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$

Si $x = 3 \quad \therefore m = \dfrac{3-1}{3+1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Si $x = 4 \quad \therefore m = \dfrac{4-1}{4+1} = \dfrac{3}{5}$

R. $0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}$

CD2.4

a) Encontrar los cuatro primeros términos de la sucesión aritmética: $a_n = 4n + 3$

$a_n = 4n + 3$

$a_1 = 4(1) + 3 = 7$

$a_2 = 4(2) + 3 = 11$

$a_3 = 4(3) + 3 = 15$

$a_4 = 4(4) + 3 = 19$

R. 7, 11, 15, 19

b) Hallar los cinco primeros términos de la sucesión aritmética: $a_n = 4n^2 + 3n$

$a_n = 4n^2 + 3n$

$a_1 = 4(1)^2 + 3(1) = 4 + 3 = 7$

$a_2 = 4(2)^2 + 3(2) = 16 + 6 = 22$

$a_3 = 4(3)^2 + 3(3) = 36 + 9 = 45$

$a_4 = 4(4)^2 + 3(4) = 64 + 12 = 76$

$a_5 = 4(5)^2 + 3(5) = 100 + 15 = 115$

R. 7, 22, 45, 76, 115

CD2.5

a) Calcular la suma de cuatro primeros términos de la sucesión: $a_n = 3 \times (-1)^{n+1}$

$a_n = 3 \times (-1)^{n+1}$

$a_1 = 3 \times (-1)^{1+1} = 3$

$a_2 = 9 \times (-1)^{2+1} = -9$

$a_3 = 27 \times (-1)^{3+1} = 27$

$a_4 = 81 \times (-1)^{4+1} = -81$

$S_4 = -60$

R. $S_4 = -60$

b) Hallar la suma de los dos primeros términos de la sucesión: $a_n = \dfrac{25}{30 - n^2}$

$a_n = \dfrac{25}{30 - n^2}$

$a_1 = \dfrac{25}{30 - 1^2} = \dfrac{25}{30 - 1} = \dfrac{25}{29}$

$a_2 = \dfrac{25}{30 - 2^2} = \dfrac{25}{30 - 4} = \dfrac{25}{26}$

$S_2 = \dfrac{1375}{754} = 1.824$

R. $S_2 = 1.824$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

c) Calcular la suma de los tres primeros términos de la sucesión: $a_n = 5 - n^2 + 3n$

$a_n = 5 - n^2 + 3n$

$a_1 = 5 - 1^2 + 3(1) = 5 - (1) + 3 = 7$

$a_2 = 5 - 2^2 + 3(2) = 5 - (4) + 6 = 7$

$a_3 = 5 - 3^2 + 3(3) = 5 - (9) + 9 = 5$

$S_3 = 7 + 7 + 5 = 19$

R. $S_3 = 19$

CD2.6
Encontrar la suma de los tres primeros términos de las siguientes progresiones:

a) $a_n = 2.5 \times (2)^{n+1}$

$a_1 = 2.5 \times (2)^{1+1} = 10$

$a_2 = 2.5 \times (2)^{2+1} = 20$

$a_3 = 2.5 \times (2)^{3+1} = 40$

$S_3 = 10 + 20 + 40 = 70$

R. $S_3 = 70$

b) $a_n = (-5)^{n-1}$

$a_1 = (-5)^{1-1} = 1$

$a_2 = (-5)^{2-1} = -5$

$a_3 = (-5)^{3-1} = 25$

$S_3 = 1 - 5 + 25 = 21$

R. $S_3 = 21$

c) $a_n = \dfrac{1}{n}$

$a_1 = \dfrac{1}{1} = 1$

$a_2 = \dfrac{1}{2}$

$a_3 = \dfrac{1}{3}$

$S_3 = \dfrac{11}{6} = 1.83$

R. $S_3 = 1.83$

d) $a_1 = 8 \qquad a_n = 4a_{n-1} - 10$

El primer término es $a_1 = 8$

El segundo término

$a_2 = 4a_{2-1} - 10 = 4a_1 - 10 = (4 \times 8) - 10 = 22$

El tercer término

$a_3 = 4a_{3-1} - 10 = 4a_2 - 10 = (4 \times 22) - 10 = 78$

R. $a_1 = 8$, $a_2 = 22$, $a_3 = 78$

Progresiones aritméticas

CD2.7
Encontrar los valores que faltan en las sucesiones:

a) 5, __, 11, 14, __, 20, 23,…
R. 5, **8**, 11, 14, **17**, 20, 23,..

b) 3, __, 12, 24, __, 96, 192,…
R. 3, **6**, 12, 24, **48**, 96, 192,…

c) 15,21, __, 33, 39, 45, __, 57, 63,…
R. 15,21, **27**, 33, 39, 45,**51**, 57, 63,…

d) 33, 42, 51, __, 69, __, 87, 96, 105,…
R. 33, 42, 51,**60**, 69, **78**, 87, 96, 105,…

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD2.8
Hallar la diferencia común de las siguientes series aritméticas:

a) 7, 9, 11, …
R. 2

b) 28, 24, 20, 16, 12, …
R. –4

c) 155, 170, 185, …
R. 15

d) 8, 11, 14, 17, …
R. 3

CD2.9
Encontrar la diferencia común de las siguientes series aritméticas

a) 10, 16, 22, 28, 34,…
R. 6

b) 50, 45, 40, 35, 30, …
R. –5

c) 42, 50, 58, 66, 74,…
R. 8

d) 45, 38, 31, 24, 17, …
R. –7

CD2.10
a) Encontrar la diferencia común en una serie, si el primer término es 9 y el decimosegundo es 42:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$d = \dfrac{a_n - a_1}{n-1}$

$d = \dfrac{42-9}{12-1}$

$d = \dfrac{33}{11}$

$d = 3$

R. $d = 3$

b) Hallar el trigesimoquinto término de la serie aritmética 18, 23, 28, 33, 38, 43,….

Primer paso:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$d = 23 - 28 = 5$

Segundo paso, se sustituye: $a_1 = 18$, $d = 5$ y $n = 35$

$a_{35} = 18 + (35-1)5$

$a_{35} = 18 + (34)5$

$a_{35} = 18 + 170$

$a_{35} = 188$

R. $a_{35} = 188$

c) Encontrar el primer término de una progresión aritmética en la que el decimosegundo término es 81 y su diferencia común es 5.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Se despeja de la fórmula a_1

$a_1 = a_n - (n-1)d$

Al sustituir: $a_{12} = 81$, $n = 12$, y $d = 5$

$a_1 = 81 - (12-1)5$

$a_1 = 81 - (13)5$

$a_1 = 81 - 65$

$a_1 = 26$

R. $a_1 = 26$

d) Hallar la diferencia común de una progresión aritmética si el primer término es 0 y el vigesimoprimero es 200.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$d = \dfrac{a_n - a_1}{n-1}$

$d = \dfrac{200-0}{21-1}$

$d = \dfrac{200}{20}$

$d = 10$

R. $d = 10$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD2.11

a) Encontrar el decimocuarto término de una progresión aritmética si el primer término es –3 y la diferencia común es de 18.

Primer paso, se sustituye: $a_1 = -3$, $d = 18$ y $n = 14$

$$a_{14} = -3 + (14 - 1)18$$
$$a_{14} = -3 + (13)18$$
$$a_{14} = -3 + 234$$
$$a_{14} = 231$$

R. $a_{14} = 231$

b) Obtener el valor de x en la progresión aritmética $-3, x, 5$.

$$2d = a_3 - a_1$$
$$2d = 15 - (-3)$$
$$d = \frac{18}{2}$$
$$d = 9$$
$$x = -3 + 9 = 6$$

Si $x = a_2 \quad \therefore \quad a_2 = 6$

R. $a_2 = 6$

c) Encontrar el vigésimo término de la serie aritmética –4, 16,….

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Primer paso:

$$d = \frac{16 - (-4)}{2 - 1} = 20$$

Segundo paso, se sustituye:
$a_1 = -4$, $d = 20$ y $n = 20$

$$a_{20} = -4 + (20 - 1)20$$
$$a_{20} = -4 + (19)20$$
$$a_{20} = -4 + 380$$
$$a_{20} = 376$$

R. $a_{20} = 376$

d) La diferencia entre los términos décimo y vigesimosegundo en la progresión aritmética es de 120, el cuarto término es –2. Encontrar los cuatro primeros términos.

Del décimo al vigesimosegundo término, se tiene que recorrer 12 términos y la diferencia común es 12 veces, que es igual a 120. Esto se puede expresar como:

$$12d = 120$$
$$d = \frac{120}{12}$$
$$d = 10$$

Como se desea conocer los tres primeros términos, el cuarto término es $a_4 = -2$.

Al despejar a_1

$$-2 = a_1 + (4 - 1)20$$
$$a_1 = -2 - 3(10)$$
$$a_1 = -32$$

$$a_2 = -32 + (2 - 1)(10) = -22$$
$$a_3 = -22 + (3 - 1)(10) = -12$$
$$a_4 = -12 + (4 - 1)(10) = -2$$

R. $a_1 = -32$, $a_2 = -22$, $a_3 = -12$, $a_4 = -2$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD2.12

a) Encontrar el último término de una sucesión aritmética si $a_1 = 4$, $n = 8$ y $d = 4$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_8 = 4 + (8-1)(4)$$
$$a_8 = 4 + (7)(4)$$
$$a_8 = 4 + 28$$
$$a_8 = 32$$

R. $a_8 = 32$

b) Hallar el último término de una sucesión aritmética si $a_1 = 7$, $n = 18$ y $d = 3$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{18} = 7 + (18-1)(3)$$
$$a_{18} = 7 + (17)(3)$$
$$a_{18} = 7 + 51$$
$$a_{18} = 58$$

R. $a_{18} = 58$

CD2.13

a) ¿De cuántos términos estará formada la sucesión $3, 6, 9, \ldots, 51$?

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$
$$n = \frac{51-3}{3} + 1$$
$$n = \frac{48}{3} + 1$$
$$n = 16 + 1$$
$$n = 17$$

R. $n = 17$

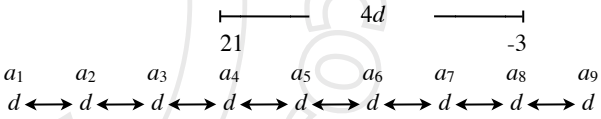
b) Se desea conocer el número de términos de la sucesión aritmética $19, 30, 41, \ldots, 388$, cuya diferencia común es 11.

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$
$$n = \frac{338-19}{11} + 1$$
$$n = \frac{319}{11} + 1$$
$$n = 29 + 1$$
$$n = 30$$

R. $n = 30$

CD2.14

¿Cuáles son los tres primeros términos y el noveno de una progresión aritmética si el cuarto término es 21y el octavo es –3?



Encontrar la razón:

$$a_8 = a_4 + 4d$$
$$-3 = 21 + 4d$$
$$-24 = 4d$$
$$d = -6$$

Los tres primeros términos se obtienen restando sucesivamente la diferencia:

$$a_3 = a_4 - d = 21 - (-6) = 27$$
$$a_2 = a_3 - d = 27 - (-6) = 33$$
$$a_1 = a_2 - d = 33 - (-6) = 39$$
$$\vdots$$
$$a_9 = a - d = -3 - (-6) = -9$$

R. $a_1 = 39$, $a_2 = 33$, $a_3 = 27$, $a_9 = -9$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD2.15
Encontrar la suma de los primeros 20 términos de la sucesión aritmética 19, 26, 33, …

Primer paso, se encuentra la diferencia común:
$d = 26 - 19 = 7$

Segundo paso, se halla el término 20:
$a_{20} = 19 + (20 - 1)(7)$
$a_{20} = 19 + (19)(7)$
$a_{20} = 19 + 133$
$a_{20} = 152$

Tercero, se encuentra la suma:
$$S_{20} = \left(\frac{20}{2}\right)(19 + 152)$$
$S_{20} = 10\,(171)$
$S_{20} = 1\,710$

R. $S_{20} = 1\,710$

CD2.16
Encontrar la suma de 10 + 15 + 20 + ⋯ + 140.

Primer paso, se halla la diferencia común:
$d = 15 - 10 = 5$

Segundo paso, se encuentra el número de términos:
$$n = \frac{a_n - a_1}{d}$$
$$n = \frac{140 - 10}{5}$$
$$n = \frac{130}{5} = 26$$

Tercer paso, se calcula la suma:
$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)(a_1 + a_n)$$
$$S_{152} = \left(\frac{26}{2}\right)(10 + 140)$$
$S_{152} = 13\,(150)$
$S_{152} = 1\,950$

R. $S_{152} = 1\,950$

CD2.17
Encontrar la suma de los términos desde el decimoquinto al vigesimoctavo de la progresión aritmética 8, 12, …

Primer paso, se halla la diferencia común:
$d = 8 - 12 = 4$
Segundo paso, se encuentra la suma de los 28 términos:
$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)[2a_1 + (n-1)d]$$
$$S_{28} = \left(\frac{28}{2}\right)[2(8) + (28-1)(4)]$$
$$S_{28} = (14)[16 + (27)(4)]$$
$$S_{28} = (14)(124)$$
$S_{28} = 1736$
Tercer paso, se halla la suma de los 14 primeros términos:
$$S_{14} = \left(\frac{14}{2}\right)[2((8)) + (14-1)(4)]$$
$$S_{14} = (7)[16 + (13)(4)]$$
$$S_{14} = (7)(68)$$
$S_{14} = 476$
Cuarto paso:
$S_{14-28} = S_{28} - S_{14} = 1736 - 476 = 1\,260$

R. $S_{14-28} = 1\,260$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD2.18
Determinar el decimosexto y la suma de los primeros dieciséis términos de la progresión aritmética 5, 12, 19, 26, …

Primer paso, se encuentra la diferencia común:
$d = 12 - 5 = 7$
Segundo paso, se determina el número de términos:
$a_{16} = 5 + (16 - 1)(7)$
$a_{16} = 5 + (15)(7)$
$a_{16} = 5 + 105$
$a_{16} = 120$
Tercer paso, se halla la suma:

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)(a_1 + a_n)$$

$$S_{16} = \left(\frac{16}{2}\right)(5 + 110)$$

$$S_{16} = (8)(115)$$

$$S_{16} = 920$$

R. $S_{16} = 920$

CD2.19
Encontrar el primer término de una sucesión aritmética cuya suma de 25 términos es 3200, si el último término es 224.

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)(a_1 + a_n)$$

Despejando a_1

$$\frac{2S_n}{n} = a_1 + a_n$$

$$a_1 = \left(\frac{2S_n}{n}\right) - a_n$$

$$a_1 = \left(\frac{(2)(3\,200)}{25}\right) - 224$$

$$a_1 = 256 - 224$$

$$a_1 = 32$$

R. $a_1 = 32$

CD2.20
Encontrar el número de términos de una progresión aritmética y la diferencia común, si el primer término es 6, el último 106 y su suma es 616.

Primer paso, se encuentra el número de términos:

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)(a_1 + a_n)$$

$$616 = \frac{n}{2}(6 + 106)$$

$$n = \frac{616(2)}{112} = \frac{1\,232}{112}$$

$$n = 11$$

Segundo paso, se sustituye el total de términos y se despeja la diferencia común:
$a_n = a_1 + (n - 1)d$
$a_n - a_1 = (n - 1)d$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

$$d = \frac{106 - 6}{11 - 1}$$

$$d = \frac{100}{10}$$

$$d = 10$$

R. $d = 10$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Progresiones geométricas

CD2.21

a) Encontrar el noveno término de la sucesión geométrica: 12, 48, 192,….

Primero se calcula la razón:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{48}{12} = 4$$

Después se encuentra el noveno término:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

$$a_9 = 12(4)^{9-1}$$

$$a_9 = 12(4)^8$$

$$a_9 = 12(65\,536)$$

$$a_9 = 786\,432$$

R. $a_9 = 786\,432$

b) Encontrar el decimosegundo término de la sucesión geométrica: 7, 14,….

Primero se calcula la razón:

$$r = \frac{14}{7} = 2$$

Después se determina el decimosegundo término:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

$$a_{12} = 7(2)^{12-1}$$

$$a_{12} = 7(2)^{11}$$

$$a_{12} = 7(2\,048)$$

$$a_{12} = 14\,336$$

R. $a_{12} = 14\,336$

c) Encontrar el quinto y el décimo término de la progresión geométrica 3, –1,….

$$r = \frac{-1}{3}$$

Después se determina el quinto término:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

$$a_5 = 3\left(-1/3\right)^{5-1}$$

$$a_5 = 3\left(-1/3\right)^4$$

$$a_5 = 3\left(1/84\right)$$

$$a_5 = \frac{3}{84}$$

$$a_5 = 0.035714285$$

Por último se encuentra el décimo término:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

$$a_{10} = 3\left(-1/3\right)^{10-1}$$

$$a_{10} = 3\left(-1/3\right)^9$$

$$a_{10} = 3\left(-1/19\,683\right)$$

$$a_{10} = \frac{-3}{19\,684}$$

$$a_{10} = -0.0001540471$$

R. $a_5 = 0.035714285$ y $a_{10} = -0.0001540471$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

d) Encontrar el noveno término de la progresión geométrica: $(4.5)^{-1}, (4.5)^{-2}, (4.5)^{-3}, \ldots$

Primero se calcula la razón:

$$r = \frac{(4.15)^{-2}}{(4.15)^{-1}} = (4.15)^{-1}$$

Después se halla el octavo término:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$
$$a_8 = (4.15)^{-1}\left[(4.15)^{-1}\right]^{9-1}$$
$$a_8 = (4.15)^{-1}\left[(4.15)^{-1}\right]^{8}$$
$$a_8 = (4.15)^{-1}(4.15)^{-8}$$
$$a_8 = (4.15)^{-9}$$
$$a_8 = 0.000002738$$

R. $a_8 = 0.000002738$

CD2.22

a) Encontrar el valor del sexto término de la progresión geométrica: $9, 45, 225, \ldots$.

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$
$$a_6 = 9\left(5^{6-1}\right)$$
$$a_6 = 9\left(5^{5}\right)$$
$$a_6 = 9(3125)$$
$$a_6 = 28\,125$$

R. $a_6 = 28\,125$

b) Encontrar el valor del sexto término de la progresión geométrica $1.5, (1.5)^4, \ldots$

Primer paso, se calcula la razón:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$
$$r = \frac{(1.5)^4}{1.5}$$
$$r = (1.5)^3$$

Después se encuentra el sexto término:

$$a_n = a_1\left(r^{n-1}\right)$$
$$a_6 = 1.5\left[(1.5)^3\right]^{6-1}$$
$$a_6 = 1.5\left[(1.5)^3\right]^{5}$$
$$a_6 = 1.5(1.5)^{15}$$
$$a_6 = 1.5(437.89389)$$
$$a_6 = 6568.41$$

R. $a_6 = 6568.41$

c) Encontrar el valor del sexto término de la progresión geométrica $7, 21, 63, \ldots$

Primer paso, se calcula la razón:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$
$$r = \frac{21}{7}$$
$$r = 3$$

Después se determina el sexto término:

$$a_n = a_1\left(r^{n-1}\right)$$
$$a_6 = 7(3)^{10-1}$$
$$a_6 = 7\,(3)^{9}$$
$$a_6 = 7(19683)$$
$$a_6 = 137\,781$$

R. $a_6 = 137\,781$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

d) Determinar los tres primeros términos, si $a_1 = 7$ y $r = 3$

$$a_n = a_1\left(r^{n-1}\right)$$
$$a_1 = 7$$

$$a_2 = 7\left(3\right)^{2-1}$$
$$a_2 = 7\left(3\right)^{1}$$
$$a_2 = 21$$

$$a_3 = 7\left(3\right)^{3-1}$$
$$a_3 = 7\left(3\right)^{2}$$
$$a_3 = 7\left(9\right)$$
$$a_3 = 63$$

R. $a_1 = 7$, $a_2 = 21$, $a_3 = 63$

CD2.23

a) Encontrar el número de términos de la progresión geométrica, si se sabe que $a_1 = 12$, $r = 3/4$, $a_n = 3/8$

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$
$$n = \frac{\log 3/8 - \log 12}{\log 3/4} + 1$$
$$n = \frac{\log 0.375 - \log 12}{\log 0.75} + 1$$
$$n = \frac{-0.425968 - 1.079181}{-0.124938} + 1$$
$$n = \frac{-1.505149}{-0.124938} + 1$$
$$n = 12.05 + 1$$
$$n = 13$$

R. $n = 13$

b) Hallar el número de términos de la progresión geométrica: 17, 34, 68, …, 34816.

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

$$n = \frac{\log(34816) - \log(17)}{\log 2} + 1$$
$$n = \frac{4.541778874 - 1.230448921}{0.301029995} + 1$$
$$n = \frac{3.311329952}{0.301029995} + 1$$
$$n = 11 + 1$$
$$n = 12$$

R. $n = 12$

c) Determinar el número de términos de la progresión geométrica, si se sabe que $a_1 = 8$, $a_n = 17496$ y $r = 3$.

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

$$n = \frac{\log(17496) - \log(8)}{\log 3} + 1$$
$$n = \frac{4.242938 - 0.903089}{0.477121} + 1$$
$$n = \frac{3.339848}{0.477121} + 1$$
$$n = 7 + 1$$
$$n = 8$$

R. $n = 8$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

d) Encontrar el número de términos de la progresión geométrica, si se sabe que 5, 5/2, 5/4, … , 5/64

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

$$n = \frac{\log(5/64) - \log(5)}{\log 1/2} + 1$$

$$n = \frac{\log 0.078125 - \log 5}{\log 0.5} + 1$$

$$n = \frac{-1.107209 - 0.69897}{-0.3010299} + 1$$

$$n = \frac{-1.806179}{-0.3010299} + 1$$

$$n = 6 + 1$$

$$n = 7$$

R. $n = 7$

CD2.24

El décimo y vigésimo término de una progresión geométrica son: $a_{10} = 1/128$ y $a_{26} = 512$. Encontrar los primeros cuatro términos.

Solución:

Como el término a_{26} es igual al décimo (a_{10}) multiplicado 16 veces (26 –10 = 16) entonces:

$a_{26} = a_{10} r^{16}$

Al sustituir el valor de los términos:

$$512 = \frac{1}{128} r^{16}$$

Al despejar la razón:

$r^{16} = (512)(128)$

$r^{16} = 65536$

$r = 2$

De la expresión $a_n = a_1 r^{n-1}$ se despeja a_1

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$a_1 = \frac{a_{10}}{r^{10-1}}$$

$$a_1 = \frac{1/128}{r^9}$$

$$a_1 = \frac{1/128}{2^9}$$

$$a_1 = \frac{1}{(2^9)(2^7)}$$

$$a_1 = \frac{1}{2^{16}}$$

R. $a_1 = \frac{1}{2^{16}}$

CD2.25

a) Encontrar el décimo término y la suma de los 12 primeros términos. La razón es 3 y el primer término es 7.

$a_n = a_1 (r^{n-1})$

$a_{10} = 7(3^{10-1})$

$a_{10} = 7(3^9)$

$a_{10} = 7(19\,683)$

$a_{10} = 137\,781$

R. $a_{10} = 137\,781$

b) Determinar la suma de los 15 primeros términos de la progresión geométrica, si el tercero y el quinto son 12 y 48.

Solución:

$a_n = a_1 (r^{n-1})$

$a_3 = 12$ o $a_3 = a_1 r^2 = 12$

$a_5 = 48$ o $a_5 = a_1 r^4 = 48$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Para llegar del decimotercero al quinto se multiplica tres veces por la razón.

$$a_5 = a_3 rr$$
$$48 = 12r^2$$
$$r^2 = \frac{48}{12}$$
$$r^2 = 4$$
$$r = 2$$

Se calcula el valor del primer término:

$$a_n = a_1\left(r^{n-1}\right)$$

Al sustituir valores:

$$12 = a_1 2^{3-1}$$
$$12 = a_1 2^2$$
$$12 = a_1(4)$$
$$a_1 = \frac{12}{4}$$
$$a_1 = 3$$

Se encuentra la suma de los 15 primeros términos:

$$S_{15} = \frac{3\left(1-2^{15}\right)}{1-2}$$
$$S_{15} = \frac{3(1-32768)}{-1}$$
$$S_{15} = \frac{3(-32767)}{-1}$$
$$S_{15} = \frac{-98301}{-1}$$
$$S_{15} = 98301$$

R. $S_{15} = 98301$

c) Encontrar el décimo término y la suma de los 16 primeros términos. La razón es 3 y el primer término es 7.

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$
$$S_{16} = \frac{7\left(1-3^{12}\right)}{1-3}$$
$$S_{16} = \frac{7\left(1-531\,441\right)}{-2}$$
$$S_{16} = \frac{-3\,720\,080}{-2}$$
$$S_{16} = 1\,868\,040$$

R. $S_{16} = 1\,868\,040$

Aplicaciones

CD2.26

La señora Josefina pide prestados 2 500 pesos y acepta pagar 100 pesos al final de cada mes y el 12% anual de interés sobre el saldo. Calcular la suma de todo el interés pagado.

Datos:

Tasa de interés: 12% anual o 0.01 mensual.

Total de pagos mensuales $= \frac{2\,500}{100} = 25$

Pago	1	2	3	…	25
Saldo	2 500.00	2 400.00	2 300.00	…	100.00
Interés	25.00	24.00	23.00	…	1.00

$$S_{25} = \frac{25}{2}(25 + 0.01)$$
$$S_{25} = \frac{625.25}{2}$$
$$S_{25} = 312.62 \text{ pesos}$$

R. $S_{25} = 312.62$ pesos

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD2.27
Un activo cuesta 20 000 pesos y la depreciación por año se estima en 50%. ¿Cuál es el valor del activo después de cinco años?

Datos:
$a_1 = \$20000$, $r = 0.5$ y $n = 5$ años

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$a_5 = 20000\left(0.5^{5-1}\right)$$
$$a_5 = 20000\left(0.5^{4}\right)$$
$$a_5 = 20000(0.0625)$$
$$a_5 = \$1250$$

R. $a_5 = \$1250$

CD2.28
El bufete de abogados AK compró una aspiradora industrial que les costó 8 500 pesos. La Secretaría de Hacienda solo les reconoce una depreciación por año del 75% de valor al principio de cada año. Calcular el valor de la aspiradora después de 10 años.

Datos:
$a_1 = \$8500$, $r = 0.75$ y $n = 10$ años

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$a_5 = 8500\left(0.75^{10-1}\right)$$
$$a_5 = 8500\left(0.75^{9}\right)$$
$$a_5 = 8500(0.0100777)$$
$$a_5 = \$638.22$$

R. $a_5 = \$638.22$

Problemas complementarios
Parte I

CD-I-2.1
Encontrar la diferencia común de las siguientes sucesiones:

a) 4 430, 4 680, 4 930

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$
$$d = \frac{4930 - 4430}{3-1}$$
$$d = \frac{500}{2} = 250$$

R. $d = 250$

b) 70, 110, 150

Solución:
$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$
$$d = \frac{150 - 70}{3-1}$$
$$d = \frac{80}{2} = 40$$

R. $d = 40$

CD-I-2.2
Despejar d de la siguiente expresión:
$$y = a + (b-1)d$$
$$a = y - (b-1)d$$
$$d = \frac{y-a}{b-1}$$

R. $d = \frac{y-a}{b-1}$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-I-2.3
Encontrar la suma de los primeros tres números de las siguientes series:

a) 19, 30, 41, 42, 53

Primer paso, se encuentra la diferencia común:
$d = 3 - 19 = 11$

Segundo paso, se determina el tercer término:
$a_3 = 41$

Tercer paso, se calcula la suma:

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)(a_1 + a_n)$$

$$S_3 = \left(\frac{3}{2}\right)(19 + 41)$$

$$S_3 = \left(\frac{3}{2}\right)(60)$$

$$S_3 = \left(\frac{180}{2}\right) = 90$$

R. $S_3 = 90$

b) 2, 6, 18, 54, …

Solución:

Primer paso:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{6}{2} = 3$$

Segundo paso:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$S_3 = \frac{2(1 - 3^3)}{1 - 3}$$

$$S_3 = \frac{2(1 - 27)}{-2}$$

$$S_3 = \frac{2(-26)}{-2}$$

$$S_3 = \frac{-52}{-2} = 26$$

R. $S_3 = 26$

CD-I-2.4
Encontrar la razón común de las siguientes sucesiones:
a) 12, 48, 192

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{48}{12} = 4$$

R. $r = 4$

b) 7, 28, 112

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{28}{7} = 4$$

R. $r = 4$

recursos académicos en línea Grupo Editorial Patria

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte II

CD-II-2.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) a_3 representa el decimotercer término de una sucesión — FALSE

b) El subíndice n indica el término de una sucesión. — FALSE

c) El sexto término de la sucesión aritmética 3, 7, 11,.... es 25 — FALSE

d) Los términos de una sucesión se denotan con a_n — TRUE

e) La expresión $a_n = a_1 + (n-1)d$ es una sucesión aritmética. — TRUE

f) La razón común de una sucesión geométrica se denota con d. — FALSE

g) La expresión $a_n = a_1(1 + r^{n-1})$ es una sucesión aritmética. — FALSE

CD-II-2.2
Explicar el concepto de sucesión.

R. Es un conjunto ordenado de números reales construidos a partir de una regla.

CD-II-2.3
¿Qué se entiende por sucesión aritmética?

R. Es una progresión que se forma sumando al primer término una cantidad constante conocida como diferencia común para obtener el segundo término y así sucesivamente.

CD-II-2.4
¿Qué es una sucesión geométrica?

R. Es una progresión que se forma al multiplicar el término anterior por una cantidad constante llamada factor común.

CD-II-2.5
Explicar el concepto de serie.

R. Es la suma de los términos de una sucesión y se simboliza con .

CD-II-2.6
¿Las siguientes sucesiones son geométricas?

a) 3, 6, 12, 36, 108 — No
b) 18, 21, 25, 30 — No

CD-II-2.7
¿Las siguientes sucesiones son geométricas?

a) 9, 13, 17, 21, 25 — No
b) 1, 5, 25, 125 — Sí

CD-II-2.8
Encontrar la suma de 10 + 15 + 20 + … + 130.

Primer paso:

$$d = a_n - a_1$$
$$d = 15 - 10 = 5$$

Segundo paso:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$
$$n = \frac{130 - 10}{5} + 1$$
$$n = \frac{120}{5} + 1$$
$$n = 24 + 1$$
$$n = 25$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tercer paso:

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)(a_1 + a_n)$$

$$S_{25} = \frac{25(10+130)}{2}$$

$$S_{25} = \frac{25(140)}{2}$$

$$S_{25} = 25(70)$$

$$S_{25} = 1750$$

R. $S_{25} = 1750$

CD-II-2.9

El primer término de una sucesión aritmética es 20 y el último término es 74; la suma de términos es 470. Encontrar la diferencia común.

Primer paso:

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)(a_1 + a_n)$$

$$\frac{S_n}{a_1 + a_n} = \frac{n}{2}$$

$$n = \frac{2S_n}{a_1 + a_n}$$

$$n = \frac{2(470)}{20 + 74}$$

$$n = \frac{940}{94} = 10 \text{ términos}$$

Segundo paso:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n} + 1$$

$$d = \frac{74 - 20}{10} + 1$$

$$d = \frac{54}{10} + 1$$

$$d = 5.4 + 1$$

$$d = 6.4$$

R. La diferencia se redondea hacia abajo y queda $d = 6$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
20	26	32	38	44	50	56	62	68	74

CD-II-2.10

Encontrar el tercer término de la sucesión $a_n = 4n + n^2$

$$a_3 = 4(3) + 3^2$$

$$a_3 = 12 + 9$$

$$a_3 = 21$$

R. $a_3 = 21$

recursos académicos en línea

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-II-2.11
Hallar el octavo término y calcular la suma de los ocho primeros términos de la sucesión 6, 24, 96, …

Primer paso:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{48}{12} = 4$$

Segundo paso:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_8 = 6(4)^{8-1}$$

$$a_8 = 6(4)^7$$

$$a_8 = 6(16384)$$

$$a_8 = 98304$$

Tercer paso:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_8 = \frac{6(1-4^8)}{1-4}$$

$$S_8 = \frac{6(1-65536)}{-3}$$

$$S_8 = \frac{6(1-65535)}{-3}$$

$$S_8 = \frac{-393210}{-3}$$

$$S_8 = 131070$$

R. $a_8 = 98304$, $S_8 = 131070$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	S_8
6	24	96	384	1,536	6,144	24,576	98,304	131,070

Parte III

CD-III-2.1
$-1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

CD-III-2.2
$-3, -4, -3$

CD-III-2.3
$4, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}$

CD-III-2.4
$-6, -2, 2, 22$

CD-III-2.5
a) $5, 4, 3, 2, -3$
b) $1, 4, 7, 10, 25$
c) $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{9}{12}$
d) $1, 3, 7, 13, 73$
e) $5, 7, 5, 7, 5$
f) $\frac{3}{-14}, \frac{6}{-13}, \frac{9}{-12}, \frac{12}{-11}, \frac{27}{-6}$

CD-III-2.6
10

CD-III-2.7
5

CD-III-2.8
15

CD-III-2.9
13

CD-III-2.10
11

CD-III-2.11
19

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-III-2.12
76

CD-III-2.13
180

CD-III-2.14
257

CD-III-2.15
124

CD-III-2.16
–1

CD-III-2.17
77

CD-III-2.18
18

CD-III-2.19
25

CD-III-2.20
45

CD-III-2.21
2 300

CD-III-2.22
2 550

CD-III-2.23
2 470

CD-III-2.24
351

CD-III-2.25
15

CD-III-2.26
15

CD-III-2.27
10 días

CD-III-2.28
16 días

CD-III-2.29
20 días

CD-III-2.30
$r = 3$, $a_5 = 3870$

CD-III-2.31
$r = 2$, $a_9 = 8704$

CD-III-2.32
$r = 4$, $a_6 = 7168$

CD-III-2.33
6

CD-III-2.34
7

CD-III-2.35
9

CD-III-2.36
88 572

CD-III-2.37
16 383

CD-III-2.38
531 440

CD-III-2.39
27

CD-III-2.40
2

CD-III-2.41
3

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

GEP · recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

GLOSARIO

Bien. Cualquier objeto o servicio capaz de satisfacer una necesidad.

Compra. Acción de adquirir algo a cambio de dinero. También, conjunto de bienes y servicios adquiridos en el acto de compra.

Costo. Precio pagado o solicitado para la adquisición de bienes o servicios. Precio o gasto de elaboración de un producto.

Cotización. Precio al que se puede efectuar en un mercado determinado de compra o la venta de un bien, valor o divisa. También se aplica al precio al que compradores y vendedores están dispuestos a cerrar operaciones, pero que no es necesariamente el precio al que realmente se cierra.

Divisa. Término que engloba la moneda de curso legal de terceros países, medios de pago y activos financieros denominados en moneda extranjera, e ingresos en monedas extranjeras originados por transacciones en el exterior.

Ganancia. Beneficio, lucro o provecho que se obtiene de la relación de un trabajo o actividad. En las actividades comerciales es el beneficio obtenido como diferencia del precio de compra de un producto y el precio de venta.

Inflación. Elevación general del nivel de precios que normalmente se mide con el índice de precios al consumidor.

Materias primas. Es un subgrupo del Plan General de Contabilidad que reconoce los elementos naturales, no elaborados, que se incorporan al inicio del proceso de producción para ser elaborados o transformados en productos fabricados o terminados.

Poder adquisitivo. Volumen de bienes y servicios a los que puede acceder, por término medio, una persona o grupo de personas dado su nivel de renta.

Razón. Es el resultado de la comparación entre dos cantidades; razón directa o inversa.

Renta. Cantidad que una persona denominada rentista tiene derecho a percibir periódicamente durante un periodo limitado (renta temporal) o durante toda su vida (renta vitalicia). También es la utilidad, beneficio o incremento de riqueza que una persona física o jurídica percibe en un periodo en forma de retribuciones del trabajo o rendimientos del capital o de la tierra.

Serie. Es la suma de los términos de una sucesión.

Serie aritmética. Se forma realizando la suma de los términos de la sucesión aritmética, se simboliza con S_n , en donde n es el número de términos de la sucesión aritmética.

Serie geométrica. Es la suma de términos de una sucesión geométrica.

Servicio. Acción o efecto de servir.

Sucesión. Conjunto ordenado de números reales construidos a partir de una regla; a cada número se le llama término de la sucesión.

Sucesión aritmética. Se forma sumando al primer término una cantidad constante conocida como diferencia común para obtener el segundo término y así sucesivamente.

Sucesión geométrica. Se forma multiplicando el término anterior por una cantidad constante llamada factor común.

Término. Cada una de las cantidades que componen un polinomio, razón, quebrado, etcétera.

Utilidad. Satisfacción que proporciona al usuario el empleo de un bien. En países latinoamericanos, beneficio o ganancia.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

SERIES Y SUCESIONES

Objetivos

- Identificar las progresiones; aprender a encontrar los elementos de la progresión utilizando fórmula y la suma de los elementos que la forman.
- Aprender a encontrar los elementos de la serie aritmética utilizando fórmula, la suma de los elementos que la forman y calcular el número de elementos de las progresiones aritméticas.
- Identificar las progresiones geométricas; aprender a encontrar los elementos de la progresión utilizando fórmula y la suma de los elementos que la forman.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Formulario

Sucesión o progresión

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$

Serie

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

Progresión aritmética

$a_n = a_{n-1} + d$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Diferencia común

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

Número de términos en progresión aritmética

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

Serie aritmética

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Progresión geométrica

$a_n = a_{n-1}\,(r)$

$a_n = a_1\, r^{n-1}$

Razón común

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Número de términos progresión geométrica

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

Serie geométrica

$$S_n = \frac{a_1\left(1 - r^n\right)}{1 - r} \quad ; \text{ Si } \quad r \neq 1$$

Terminología

d	Diferencia común
n	Número de términos
r	Razón común
S_n	Serie aritmética y geométrica
a_n	Término de la sucesión.
n	La posición del término

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

¿Qué sabes?

Aplica tus conocimientos y encuentra los resultados de cada problema

2.1

Encontrar los tres primeros términos y el décimo de $a_n = \frac{n^2}{5^n}$.

2.2

Obtener la suma de los tres primeros términos de la progresión $a_n = 5n - 6$

2.3

Determinar los tres primeros términos de la sucesión aritmética $a_n = 5n + 6$.

2.4

Encontrar el último término de la sucesión aritmética si $a_1 = 6$, $n = 9$ y $d = 3$.

2.5

Determinar la suma de los primeros 14 términos de la sucesión aritmética 25, 31, 37, …

2.6

Encontrar el noveno término de la sucesión geométrica 9, 45, 225,….

2.7

Determinar el valor del sexto término de la progresión geométrica 2.5, $(2.5)^4$, …

2.8

Calcular la suma de los 10 primeros términos de la sucesión geométrica 9, 45, 225, ...

2.9

Hallar el decimosexto término y la suma de los 17 primeros términos, si la razón es 2 y el primer término es 18.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas a resolver

CD2.1

a) Encontrar los primeros tres términos de la siguiente progresión: $a_n = 2n + 3$

b) Escribir los primeros tres términos y el vigesimoprimero de la progresión definida por: $a_n = \dfrac{n-2}{n}$

c) Hallar los primeros tres términos de la progresión dada por: $a_n = n^2 + 2n$

d) Encontrar los primeros cinco términos de la siguiente progresión: $a_n = 2n + n^3$

CD2.2

a) Escribir los primeros tres términos y el vigesimoprimero de la progresión definida por: $a_n = \dfrac{2n-2}{n+1}$

b) Hallar los primeros tres términos de la progresión dada por: $a_n = 10n^2 - 3n$

c) Escribir el número cien de la progresión: $a_n = \dfrac{2n}{n-20}$

CD2.3

a) Encontrar los primeros dos términos de la progresión dada por: $a_n = 2\log n^2$

b) Sustituir cada uno de los valores de *x* en las expresiones y encontrar sus resultados.
c) Sustituir cada uno de los valores de *x* en las expresiones y encontrar sus resultados.

CD2.4

a) Encontrar los cuatro primeros términos de la sucesión aritmética: $a_n = 4n + 3$

b) Hallar los cinco primeros términos de la sucesión aritmética: $a_n = 4n^2 + 3n$

CD2.5

a) Calcular la suma de cuatro primeros términos de la sucesión: $a_n = 3 \times (-1)^{n+1}$

b) Hallar la suma de los dos primeros términos de la sucesión: $a_n = \dfrac{25}{30 - n^2}$

c) Calcular la suma de los tres primeros términos de la sucesión: $a_n = 5 - n^2 + 3n$

CD2.6

Encontrar la suma de los tres primeros términos de las siguientes progresiones:

a) $a_n = 2.5 \times (2)^{n+1}$

b) $a_n = (-5)^{n-1}$

c) $a_n = \dfrac{1}{n}$

d) $a_1 = 8$, $a_n = 4a_{n-1} - 10$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Progresiones aritméticas

CD2.7
Encontrar los valores que faltan en las sucesiones:

a) 5, __, 11, 14, __, 20, 23,…
b) 3, __, 12, 24, __, 96, 192,…
c) 15,21, __, 33, 39, 45, __, 57, 63,…
d) 33, 42, 51, __, 69, __, 87, 96, 105,…

CD2.8
Hallar la diferencia común de las siguientes series aritméticas:
a) 7, 9, 11, …
b) 28, 24, 20, 16, 12, …
c) 155, 170, 185, …
d) 8, 11, 14, 17, …

CD2.9
Encontrar la diferencia común de las siguientes series aritméticas
a) 10, 16, 22, 28, 34,…
b) 50, 45, 40, 35, 30, …
c) 42, 50, 58, 66, 74,…
d) 45, 38, 31, 24, 17, …

CD2.10
a) Encontrar la diferencia común en una serie, si el primer término es 9 y el decimosegundo es 42.
b) Hallar el trigesimoquinto término de la serie aritmética 18, 23, 28, 33, 38, 43,….
c) Encontrar el primer término de una progresión aritmética en la que el decimosegundo término es 81 y su diferencia común es 5.
d) Hallar la diferencia común de una progresión aritmética si el primer término es 0 y el vigesimoprimero es 200.

CD2.11
a) Encontrar el decimocuarto término de una progresión aritmética si el primer término es –3 y la diferencia común es de 18.
b) Obtener el valor de x en la progresión aritmética $-3, x, 5$.
c) Encontrar el vigésimo término de la serie aritmética –4, 16,….
d) La diferencia entre los términos décimo y vigesimosegundo en la progresión aritmética es de 120, el cuarto término es –2. Encontrar los cuatro primeros términos.

CD2.12
a) Encontrar el último término de una sucesión aritmética si $a_1 = 4$, $n = 8$ y $d = 4$.
b) Hallar el último término de una sucesión aritmética si $a_1 = 7$, $n = 18$ y $d = 3$.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD2.13
a) ¿De cuántos términos estará formada la sucesión 3, 6, 9, … , 51 ?
b) Se desea conocer el número de términos de la sucesión aritmética 19, 30, 41, …, 388, cuya diferencia común es 11.

CD2.14
¿Cuáles son los tres primeros términos y el noveno de una progresión aritmética si el cuarto término es 21y el octavo es –3?

CD2.15
Encontrar la suma de los primeros 20 términos de la sucesión aritmética 19, 26, 33, …

CD2.16
Encontrar la suma de $10 + 15 + 20 + \cdots + 140$.

CD2.17
Encontrar la suma de los términos desde el decimoquinto al vigesimoctavo de la progresión aritmética 8, 12, …

CD2.18
Determinar el decimosexto y la suma de los primeros dieciséis términos de la progresión aritmética 5, 12, 19, 26, …

CD2.19
Encontrar el primer término de una sucesión aritmética cuya suma de 25 términos es 3200, si el último término es 224.

CD2.20
Encontrar el número de términos de una progresión aritmética y la diferencia común, si el primer término es 6, el último 106 y su suma es 616.

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Progresiones geométricas

CD2.21
a) Encontrar el noveno término de la sucesión geométrica: 12, 48, 192,.…
b) Encontrar el decimosegundo término de la sucesión geométrica: 7, 14,.…
c) Encontrar el quinto y el décimo término de la progresión geométrica 3, –1,.…
d) Encontrar el noveno término de la progresión geométrica: $(4.5)^{-1}$, $(4.5)^{-2}$, $(4.5)^{-3}$, …

CD2.22
a) Encontrar el valor del sexto término de la progresión geométrica: 9, 45, 225, ….
b) Encontrar el valor del sexto término de la progresión geométrica 1.5, $(1.5)^4$, …
c) Encontrar el valor del sexto término de la progresión geométrica 7, 21, 63, …
d) Determinar los tres primeros términos, si $a_1 = 7$ y $r = 3$

CD2.23
a) Encontrar el número de términos de la progresión geométrica, si se sabe que $a_1 = 12, r = 3/4, a_n = 3/8$
b) Hallar el número de términos de la progresión geométrica: 17, 34, 68, …, 34816.
c) Determinar el número de términos de la progresión geométrica, si se sabe que $a_1 = 8$, $a_n = 17496$ y $r = 3$.
d) Encontrar el número de términos de la progresión geométrica, si se sabe que 5, 5/2, 5/4, … , 5/64

CD2.24
El décimo y vigésimo término de una progresión geométrica son: $a_{10} = 1/128$ y $a_{26} = 512$. Encontrar los primeros cuatro términos.

CD2.25
a) Encontrar el décimo término y la suma de los 12 primeros términos. La razón es 3 y el primer término es 7.
b) Determinar la suma de los 15 primeros términos de la progresión geométrica, si el tercero y el quinto son 12 y 48.
c) Encontrar el décimo término y la suma de los 16 primeros términos. La razón es 3 y el primer término es 7.

Aplicaciones
CD2.26
La señora Josefina pide prestados 2 500 pesos y acepta pagar 100 pesos al final de cada mes y el 12% anual de interés sobre el saldo. Calcular la suma de todo el interés pagado.

CD2.27
Un activo cuesta 20 000 pesos y la depreciación por año se estima en 50%. ¿Cuál es el valor del activo después de cinco años?

CD2.28
El bufete de abogados AK compró una aspiradora industrial que les costó 8 500 pesos. La Secretaría de Hacienda solo les reconoce una depreciación por año del 75% de valor al principio de cada año. Calcular el valor de la aspiradora después de 10 años.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas complementarios
Parte I

CD-I-2.1
Encontrar la diferencia común de las siguientes sucesiones:
a) 4 430, 4 680, 4 930
b) 70, 110, 150

CD-I-2.2
Despejar d de la siguiente expresión: $y = a + (b - 1)d$

CD-I-2.3
Encontrar la suma de los primeros tres números de las siguientes series:
a) 19, 30, 41, 42, 53
b) 2, 6, 18, 54, …

CD-I-2.4
Encontrar la razón común de las siguientes sucesiones:
a) 12, 48, 192
b) 7, 28, 112

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte II

CD-II-2.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) a_3 representa el decimotercer término de una sucesión _____

b) El subíndice n indica el término de una sucesión. _____

c) El sexto término de la sucesión aritmética 3, 7, 11,…. es 25 _____

d) Los términos de una sucesión se denotan con a_n _____

e) La expresión $a_n = a_1 + (n-1)d$ es una sucesión aritmética. _____

f) La razón común de una sucesión geométrica se denota con d. _____

g) La expresión $a_n = a_1(1 + r^{n-1})$ es una sucesión aritmética. _____

CD-II-2.2
Explicar el concepto de sucesión.

CD-II-2.3
¿Qué se entiende por sucesión aritmética?

CD-II-2.4
¿Qué es una sucesión geométrica?

CD-II-2.5
Explicar el concepto de serie.

CD-II-2.6
¿Las siguientes sucesiones son geométricas?
a) 3, 6, 12, 36, 108
b) 18, 21, 25, 30

CD-II-2.7
¿Las siguientes sucesiones son geométricas?
a) 9, 13, 17, 21, 25
b) 1, 5, 25, 125

CD-II-2.8
Encontrar la suma de 10 + 15 + 20 + … + 130.

CD-II-2.9
El primer término de una sucesión aritmética es 20 y el último término es 74; la suma de términos es 470. Encontrar la diferencia común.

CD-II-2.10
Encontrar el tercer término de la sucesión $a_n = 4n + n^2$

CD-II-2.11
Hallar el octavo término y calcular la suma de los ocho primeros términos de la sucesión 6, 24, 96, …

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte III

CD-III-2.1

Escribir los cuatro primeros términos de la sucesión $a_n = \frac{n-2}{n}$.

CD-III-2.2

Encontrar los tres primeros términos de la sucesión $a_n = n(n-4)$.

CD-III-2.3

Determinar los cinco primeros términos de la sucesión $a_n = \frac{1}{n} + 3$.

CD-III-2.4

Escribir los tres primeros términos y el octavo de la sucesión $a_n = 4n - 10$.

CD-III-2.5

Determinar los cuatro primeros términos y noveno de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 6 - n$

b) $a_n = 3n - 2$

c) $a_n = \frac{n}{n+3}$

d) $a_n = n^2 - n + 1$

e) e) $a_n = 6 + (-1)^{n+2}$

f) $a_n = \frac{3n}{n-15}$

CD-III-2.6

El primer término es 10 y el vigesimoprimero es 210. Encontrar la diferencia común.

CD-III-2.7

Hallar la diferencia común si el primer término es 1 y el décimo es 46.

CD-III-2.8

El primer término es 16 y el decimosegundo es 181. Encontrar la diferencia común.

CD-III-2.9

¿De cuántos términos está formada la sucesión 31, 46, 61, …, 211?

CD-III-2.10

¿De cuántos términos está formada la sucesión 13, 17, …, 53?

CD-III-2.11

¿De cuántos términos está formada la sucesión 3, 14, 25, …, 201?

CD-III-2.12

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Encontrar el último término de una sucesión aritmética si $a_1 = 4$, $n = 13$ y $d = 6$.

CD-III-2.13
Determinar el último término de una sucesión aritmética si $a_1 = 12$, $n = 25$ y $d = 7$.

CD-III-2.14
Encontrar el último término de una sucesión aritmética si $a_1 = 1$, $n = 33$ y $d = 8$.

CD-III-2.15
Hallar el último término de la sucesión aritmética 10, 16, 22, … La sucesión está formada por 20 términos.

CD-III-2.16
Encontrar el último término de la sucesión aritmética 55, 51, 47, …. La sucesión está formada por 15 términos.

CD-III-2.17
Determinar el último término de la sucesión aritmética 29, 33, 37, …. La sucesión está formada por 13 términos.

CD-III-2.18
Hallar el primer término de una sucesión aritmética cuya suma de 15 términos es 690 y el último término es 74.

CD-III-2.19
Encontrar el primer término de una sucesión aritmética cuya suma de 12 términos es 768 y el último término es 103.

CD-III-2.20
Determinar el primer término de una sucesión aritmética cuya suma de 21 términos es 2 835 y el último término es 225.

CD-III-2.21
Hallar la suma de los primeros 25 términos de la sucesión aritmética 32, 37, 42, ….

CD-III-2.22
Calcular la suma de los primeros 20 términos de la sucesión aritmética 42, 51, 60, ….

CD-III-2.23
Encontrar la suma de los primeros 20 términos de la sucesión aritmética 19, 30, 41, ….

CD-III-2.24
Se desea conocer el número de términos de la sucesión aritmética 100, 102, 104, …, cuya diferencia común es 2.

CD-III-2.25
Determinar el número de términos de la sucesión aritmética 42, 51, 60, …, 168, cuya diferencia común es 9.

CD-III-2.26
Se desea encontrar el número de términos de la sucesión aritmética 33, 37, 42, …, 102,, cuya diferencia común es 5.

CD-III-2.27

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Si el dólar aumenta de precio en $0.10 por día y el día de hoy se cotiza en $11.10 pesos a la venta, ¿en cuántos días alcanzará la cotización de 12.00 pesos?

CD-III-2.28
Si el euro aumenta de precio en $0.0354 por día y el día de hoy se cotiza en $14.4747 pesos a la venta, ¿en cuántos días alcanzará la cotización de 15.0057 pesos?

CD-III-2.29
Si la UDI aumenta de precio en $0.000132 por día y el día de hoy se cotiza en $3.690061, ¿en cuántos días alcanzará la cotización de $3.692569?

CD-III-2.30
Encontrar el quinto término de la sucesión geométrica 47, 141, 423, …

CD-III-2.31
Determinar el décimo término de la sucesión geométrica 17, 34, 68, …

CD-III-2.32
Hallar el sexto término de la sucesión geométrica 7, 28, 112, …

CD-III-2.33
Encontrar el número de términos de la sucesión 7, 28, 112, …, 7 168.

CD-III-2.34
Determinar el número de términos de la sucesión 17, 34, 68, …, 1 088.

CD-III-2.35
Hallar el número de términos de la sucesión 9, 45, 225, …, 3 515 625.

CD-III-2.36
Calcular la suma de los diez primeros términos de la sucesión geométrica 3, 9, 27, 81, 243, …

CD-III-2.37
Determinar la suma de los siete primeros términos de la sucesión geométrica 3, 12, 48, 192, …

CD-III-2.38
Calcular la suma de los doce primeros términos de la sucesión geométrica 2, 6, 18, 54, …

CD-III-2.39
La suma de los diez primeros términos de una sucesión geométrica es 797 148 y la razón es 3. Encontrar el primer término.

CD-III-2.40
La suma de los doce primeros términos de una sucesión geométrica es 531 440 y la razón es 3. Hallar el primer término.

CD-III-2.41
La suma de los ocho primeros términos de una sucesión geométrica es 65 535 y la razón es 4. Determinar el primer término.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Respuestas

En seguida aparecen las operaciones y las soluciones de los problemas enunciados al principio de la unidad.

¿Qué sabes?

2.1
Encontrar los tres primeros términos y el décimo de $a_n = \frac{n^2}{5^n}$.

$$a_1 = \frac{1^2}{5^1} = \frac{1}{5},\ a_2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25},\ a_3 = \frac{3^2}{5^3} = \frac{9}{125},\ \ldots$$

$$a_{10} = \frac{10^2}{5^{10}} = \frac{100}{9\ 765\ 625}$$

R. $a_1 = \frac{1}{5},\ a_2 = \frac{4}{25},\ a_3 = \frac{9}{125},\ \ldots$

$$a_{10} = \frac{100}{9\ 765\ 625}$$

2.2
Obtener la suma de los tres primeros términos de la progresión $a_n = 5n - 6$

$$a_1 = 5(1) - 6 = 5 - 6 = -1$$
$$a_2 = 5(2) - 6 = 10 - 6 = 4$$
$$a_3 = 5(3) - 6 = 15 - 6 = 9$$
$$S_3 = -1 + 4 + 9 = 12$$

R. $S_3 = 12$

2.3
Determinar los tres primeros términos de la sucesión aritmética $a_n = 5n + 6$.

$$a_1 = 5(1) + 6 = 5 + 6 = 11$$
$$a_2 = 5(2) + 6 = 10 + 6 = 16$$
$$a_3 = 5(3) + 6 = 15 + 6 = 21$$

R. $a_1 = 11$, $a_2 = 16$, $a_3 = 21$

2.4
Encontrar el último término de la sucesión aritmética si $a_1 = 6$, $n = 9$ y $d = 3$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n = 6 + (9-1)(3)$$
$$a_n = 6 + (8 \times 3)$$
$$a_n = 6 + 24$$
$$a_n = 30$$

R. $a_n = 30$

2.5
Determinar la suma de los primeros 14 términos de la sucesión aritmética 25, 31, 37, …

Primer paso:
$$d = a_1 - a_{n-1}$$
$$d = 31 - 25$$
$$d = 6$$

Segundo paso:
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{14} = 25 + (14-1)(6)$$
$$a_{14} = 25 + (13 \times 6)$$
$$a_{14} = 25 + 78$$
$$a_{14} = 103$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tercer paso:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{14}{2}(25 + 103)$$

$$S_n = \frac{14}{2}(128)$$

$$S_n = \frac{1792}{2}$$

$$S_n = 896$$

R. $S_n = 896$

2.6
Encontrar el noveno término de la sucesión geométrica 9, 45, 225,….

Primero se calcula la razón:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{45}{9} = 5$$

Segundo paso:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_9 = 9\left(5^{9-1}\right)$$

$$a_9 = 9\left(5^8\right)$$

$$a_9 = 9(390\ 625)$$

$$a_9 = 3\ 515\ 625$$

R. $a_9 = 3\ 515\ 625$

2.7
Determinar el valor del sexto término de la progresión geométrica 2.5, $(2.5)^4$, …

Primer paso:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{(2.5)^4}{2.5} = (2.5)^3$$

Segundo paso:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_6 = 2.5\left[\left(2.5^3\right)\right]^{6-1}$$

$$a_6 = 2.5\left[\left(2.5^3\right)\right]^5$$

$$a_6 = 2.5(2.5)^{15}$$

$$a_6 = 2\ 328\ 306.44$$

R. $a_6 = 2\ 328\ 306.44$

2.8
Calcular la suma de los 10 primeros términos de la sucesión geométrica 9, 45, 225, ...

Primer paso:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{45}{9} = 5$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Segundo paso:

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

$$S_{10} = \frac{9\left(1-5^{10}\right)}{1-5}$$

$$S_{10} = \frac{9\left(1-9\ 765\ 625\right)}{-4}$$

$$S_{10} = \frac{9\left(1-9\ 765\ 624\right)}{-4}$$

$$S_{10} = \frac{-87\ 890\ 616}{-4}$$

$$S_{10} = 21\ 972\ 654$$

R. $S_{10} = 21\ 972\ 654$

2.9

Hallar el decimosexto término y la suma de los 17 primeros términos, si la razón es 2 y el primer término es 18.

Primer paso:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_{16} = 18\left[(2)\right]^{16-1}$$

$$a_{16} = 18(2)^{15}$$

$$a_{16} = 18(32\ 768)$$

$$a_{16} = 589\ 824$$

Segundo paso:

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

$$S_{17} = \frac{18\left(1-2^{17}\right)}{1-2}$$

$$S_{17} = \frac{18\left(1-131\,072\right)}{-4}$$

$$S_{17} = \frac{18\left(131\,071\right)}{-4}$$

$$S_{17} = 2\ 359\ 278$$

R. $S_{17} = 2\ 359\ 278$

Problemas a resolver

CD2.1

a) Encontrar los primeros tres términos de la siguiente progresión: $a_n = 2n + 3$

$$a_1 = 2(1) + 3 = 5$$

$$a_2 = 2(2) + 3 = 7$$

$$a_3 = 2(3) + 3 = 9$$

R. $5, 7, 9, \ldots$

b) Escribir los primeros tres términos y el vigesimoprimero de la progresión definida por:

$$a_n = \frac{n-2}{n}$$

$$a_1 = \frac{1-2}{1} = -1$$

$$a_2 = \frac{2-2}{2} = 0$$

$$a_3 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$a_{21} = \frac{21-2}{21} = \frac{19}{21}$$

R. $-1,\ 0,\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{19}{21}$

c) Hallar los primeros tres términos de la progresión dada por: $a_n = n^2 + 2n$

$$a_1 = 1 + 2(1) = 3$$

$$a_2 = 4 + 2(2) = 8$$

$$a_3 = 9 + 2(3) = 15$$

R. $3, 8, 15, \ldots$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

d) Encontrar los primeros cinco términos de la siguiente progresión: $a_n = 2n + n^3$

$a_1 = 2(1) + 1^3 = 3$
$a_2 = 2(2) + 2^3 = 12$
$a_3 = 2(3) + 3^3 = 33$
$a_4 = 2(4) + 4^3 = 72$
$a_5 = 2(5) + 5^3 = 135$

R. $3, 12, 33, 72, 135, \ldots$

CD2.2

a) Escribir los primeros tres términos y el vigesimoprimero de la progresión definida por:

$$a_n = \frac{2n-2}{n+1}$$

$$a_1 = \frac{2(1)-2}{1+1} = 0$$
$$a_2 = \frac{2(2)-2}{2+1} = \frac{2}{3}$$
$$a_3 = \frac{2(3)-2}{3+1} = \frac{4}{4} = 1$$
$$a_4 = \frac{2(4)-2}{4+1} = \frac{6}{5}$$
$$a_5 = \frac{2(5)-2}{5+1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

R. $0, \frac{2}{3}, 1, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, \ldots$

b) Hallar los primeros tres términos de la progresión dada por: $a_n = 10n^2 - 3n$

$a_1 = 10(1) - 3(1) = 7$
$a_2 = 10(2)^2 - 3(2) = 34$
$a_3 = 10(3)^2 - 3(3) = 81$
$a_4 = 10(4)^2 - 3(4) = 148$
$a_5 = 10(5)^2 - 3(5) = 235$

R. $7, 34, 81, 148, 235, \ldots$

c) Escribir el número cien de la progresión:

$$a_n = \frac{2n}{n-20}$$

$$a_{100} = \frac{2(100)}{100-20}$$
$$a_{100} = \frac{200}{80} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$
$$a_{100} = 2.5$$

R. 2.5

CD2.3

a) Encontrar los primeros dos términos de la progresión dada por: $a_n = 2\log n^2$

$a_1 = 2\log(1)^2 = 0$
$a_2 = 2\log(2)^2 = 4\log(2) = 4 \times 0.301029995 = 1.204119$

R. $0, 1.204119, \ldots$

b) Sustituir cada uno de los valores de x en las expresiones y encontrar sus resultados.

$y = 4x + 3$, si x toma valores $1, 2, 3$.

Si $x = 1 \quad \therefore y = 4x + 3 = 4 + 3 = 7$
Si $x = 2 \quad \therefore y = 4x + 3 = 8 + 3 = 11$
Si $x = 3 \quad \therefore y = 4x + 3 = 12 + 3 = 15$
R. $7, 11, 15$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

c) Sustituir cada uno de los valores de x en las expresiones y encontrar sus resultados.

$m = \dfrac{x-1}{x+1}$, si x toma valores 1, 2, 3, 4.

Si $x = 1 \quad \therefore m = \dfrac{1-1}{1+1} = \dfrac{0}{2} = 0$

Si $x = 2 \quad \therefore m = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$

Si $x = 3 \quad \therefore m = \dfrac{3-1}{3+1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Si $x = 4 \quad \therefore m = \dfrac{4-1}{4+1} = \dfrac{3}{5}$

R. $0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}$

CD2.4

a) Encontrar los cuatro primeros términos de la sucesión aritmética: $a_n = 4n + 3$

$a_n = 4n + 3$

$a_1 = 4(1) + 3 = 7$

$a_2 = 4(2) + 3 = 11$

$a_3 = 4(3) + 3 = 15$

$a_4 = 4(4) + 3 = 19$

R. 7, 11, 15, 19

b) Hallar los cinco primeros términos de la sucesión aritmética: $a_n = 4n^2 + 3n$

$a_n = 4n^2 + 3n$

$a_1 = 4(1)^2 + 3(1) = 4 + 3 = 7$

$a_2 = 4(2)^2 + 3(2) = 16 + 6 = 22$

$a_3 = 4(3)^2 + 3(3) = 36 + 9 = 45$

$a_4 = 4(4)^2 + 3(4) = 64 + 12 = 76$

$a_5 = 4(5)^2 + 3(5) = 100 + 15 = 115$

R. 7, 22, 45, 76, 115

CD2.5

a) Calcular la suma de cuatro primeros términos de la sucesión: $a_n = 3 \times (-1)^{n+1}$

$a_n = 3 \times (-1)^{n+1}$

$a_1 = 3 \times (-1)^{1+1} = 3$

$a_2 = 9 \times (-1)^{2+1} = -9$

$a_3 = 27 \times (-1)^{3+1} = 27$

$a_4 = 81 \times (-1)^{4+1} = -81$

$S_4 = -60$

R. $S_4 = -60$

b) Hallar la suma de los dos primeros términos de la sucesión: $a_n = \dfrac{25}{30 - n^2}$

$a_n = \dfrac{25}{30 - n^2}$

$a_1 = \dfrac{25}{30 - 1^2} = \dfrac{25}{30 - 1} = \dfrac{25}{29}$

$a_2 = \dfrac{25}{30 - 2^2} = \dfrac{25}{30 - 4} = \dfrac{25}{26}$

$S_2 = \dfrac{1375}{754} = 1.824$

R. $S_2 = 1.824$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

c) Calcular la suma de los tres primeros términos de la sucesión: $a_n = 5 - n^2 + 3n$

$a_n = 5 - n^2 + 3n$

$a_1 = 5 - 1^2 + 3(1) = 5 - (1) + 3 = 7$

$a_2 = 5 - 2^2 + 3(2) = 5 - (4) + 6 = 7$

$a_3 = 5 - 3^2 + 3(3) = 5 - (9) + 9 = 5$

$S_3 = 7 + 7 + 5 = 19$

R. $S_3 = 19$

CD2.6
Encontrar la suma de los tres primeros términos de las siguientes progresiones:

a) $a_n = 2.5 \times (2)^{n+1}$

$a_1 = 2.5 \times (2)^{1+1} = 10$

$a_2 = 2.5 \times (2)^{2+1} = 20$

$a_3 = 2.5 \times (2)^{3+1} = 40$

$S_3 = 10 + 20 + 40 = 70$

R. $S_3 = 70$

b) $a_n = (-5)^{n-1}$

$a_1 = (-5)^{1-1} = 1$

$a_2 = (-5)^{2-1} = -5$

$a_3 = (-5)^{3-1} = 25$

$S_3 = 1 - 5 + 25 = 21$

R. $S_3 = 21$

c) $a_n = \dfrac{1}{n}$

$a_1 = \dfrac{1}{1} = 1$

$a_2 = \dfrac{1}{2}$

$a_3 = \dfrac{1}{3}$

$S_3 = \dfrac{11}{6} = 1.83$

R. $S_3 = 1.83$

d) $a_1 = 8 \qquad a_n = 4a_{n-1} - 10$

El primer término es $a_1 = 8$

El segundo término

$a_2 = 4a_{2-1} - 10 = 4a_1 - 10 = (4 \times 8) - 10 = 22$

El tercer término

$a_3 = 4a_{3-1} - 10 = 4a_2 - 10 = (4 \times 22) - 10 = 78$

R. $a_1 = 8$, $a_2 = 22$, $a_3 = 78$

Progresiones aritméticas

CD2.7
Encontrar los valores que faltan en las sucesiones:

a) 5, __, 11, 14, __, 20, 23,…
R. 5, **8**, 11, 14, **17**, 20, 23,..

b) 3, __, 12, 24, __, 96, 192,…
R. 3, **6**, 12, 24, **48**, 96, 192,…

c) 15,21, __, 33, 39, 45, __, 57, 63,…
R. 15,21, **27**, 33, 39, 45,**51**, 57, 63,…

d) 33, 42, 51, __, 69, __, 87, 96, 105,…
R. 33, 42, 51,**60**, 69, **78**, 87, 96, 105,…

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD2.8
Hallar la diferencia común de las siguientes series aritméticas:

a) 7, 9, 11, …
R. 2

b) 28, 24, 20, 16, 12, …
R. –4

c) 155, 170, 185, …
R. 15

d) 8, 11, 14, 17, …
R. 3

CD2.9
Encontrar la diferencia común de las siguientes series aritméticas

a) 10, 16, 22, 28, 34,…
R. 6

b) 50, 45, 40, 35, 30, …
R. –5

c) 42, 50, 58, 66, 74,…
R. 8

d) 45, 38, 31, 24, 17, …
R. –7

CD2.10
a) Encontrar la diferencia común en una serie, si el primer término es 9 y el decimosegundo es 42:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$d = \dfrac{a_n - a_1}{n-1}$

$d = \dfrac{42-9}{12-1}$

$d = \dfrac{33}{11}$

$d = 3$

R. $d = 3$

b) Hallar el trigesimoquinto término de la serie aritmética 18, 23, 28, 33, 38, 43,….

Primer paso:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$d = 23 - 28 = 5$

Segundo paso, se sustituye: $a_1 = 18$, $d = 5$ y $n = 35$

$a_{35} = 18 + (35-1)5$

$a_{35} = 18 + (34)5$

$a_{35} = 18 + 170$

$a_{35} = 188$

R. $a_{35} = 188$

c) Encontrar el primer término de una progresión aritmética en la que el decimosegundo término es 81 y su diferencia común es 5.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Se despeja de la fórmula a_1

$a_1 = a_n - (n-1)d$

Al sustituir: $a_{12} = 81$, $n = 12$, y $d = 5$

$a_1 = 81 - (12-1)5$

$a_1 = 81 - (13)5$

$a_1 = 81 - 65$

$a_1 = 26$

R. $a_1 = 26$

d) Hallar la diferencia común de una progresión aritmética si el primer término es 0 y el vigesimoprimero es 200.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$d = \dfrac{a_n - a_1}{n-1}$

$d = \dfrac{200-0}{21-1}$

$d = \dfrac{200}{20}$

$d = 10$

R. $d = 10$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD2.11

a) Encontrar el decimocuarto término de una progresión aritmética si el primer término es –3 y la diferencia común es de 18.

Primer paso, se sustituye: $a_1 = -3$, $d = 18$ y $n = 14$

$$a_{14} = -3 + (14 - 1)18$$
$$a_{14} = -3 + (13)18$$
$$a_{14} = -3 + 234$$
$$a_{14} = 231$$

R. $a_{14} = 231$

b) Obtener el valor de x en la progresión aritmética $-3, x, 5$.

$$2d = a_3 - a_1$$
$$2d = 15 - (-3)$$
$$d = \frac{18}{2}$$
$$d = 9$$
$$x = -3 + 9 = 6$$

Si $x = a_2 \quad \therefore \quad a_2 = 6$

R. $a_2 = 6$

c) Encontrar el vigésimo término de la serie aritmética –4, 16,….

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Primer paso:

$$d = \frac{16 - (-4)}{2 - 1} = 20$$

Segundo paso, se sustituye:
$a_1 = -4$, $d = 20$ y $n = 20$

$$a_{20} = -4 + (20 - 1)20$$
$$a_{20} = -4 + (19)20$$
$$a_{20} = -4 + 380$$
$$a_{20} = 376$$

R. $a_{20} = 376$

d) La diferencia entre los términos décimo y vigesimosegundo en la progresión aritmética es de 120, el cuarto término es –2. Encontrar los cuatro primeros términos.

Del décimo al vigesimosegundo término, se tiene que recorrer 12 términos y la diferencia común es 12 veces, que es igual a 120. Esto se puede expresar como:

$$12d = 120$$
$$d = \frac{120}{12}$$
$$d = 10$$

Como se desea conocer los tres primeros términos, el cuarto término es $a_4 = -2$.

Al despejar a_1

$$-2 = a_1 + (4 - 1)20$$
$$a_1 = -2 - 3(10)$$
$$a_1 = -32$$

$$a_2 = -32 + (2 - 1)(10) = -22$$
$$a_3 = -22 + (3 - 1)(10) = -12$$
$$a_4 = -12 + (4 - 1)(10) = -2$$

R. $a_1 = -32$, $a_2 = -22$, $a_3 = -12$, $a_4 = -2$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD2.12

a) Encontrar el último término de una sucesión aritmética si $a_1 = 4$, $n = 8$ y $d = 4$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_8 = 4 + (8-1)(4)$$
$$a_8 = 4 + (7)(4)$$
$$a_8 = 4 + 28$$
$$a_8 = 32$$

R. $a_8 = 32$

b) Hallar el último término de una sucesión aritmética si $a_1 = 7$, $n = 18$ y $d = 3$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{18} = 7 + (18-1)(3)$$
$$a_{18} = 7 + (17)(3)$$
$$a_{18} = 7 + 51$$
$$a_{18} = 58$$

R. $a_{18} = 58$

CD2.13

a) ¿De cuántos términos estará formada la sucesión $3, 6, 9, \ldots, 51$?

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$
$$n = \frac{51-3}{3} + 1$$
$$n = \frac{48}{3} + 1$$
$$n = 16 + 1$$
$$n = 17$$

R. $n = 17$

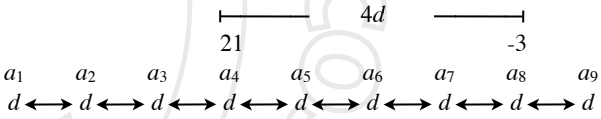
b) Se desea conocer el número de términos de la sucesión aritmética $19, 30, 41, \ldots, 388$, cuya diferencia común es 11.

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$
$$n = \frac{338-19}{11} + 1$$
$$n = \frac{319}{11} + 1$$
$$n = 29 + 1$$
$$n = 30$$

R. $n = 30$

CD2.14

¿Cuáles son los tres primeros términos y el noveno de una progresión aritmética si el cuarto término es 21y el octavo es –3?



Encontrar la razón:

$$a_8 = a_4 + 4d$$
$$-3 = 21 + 4d$$
$$-24 = 4d$$
$$d = -6$$

Los tres primeros términos se obtienen restando sucesivamente la diferencia:

$$a_3 = a_4 - d = 21 - (-6) = 27$$
$$a_2 = a_3 - d = 27 - (-6) = 33$$
$$a_1 = a_2 - d = 33 - (-6) = 39$$
$$\vdots$$
$$a_9 = a - d = -3 - (-6) = -9$$

R. $a_1 = 39$, $a_2 = 33$, $a_3 = 27$, $a_9 = -9$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD2.15
Encontrar la suma de los primeros 20 términos de la sucesión aritmética 19, 26, 33, …

Primer paso, se encuentra la diferencia común:
$d = 26 - 19 = 7$

Segundo paso, se halla el término 20:
$a_{20} = 19 + (20 - 1)(7)$
$a_{20} = 19 + (19)(7)$
$a_{20} = 19 + 133$
$a_{20} = 152$

Tercero, se encuentra la suma:
$$S_{20} = \left(\frac{20}{2}\right)(19 + 152)$$
$S_{20} = 10\,(171)$
$S_{20} = 1\,710$

R. $S_{20} = 1\,710$

CD2.16
Encontrar la suma de $10 + 15 + 20 + \cdots + 140$.

Primer paso, se halla la diferencia común:
$d = 15 - 10 = 5$

Segundo paso, se encuentra el número de términos:
$$n = \frac{a_n - a_1}{d}$$
$$n = \frac{140 - 10}{5}$$
$$n = \frac{130}{5} = 26$$

Tercer paso, se calcula la suma:
$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)(a_1 + a_n)$$
$$S_{152} = \left(\frac{26}{2}\right)(10 + 140)$$
$S_{152} = 13\,(150)$
$S_{152} = 1\,950$

R. $S_{152} = 1\,950$

CD2.17
Encontrar la suma de los términos desde el decimoquinto al vigesimoctavo de la progresión aritmética 8, 12, …

Primer paso, se halla la diferencia común:
$d = 8 - 12 = 4$
Segundo paso, se encuentra la suma de los 28 términos:
$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)[2a_1 + (n-1)d]$$
$$S_{28} = \left(\frac{28}{2}\right)[2(8) + (28-1)(4)]$$
$S_{28} = (14)[16 + (27)(4)]$
$S_{28} = (14)(124)$
$S_{28} = 1736$
Tercer paso, se halla la suma de los 14 primeros términos:
$$S_{14} = \left(\frac{14}{2}\right)[2((8)) + (14-1)(4)]$$
$S_{14} = (7)[16 + (13)(4)]$
$S_{14} = (7)(68)$
$S_{14} = 476$
Cuarto paso:
$S_{14-28} = S_{28} - S_{14} = 1736 - 476 = 1\,260$

R. $S_{14-28} = 1\,260$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD2.18
Determinar el decimosexto y la suma de los primeros dieciséis términos de la progresión aritmética 5, 12, 19, 26, …

Primer paso, se encuentra la diferencia común:
$d = 12 - 5 = 7$
Segundo paso, se determina el número de términos:
$a_{16} = 5 + (16 - 1)(7)$
$a_{16} = 5 + (15)(7)$
$a_{16} = 5 + 105$
$a_{16} = 120$
Tercer paso, se halla la suma:

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)(a_1 + a_n)$$

$$S_{16} = \left(\frac{16}{2}\right)(5 + 110)$$

$$S_{16} = (8)(115)$$

$$S_{16} = 920$$

R. $S_{16} = 920$

CD2.19
Encontrar el primer término de una sucesión aritmética cuya suma de 25 términos es 3200, si el último término es 224.

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)(a_1 + a_n)$$

Despejando a_1

$$\frac{2S_n}{n} = a_1 + a_n$$

$$a_1 = \left(\frac{2S_n}{n}\right) - a_n$$

$$a_1 = \left(\frac{(2)(3\,200)}{25}\right) - 224$$

$$a_1 = 256 - 224$$

$$a_1 = 32$$

R. $a_1 = 32$

CD2.20
Encontrar el número de términos de una progresión aritmética y la diferencia común, si el primer término es 6, el último 106 y su suma es 616.

Primer paso, se encuentra el número de términos:

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)(a_1 + a_n)$$

$$616 = \frac{n}{2}(6 + 106)$$

$$n = \frac{616(2)}{112} = \frac{1\,232}{112}$$

$$n = 11$$

Segundo paso, se sustituye el total de términos y se despeja la diferencia común:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_n - a_1 = (n - 1)d$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

$$d = \frac{106 - 6}{11 - 1}$$

$$d = \frac{100}{10}$$

$$d = 10$$

R. $d = 10$

Recursos académicos en línea © DeP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Progresiones geométricas

CD2.21

a) Encontrar el noveno término de la sucesión geométrica: 12, 48, 192,….

Primero se calcula la razón:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{48}{12} = 4$$

Después se encuentra el noveno término:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

$$a_9 = 12(4)^{9-1}$$

$$a_9 = 12(4)^8$$

$$a_9 = 12(65\,536)$$

$$a_9 = 786\,432$$

R. $a_9 = 786\,432$

b) Encontrar el decimosegundo término de la sucesión geométrica: 7, 14,….

Primero se calcula la razón:

$$r = \frac{14}{7} = 2$$

Después se determina el decimosegundo término:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

$$a_{12} = 7(2)^{12-1}$$

$$a_{12} = 7(2)^{11}$$

$$a_{12} = 7(2\,048)$$

$$a_{12} = 14\,336$$

R. $a_{12} = 14\,336$

c) Encontrar el quinto y el décimo término de la progresión geométrica 3, –1,….

$$r = \frac{-1}{3}$$

Después se determina el quinto término:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

$$a_5 = 3(-1/3)^{5-1}$$

$$a_5 = 3(-1/3)^4$$

$$a_5 = 3(1/84)$$

$$a_5 = \frac{3}{84}$$

$$a_5 = 0.035714285$$

Por último se encuentra el décimo término:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

$$a_{10} = 3(-1/3)^{10-1}$$

$$a_{10} = 3(-1/3)^9$$

$$a_{10} = 3(-1/19\,683)$$

$$a_{10} = \frac{-3}{19\,684}$$

$$a_{10} = -0.0001540471$$

R. $a_5 = 0.035714285$ y $a_{10} = -0.0001540471$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

d) Encontrar el noveno término de la progresión geométrica: $(4.5)^{-1}, (4.5)^{-2}, (4.5)^{-3}, \ldots$

Primero se calcula la razón:

$$r = \frac{(4.15)^{-2}}{(4.15)^{-1}} = (4.15)^{-1}$$

Después se halla el octavo término:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$
$$a_8 = (4.15)^{-1}\left[(4.15)^{-1}\right]^{9-1}$$
$$a_8 = (4.15)^{-1}\left[(4.15)^{-1}\right]^{8}$$
$$a_8 = (4.15)^{-1}(4.15)^{-8}$$
$$a_8 = (4.15)^{-9}$$
$$a_8 = 0.000002738$$

R. $a_8 = 0.000002738$

CD2.22

a) Encontrar el valor del sexto término de la progresión geométrica: $9, 45, 225, \ldots$.

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$
$$a_6 = 9\left(5^{6-1}\right)$$
$$a_6 = 9\left(5^{5}\right)$$
$$a_6 = 9(3125)$$
$$a_6 = 28\,125$$

R. $a_6 = 28\,125$

b) Encontrar el valor del sexto término de la progresión geométrica $1.5, (1.5)^4, \ldots$

Primer paso, se calcula la razón:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$
$$r = \frac{(1.5)^4}{1.5}$$
$$r = (1.5)^3$$

Después se encuentra el sexto término:

$$a_n = a_1\left(r^{n-1}\right)$$
$$a_6 = 1.5\left[(1.5)^3\right]^{6-1}$$
$$a_6 = 1.5\left[(1.5)^3\right]^{5}$$
$$a_6 = 1.5(1.5)^{15}$$
$$a_6 = 1.5(437.89389)$$
$$a_6 = 6568.41$$

R. $a_6 = 6568.41$

c) Encontrar el valor del sexto término de la progresión geométrica $7, 21, 63, \ldots$

Primer paso, se calcula la razón:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$
$$r = \frac{21}{7}$$
$$r = 3$$

Después se determina el sexto término:

$$a_n = a_1\left(r^{n-1}\right)$$
$$a_6 = 7(3)^{10-1}$$
$$a_6 = 7\,(3)^{9}$$
$$a_6 = 7(19683)$$
$$a_6 = 137\,781$$

R. $a_6 = 137\,781$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

d) Determinar los tres primeros términos, si $a_1 = 7$ y $r = 3$

$$a_n = a_1\left(r^{n-1}\right)$$
$$a_1 = 7$$

$$a_2 = 7\left(3\right)^{2-1}$$
$$a_2 = 7\left(3\right)^{1}$$
$$a_2 = 21$$

$$a_3 = 7\left(3\right)^{3-1}$$
$$a_3 = 7\left(3\right)^{2}$$
$$a_3 = 7\left(9\right)$$
$$a_3 = 63$$

R. $a_1 = 7$, $a_2 = 21$, $a_3 = 63$

CD2.23

a) Encontrar el número de términos de la progresión geométrica, si se sabe que $a_1 = 12$, $r = 3/4$, $a_n = 3/8$

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$
$$n = \frac{\log 3/8 - \log 12}{\log 3/4} + 1$$
$$n = \frac{\log 0.375 - \log 12}{\log 0.75} + 1$$
$$n = \frac{-0.425968 - 1.079181}{-0.124938} + 1$$
$$n = \frac{-1.505149}{-0.124938} + 1$$
$$n = 12.05 + 1$$
$$n = 13$$

R. $n = 13$

b) Hallar el número de términos de la progresión geométrica: 17, 34, 68, …, 34816.

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

$$n = \frac{\log(34816) - \log(17)}{\log 2} + 1$$
$$n = \frac{4.541778874 - 1.230448921}{0.301029995} + 1$$
$$n = \frac{3.311329952}{0.301029995} + 1$$
$$n = 11 + 1$$
$$n = 12$$

R. $n = 12$

c) Determinar el número de términos de la progresión geométrica, si se sabe que $a_1 = 8$, $a_n = 17496$ y $r = 3$.

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

$$n = \frac{\log(17496) - \log(8)}{\log 3} + 1$$
$$n = \frac{4.242938 - 0.903089}{0.477121} + 1$$
$$n = \frac{3.339848}{0.477121} + 1$$
$$n = 7 + 1$$
$$n = 8$$

R. $n = 8$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

d) Encontrar el número de términos de la progresión geométrica, si se sabe que 5, 5/2, 5/4, … , 5/64

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

$$n = \frac{\log(5/64) - \log(5)}{\log 1/2} + 1$$

$$n = \frac{\log 0.078125 - \log 5}{\log 0.5} + 1$$

$$n = \frac{-1.107209 - 0.69897}{-0.3010299} + 1$$

$$n = \frac{-1.806179}{-0.3010299} + 1$$

$$n = 6 + 1$$

$$n = 7$$

R. $n = 7$

CD2.24

El décimo y vigésimo término de una progresión geométrica son: $a_{10} = 1/128$ y $a_{26} = 512$. Encontrar los primeros cuatro términos.

Solución:

Como el término a_{26} es igual al décimo (a_{10}) multiplicado 16 veces (26 –10 = 16) entonces:

$a_{26} = a_{10} r^{16}$

Al sustituir el valor de los términos:

$$512 = \frac{1}{128} r^{16}$$

Al despejar la razón:

$$r^{16} = (512)(128)$$

$$r^{16} = 65536$$

$$r = 2$$

De la expresión $a_n = a_1 r^{n-1}$ se despeja a_1

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$a_1 = \frac{a_{10}}{r^{10-1}}$$

$$a_1 = \frac{1/128}{r^9}$$

$$a_1 = \frac{1/128}{2^9}$$

$$a_1 = \frac{1}{(2^9)(2^7)}$$

$$a_1 = \frac{1}{2^{16}}$$

R. $a_1 = \frac{1}{2^{16}}$

CD2.25

a) Encontrar el décimo término y la suma de los 12 primeros términos. La razón es 3 y el primer término es 7.

$$a_n = a_1 \left(r^{n-1}\right)$$

$$a_{10} = 7\left(3^{10-1}\right)$$

$$a_{10} = 7\left(3^9\right)$$

$$a_{10} = 7(19\,683)$$

$$a_{10} = 137\,781$$

R. $a_{10} = 137\,781$

b) Determinar la suma de los 15 primeros términos de la progresión geométrica, si el tercero y el quinto son 12 y 48.

Solución:

$$a_n = a_1 \left(r^{n-1}\right)$$

$a_3 = 12$ o $a_3 = a_1 r^2 = 12$

$a_5 = 48$ o $a_5 = a_1 r^4 = 48$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Para llegar del decimotercero al quinto se multiplica tres veces por la razón.

$$a_5 = a_3 rr$$
$$48 = 12r^2$$
$$r^2 = \frac{48}{12}$$
$$r^2 = 4$$
$$r = 2$$

Se calcula el valor del primer término:

$$a_n = a_1\left(r^{n-1}\right)$$

Al sustituir valores:

$$12 = a_1 2^{3-1}$$
$$12 = a_1 2^2$$
$$12 = a_1(4)$$
$$a_1 = \frac{12}{4}$$
$$a_1 = 3$$

Se encuentra la suma de los 15 primeros términos:

$$S_{15} = \frac{3\left(1-2^{15}\right)}{1-2}$$
$$S_{15} = \frac{3(1-32768)}{-1}$$
$$S_{15} = \frac{3(-32767)}{-1}$$
$$S_{15} = \frac{-98301}{-1}$$
$$S_{15} = 98301$$

R. $S_{15} = 98301$

c) Encontrar el décimo término y la suma de los 16 primeros términos. La razón es 3 y el primer término es 7.

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$
$$S_{16} = \frac{7\left(1-3^{12}\right)}{1-3}$$
$$S_{16} = \frac{7\left(1-531\,441\right)}{-2}$$
$$S_{16} = \frac{-3\,720\,080}{-2}$$
$$S_{16} = 1\,868\,040$$

R. $S_{16} = 1\,868\,040$

Aplicaciones

CD2.26

La señora Josefina pide prestados 2 500 pesos y acepta pagar 100 pesos al final de cada mes y el 12% anual de interés sobre el saldo. Calcular la suma de todo el interés pagado.

Datos:

Tasa de interés: 12% anual o 0.01 mensual.

Total de pagos mensuales $= \frac{2\,500}{100} = 25$

Pago	1	2	3	…	25
Saldo	2 500.00	2 400.00	2 300.00	…	100.00
Interés	25.00	24.00	23.00	…	1.00

$$S_{25} = \frac{25}{2}(25 + 0.01)$$
$$S_{25} = \frac{625.25}{2}$$
$$S_{25} = 312.62 \text{ pesos}$$

R. $S_{25} = 312.62$ pesos

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD2.27
Un activo cuesta 20 000 pesos y la depreciación por año se estima en 50%. ¿Cuál es el valor del activo después de cinco años?

Datos:
$a_1 = \$20000$, $r = 0.5$ y $n = 5$ años

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$a_5 = 20000\left(0.5^{5-1}\right)$$
$$a_5 = 20000\left(0.5^{4}\right)$$
$$a_5 = 20000(0.0625)$$
$$a_5 = \$1250$$

R. $a_5 = \$1250$

CD2.28
El bufete de abogados AK compró una aspiradora industrial que les costó 8 500 pesos. La Secretaría de Hacienda solo les reconoce una depreciación por año del 75% de valor al principio de cada año. Calcular el valor de la aspiradora después de 10 años.

Datos:
$a_1 = \$8500$, $r = 0.75$ y $n = 10$ años

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$a_5 = 8500\left(0.75^{10-1}\right)$$
$$a_5 = 8500\left(0.75^{9}\right)$$
$$a_5 = 8500(0.0100777)$$
$$a_5 = \$638.22$$

R. $a_5 = \$638.22$

Problemas complementarios
Parte I

CD-I-2.1
Encontrar la diferencia común de las siguientes sucesiones:

a) 4 430, 4 680, 4 930

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$
$$d = \frac{4930 - 4430}{3-1}$$
$$d = \frac{500}{2} = 250$$

R. $d = 250$

b) 70, 110, 150

Solución:
$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$
$$d = \frac{150 - 70}{3-1}$$
$$d = \frac{80}{2} = 40$$

R. $d = 40$

CD-I-2.2
Despejar d de la siguiente expresión:
$$y = a + (b-1)d$$
$$a = y - (b-1)d$$
$$d = \frac{y-a}{b-1}$$

R. $d = \frac{y-a}{b-1}$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-I-2.3
Encontrar la suma de los primeros tres números de las siguientes series:

a) 19, 30, 41, 42, 53

Primer paso, se encuentra la diferencia común:
$d = 3 - 19 = 11$

Segundo paso, se determina el tercer término:
$a_3 = 41$

Tercer paso, se calcula la suma:

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)\left(a_1 + a_n\right)$$

$$S_3 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(19 + 41\right)$$

$$S_3 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(60\right)$$

$$S_3 = \left(\frac{180}{2}\right) = 90$$

R. $S_3 = 90$

b) 2, 6, 18, 54, …

Solución:

Primer paso:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{6}{2} = 3$$

Segundo paso:

$$S_n = \frac{a_1\left(1 - r^n\right)}{1 - r}$$

$$S_3 = \frac{2\left(1 - 3^3\right)}{1 - 3}$$

$$S_3 = \frac{2\left(1 - 27\right)}{-2}$$

$$S_3 = \frac{2\left(-26\right)}{-2}$$

$$S_3 = \frac{-52}{-2} = 26$$

R. $S_3 = 26$

CD-I-2.4
Encontrar la razón común de las siguientes sucesiones:
a) 12, 48, 192

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{48}{12} = 4$$

R. $r = 4$

b) 7, 28, 112

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{28}{7} = 4$$

R. $r = 4$

recursos académicos en línea Grupo Editorial Patria

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte II

CD-II-2.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) a_3 representa el decimotercer término de una sucesión — FALSE

b) El subíndice n indica el término de una sucesión. — FALSE

c) El sexto término de la sucesión aritmética 3, 7, 11,.... es 25 — FALSE

d) Los términos de una sucesión se denotan con a_n — TRUE

e) La expresión $a_n = a_1 + (n-1)d$ es una sucesión aritmética. — TRUE

f) La razón común de una sucesión geométrica se denota con d. — FALSE

g) La expresión $a_n = a_1(1 + r^{n-1})$ es una sucesión aritmética. — FALSE

CD-II-2.2
Explicar el concepto de sucesión.

R. Es un conjunto ordenado de números reales construidos a partir de una regla.

CD-II-2.3
¿Qué se entiende por sucesión aritmética?

R. Es una progresión que se forma sumando al primer término una cantidad constante conocida como diferencia común para obtener el segundo término y así sucesivamente.

CD-II-2.4
¿Qué es una sucesión geométrica?

R. Es una progresión que se forma al multiplicar el término anterior por una cantidad constante llamada factor común.

CD-II-2.5
Explicar el concepto de serie.

R. Es la suma de los términos de una sucesión y se simboliza con .

CD-II-2.6
¿Las siguientes sucesiones son geométricas?

a) 3, 6, 12, 36, 108 — No
b) 18, 21, 25, 30 — No

CD-II-2.7
¿Las siguientes sucesiones son geométricas?

a) 9, 13, 17, 21, 25 — No
b) 1, 5, 25, 125 — Sí

CD-II-2.8
Encontrar la suma de 10 + 15 + 20 + … + 130.

Primer paso:

$$d = a_n - a_1$$
$$d = 15 - 10 = 5$$

Segundo paso:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$
$$n = \frac{130 - 10}{5} + 1$$
$$n = \frac{120}{5} + 1$$
$$n = 24 + 1$$
$$n = 25$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tercer paso:

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)(a_1 + a_n)$$

$$S_{25} = \frac{25(10+130)}{2}$$

$$S_{25} = \frac{25(140)}{2}$$

$$S_{25} = 25(70)$$

$$S_{25} = 1750$$

R. $S_{25} = 1750$

CD-II-2.9

El primer término de una sucesión aritmética es 20 y el último término es 74; la suma de términos es 470. Encontrar la diferencia común.

Primer paso:

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)(a_1 + a_n)$$

$$\frac{S_n}{a_1 + a_n} = \frac{n}{2}$$

$$n = \frac{2S_n}{a_1 + a_n}$$

$$n = \frac{2(470)}{20 + 74}$$

$$n = \frac{940}{94} = 10 \text{ términos}$$

Segundo paso:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n} + 1$$

$$d = \frac{74 - 20}{10} + 1$$

$$d = \frac{54}{10} + 1$$

$$d = 5.4 + 1$$

$$d = 6.4$$

R. La diferencia se redondea hacia abajo y queda $d = 6$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
20	26	32	38	44	50	56	62	68	74

CD-II-2.10

Encontrar el tercer término de la sucesión $a_n = 4n + n^2$

$$a_3 = 4(3) + 3^2$$

$$a_3 = 12 + 9$$

$$a_3 = 21$$

R. $a_3 = 21$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-II-2.11
Hallar el octavo término y calcular la suma de los ocho primeros términos de la sucesión $6, 24, 96, \ldots$

Primer paso:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{48}{12} = 4$$

Segundo paso:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_8 = 6(4)^{8-1}$$

$$a_8 = 6(4)^7$$

$$a_8 = 6(16384)$$

$$a_8 = 98304$$

Tercer paso:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_8 = \frac{6(1-4^8)}{1-4}$$

$$S_8 = \frac{6(1-65536)}{-3}$$

$$S_8 = \frac{6(1-65535)}{-3}$$

$$S_8 = \frac{-393210}{-3}$$

$$S_8 = 131070$$

R. $a_8 = 98304$, $S_8 = 131070$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	S_8
6	24	96	384	1,536	6,144	24,576	98,304	131,070

Parte III

CD-III-2.1
$-1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

CD-III-2.2
$-3, -4, -3$

CD-III-2.3
$4, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}$

CD-III-2.4
$-6, -2, 2, 22$

CD-III-2.5
a) $5, 4, 3, 2, -3$
b) $1, 4, 7, 10, 25$
c) $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{9}{12}$
d) $1, 3, 7, 13, 73$
e) $5, 7, 5, 7, 5$
f) $\frac{3}{-14}, \frac{6}{-13}, \frac{9}{-12}, \frac{12}{-11}, \frac{27}{-6}$

CD-III-2.6
10

CD-III-2.7
5

CD-III-2.8
15

CD-III-2.9
13

CD-III-2.10
11

CD-III-2.11
19

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-III-2.12
76

CD-III-2.13
180

CD-III-2.14
257

CD-III-2.15
124

CD-III-2.16
–1

CD-III-2.17
77

CD-III-2.18
18

CD-III-2.19
25

CD-III-2.20
45

CD-III-2.21
2 300

CD-III-2.22
2 550

CD-III-2.23
2 470

CD-III-2.24
351

CD-III-2.25
15

CD-III-2.26
15

CD-III-2.27
10 días

CD-III-2.28
16 días

CD-III-2.29
20 días

CD-III-2.30
$r = 3$, $a_5 = 3870$

CD-III-2.31
$r = 2$, $a_9 = 8704$

CD-III-2.32
$r = 4$, $a_6 = 7168$

CD-III-2.33
6

CD-III-2.34
7

CD-III-2.35
9

CD-III-2.36
88 572

CD-III-2.37
16 383

CD-III-2.38
531 440

CD-III-2.39
27

CD-III-2.40
2

CD-III-2.41
3

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

GLOSARIO

Bien. Cualquier objeto o servicio capaz de satisfacer una necesidad.

Compra. Acción de adquirir algo a cambio de dinero. También, conjunto de bienes y servicios adquiridos en el acto de compra.

Costo. Precio pagado o solicitado para la adquisición de bienes o servicios. Precio o gasto de elaboración de un producto.

Cotización. Precio al que se puede efectuar en un mercado determinado de compra o la venta de un bien, valor o divisa. También se aplica al precio al que compradores y vendedores están dispuestos a cerrar operaciones, pero que no es necesariamente el precio al que realmente se cierra.

Divisa. Término que engloba la moneda de curso legal de terceros países, medios de pago y activos financieros denominados en moneda extranjera, e ingresos en monedas extranjeras originados por transacciones en el exterior.

Ganancia. Beneficio, lucro o provecho que se obtiene de la relación de un trabajo o actividad. En las actividades comerciales es el beneficio obtenido como diferencia del precio de compra de un producto y el precio de venta.

Inflación. Elevación general del nivel de precios que normalmente se mide con el índice de precios al consumidor.

Materias primas. Es un subgrupo del Plan General de Contabilidad que reconoce los elementos naturales, no elaborados, que se incorporan al inicio del proceso de producción para ser elaborados o transformados en productos fabricados o terminados.

Poder adquisitivo. Volumen de bienes y servicios a los que puede acceder, por término medio, una persona o grupo de personas dado su nivel de renta.

Razón. Es el resultado de la comparación entre dos cantidades; razón directa o inversa.

Renta. Cantidad que una persona denominada rentista tiene derecho a percibir periódicamente durante un periodo limitado (renta temporal) o durante toda su vida (renta vitalicia). También es la utilidad, beneficio o incremento de riqueza que una persona física o jurídica percibe en un periodo en forma de retribuciones del trabajo o rendimientos del capital o de la tierra.

Serie. Es la suma de los términos de una sucesión.

Serie aritmética. Se forma realizando la suma de los términos de la sucesión aritmética, se simboliza con S_n , en donde n es el número de términos de la sucesión aritmética.

Serie geométrica. Es la suma de términos de una sucesión geométrica.

Servicio. Acción o efecto de servir.

Sucesión. Conjunto ordenado de números reales construidos a partir de una regla; a cada número se le llama término de la sucesión.

Sucesión aritmética. Se forma sumando al primer término una cantidad constante conocida como diferencia común para obtener el segundo término y así sucesivamente.

Sucesión geométrica. Se forma multiplicando el término anterior por una cantidad constante llamada factor común.

Término. Cada una de las cantidades que componen un polinomio, razón, quebrado, etcétera.

Utilidad. Satisfacción que proporciona al usuario el empleo de un bien. En países latinoamericanos, beneficio o ganancia.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

Interés

3.1
a) 250.00, 0.05 anual
b) 5% anual

3.2
1 665.00

3.3
12.66% anual

3.4
12.52% anual

3.5
37.28

3.6
4133.32

3.7
a) 5.16
b) 5.00
c) 5.09
d) 4.93

3.8
a) 352.99
b) 347.55
c) 348.25
d) 342.79

3.9
1 227.78, 1 210.966

3.10
186.65

Calculo del Monto

3.11
3 906.00

3.12
11 700.00

3.13
3 010.00

3.14
5 918.36

3.15
27 360.00

3.16
55 615.00

3.17
35 100.00

3.18
55 462.00

3.19
35 360.00

3.20
25 743.91

3.21
16 744.18

3.22
20 512.18

3.23
148 331.27

3.24
22 796.12

3.25
371 900.83

3.26
20.833.30

3.27
1 060 697.52

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.28
200 277.52

3.29
2 años, 7 meses, 17 días

3.30
3 años, 10 meses, 17 días

3.31
7 años, 6 meses, 11 días

3.32
2 meses, 28 días

3.33
11 años, 9 meses, 5 días

3.34
4 años

3.35
Exacto 139 días y aproximado 136 días

Descuento simple

3.36
350.00

3.37
4563.00

3.38
1 328.00

3.39
1 800.00

3.40
1 307.22

3.41
1 649.91, 305.08

Valor descontado o ganancia

3.42
8 568

3.43
840 000.00, 2 660 000.00

3.44
2 916 000.00, 10 584.00

3.45
8 692.77

3.46
28 965.52

Tasa de rendimiento

3.47
20.99% anual

3.48
5.0% anual

3.49
22.157% anual

3.50
12.77% anual

Valor de vencimiento

3.51
21 296.66

3.52
21 472.53

3.53
9 750..00

3.54
13 129.10

3.55
25 974.03

3.56
18 944.63

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tasa de descuento

3.57
33.12% anual

3.58
15.5% anual

3.59
14.16 % anual

3.60
19.78% anual

3.61
25.33% anual

3.62
29.27% anual

Plazo

3.63
1 año, 11 meses, 15 días

3.64
1 año, 11 meses, 5 días

3.65
4 meses, 29 días

Pagaré

3.66
24 304.00, 983 696.00

3.67
59 800.00, 1 240 200.00

3.68
30 666.67, 899 333.33

3.69
425 229.73

Respuestas a problemas reto

Reto 1
2,298.00

Reto 2
25% Anual

Reto 3
a) $178.75
b) $176.28

Reto 4
2.83% mensual

Reto 5
1.9% mensual

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

INTERÉS SIMPLE

Objetivos

- Entender el concepto de interés simple y aprender a aplicarlo cotidianamente.
- Resolver problemas reales de interés simple: monto, valor del dinero a futuro, el valor presente o plazo.
- Resolver problemas reales de descuento simple.

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Formulario

Interés simple

$$I = M - C \quad 3.1$$

$$I = CnT \quad 3.2$$

Interés simple tomando como base el año comercial y la tasa al tanto por uno (expresada en forma anual).

$$I = Cn\left(\frac{T}{100}\right) \quad 3.3$$

$$i = \frac{T}{100} \quad 3.4$$

$$I = Cin \quad 3.5$$

$$i = \frac{i}{c}(n) \quad 3.6$$

Interés simple tomando como base el año real y la tasa al tanto por uno (expresada en forma anual).

$$I = C\left(\frac{T}{100}\right)\left(\frac{n}{365}\right) \quad 3.7$$

Interés simple tomando como base el año bisiesto y la tasa al tanto por uno (expresada en forma anual).

$$I = C\left(\frac{T}{100}\right)\left(\frac{n}{366}\right) \quad 3.7a$$

Interés simple tomando como base el comercial y la tasa al tanto por uno (expresada en forma anual).

$$I = C\left(\frac{T}{100}\right)\left(\frac{n}{360}\right) \quad 3.7b$$

Interés simple tomando como base en meses y la tasa al tanto por uno (expresada en forma anual).

$$I = C\left(\frac{T}{100}\right)\left(\frac{n}{12}\right) \quad 3.7c$$

Interés simple tomando como base en días y la tasa al tanto por uno (expresada en forma mensual).

$$I = \frac{Cni}{30} \quad 3.7d$$

Relación de interés comercial y del interés real

$$Ie = \frac{Cni}{365} \quad 3.8$$

$$Io = \frac{Cni}{360} \quad 3.9$$

$$Ie = 0.9863Io \quad 3.10$$

$$Io = 1.0139Ie \quad 3.11$$

$$\frac{Ie}{Io} = 0.9863 \quad 3.12$$

Monto

$$M = C + I \quad 3.13$$

$$M = C(1 + ni) \quad 3.14$$

Valor actual o presente

$$C = \frac{M}{1 + ni} \quad 3.15$$

$$C = M[1 + ni]^{-1} \quad 3.16$$

Tiempo

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i} \quad 3.17$$

$$n = \frac{M - C}{Ci} \quad 3.18$$

Descuento

$$D = Mnd \quad 3.19$$

$$D = M - C \quad 3.19a$$

$$D = \frac{Cdn}{1 - dn} \quad 3.19b$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Valor descontado

$$C = M - D \qquad 3.20$$

$$C = M(1 - nd) \qquad 3.21$$

Monto

$$M = C + D \qquad 3.22$$

$$M = C + Cni \qquad 3.23$$

Tasa de rendimiento

$$i = \frac{M - C}{Cn} \qquad 3.24$$

$$R = \frac{M - C}{Cn} \qquad 3.25$$

$$R = \frac{d}{1 - dn} \qquad 3.26$$

Tasa de descuento

$$d = \frac{D}{Mn} \qquad 3.27$$

Plazo

$$n = \frac{D}{Md} \qquad 3.28$$

Tasa de interés

$$i = \frac{\frac{M}{C} - 1}{n} \qquad 3.29$$

$$i = \frac{M - C}{Cn} \qquad 3.29a$$

Terminología

I	Interés simple
M	Monto
C	Capital
VP	Valor actual o presente
n	Tiempo
T	Tasa de interés (al tanto por ciento)
i	Tasa o tipo de interés (al tanto por uno)
D	Descuento
Du	Descuento único
C	Precio descontado
I_m	Interés moratorio
d	Tasa de descuento
R	Tasa de rendimiento
C	Valor descontado
M	Valor del vencimiento

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

¿Qué sabes?

Aplica tus conocimientos y encuentra los resultados de cada problema.

3.1
¿Qué interés simple produce un capital de $15 600, a pagarse dentro de 13 semanas a una tasa de interés de 11.9% anual?

3.2
Encontrar el interés exacto que se paga por un préstamo de $25 350 a 9.52% en 240 días.

3.3
El dueño de la tlapalería del pueblo recibe un préstamo de $18 650 a dos años. Si la tasa de interés es de 1.5% trimestral, ¿cuánto pagará dentro de dos años?

3.4
Un banco entrega al licenciado Aldama la cantidad $1 255 000 por un préstamo a un año, 3 meses y 15 días, con una tasa de 27%, ¿cuál es el capital inicial del préstamo?

3.5
Una deuda de $7 545 se liquidó el 29 de junio de este año con un cheque cuyo importe es de $8 880. Si la tasa de interés simple es de 11.75%, ¿cuánto tiempo estuvo prestado?

3.6
Se descuenta al profesor Gómez un préstamo de $150 000 a un plazo de 91 días, con una tasa de descuento de 13% anual.
a) ¿De cuánto es el descuento al momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad recibe?

3.7
Una compañía decide descontar un documento el 30 de abril con valor de $368 056, con una tasa de descuento de 13% anual. Si la fecha de vencimiento es el 30 de junio de este año. ¿Cuánto dinero recibirá la compañía?

3.8
La señora Mendoza solicita un préstamo por una determinada cantidad de dinero. El plazo es de 7 meses y la tasa de descuento de 12%. Calcular la tasa mensual de rendimiento

3.9
El arquitecto Rodríguez recibe la cantidad de $80 500 por un préstamo a pagar en 8 meses, con una tasa de descuento de 15% anual. ¿Qué cantidad de dinero debió solicitar prestada?

3.10
El señor Martínez firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $12 245. ¿Cuál es la tasa de descuento?

3.11
El señor Martínez firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial de 18%, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $12 245. ¿Cuál es la tasa de rendimiento?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas a resolver

Interés

CD3.1
La contadora Alma invierte $5 000 y al término de un año recibe $5 250 por su inversión. Calcular:
a) El interés
b) La tasa de interés
c) El tipo de interés

CD3.2
El señor Martínez solicitó un préstamo al ISSSTE de $18 500 al 9% anual durante un año. Calcular el interés simple a pagar.

CD3.3
¿Cuál es la tasa de interés por un préstamo de $15 000 a un año, si se pagaron intereses de $1 900?

CD3.4
Se prestó un capital de $4 950 000 a un fabricante de juguetes durante tres años con un interés preferencial de $1 860 000. ¿Cuál fue la tasa de interés pactada?

CD3.5
El señor Tomas Baroja le prestó a su cuñado la cantidad de $3 550 a una tasa de interés simple de 1.5% mensual, por 21 días. ¿Cuánto recibirá de intereses?

CD3.6
Usted compra un automóvil en $399 999 a pagarse en un año, a una tasa de interés simple de 12.4%. Calcular el interés correspondiente al primer mes de pago.

Interés comercial y real

CD3.7
¿Qué interés produce un capital de $1 500 al 4% durante el mes de marzo?

CD3.8
¿Qué interés produce un capital de $8 500, al 4.6% de interés simple, del 18 de mayo de 2012 al 8 de abril de 2013?

CD3.9
¿Qué interés produce un capital de 8 500 pesos, al 16% de interés simple, del 18 de mayo de 2006 al 8 de abril de 2007?

CD3.10
Calcular el interés exacto si el interés ordinario es de $189.25.

CD3.11
Calcular el interés ordinario si el interés exacto es de $385.15.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.12
Calcular el interés ordinario con tiempo exacto de $18 500 al 25% anual prestado durante 60 días.

CD3.13
Calcular el interés ordinario con tiempo aproximado de $24 750 al 27% anual prestado durante 180 días.

CD3.14
Calcular el interés exacto de $385.15 con una tasa de interés de 24.32% durante 154 días.

CD3.15
Jesús Martínez depositó en su cuenta de ahorros $3 000 el día 5 de marzo y el día 27 de marzo lo retira. La tasa de interés simple es de 5.7% anual. Calcular el interés comercial y exacto, considerando que el año es bisiesto.

CD3.16
Katia Rodríguez depositó en su cuenta de ahorro $5 000 el 5 de junio y el 27 de junio lo retiró. La tasa de interés simple es de 4.05% anual. Calcular el interés comercial y exacto, considerando el año bisiesto.

CD3.17
Calcular el interés que se debe pagar por un préstamo de $8 000 al 25.2% durante 340 días.

Cálculo del monto

CD3.18
Calcular el monto de un préstamo de $3 150 al 16% de interés simple, durante 1.5 años.

CD3.19
El arquitecto Ignacio Aguilera Hernández consigue un préstamo de $9 000 a 15 bimestres, para comprar una computadora. La tasa de interés simple es del 2% bimestral. ¿Cuánto pagará dentro de 15 bimestres?

CD3.20
El alumno Eduardo Arteaga Mora depositó en su cuenta de ahorros $3 000 el 5 de enero y el 31 de enero lo retiró para comprarse un teléfono celular. La tasa de interés simple es de 4.7% anual. Calcular el monto, considerando que el año es bisiesto.

CD3.21
Calcular el monto de un préstamo personal al banco del ejército de $5 500 a una tasa de interés simple de 24% anual del 3 de septiembre al 28 de diciembre del mismo año, considerando que el año es bisiesto.

CD3.22
Calcular el monto de un préstamo de $18 000 al 26% de interés simple, durante dos años.

CD3.23
¿Qué monto hay que pagar al ISSSTE por un crédito de corto plazo de $49 000 al 9% anual, después de 1 año y 6 meses?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.24
Magaly recibe un préstamo de Alexa para adquirir calzado con valor de $32 500. Acuerda pagar la deuda 4 meses después con una tasa de interés de 24% anual. ¿Cuánto deberá pagar Magaly después de 4 meses?

CD3.25
El comunicador Jesús Miguel deposita $55 000 en un fondo de inversión, que da un rendimiento de 0.9% mensual. Para comprar más equipo para su negocio, decide retirar el depósito 28 días después. ¿Cuánto le entregarán al retirar capital e intereses?

CD3.26
El ingeniero Tomas Aguirre consigue un préstamo de $26 000 a 2 años, para comprar una computadora. La tasa de interés simple es de 3% bimestral ¿Cuánto deberá pagar dentro de 2 años?

CD3.27
Calcular el monto acumulado al 24 de marzo del 2014, de un depósito de $22 600 realizado el 14 de octubre de 2013 en una cuenta que abona una TIIE de 25.5% anual más 5.8 puntos porcentuales. Para solucionar el problema utilice el interés simple ordinario con tiempo aproximado.

Valor presente o actual

CD3.28
Encontrar el valor presente de $18 000, pagaderos a 9 meses, con tasa de interés simple de 10%.

CD3.29
¿Cuál será el valor presente de $25 845.35, pagaderos a 12 meses, con tasa de interés simple del 26%?

CD3.30
Calcular el valor presente de $200 000, pagaderos a 19 meses, con tasa de interés simple del 22%.

CD3.31
Encontrar el valor presente de $23 480 de un pagaré que vence dentro de 6 meses y si la tasa de interés simple es del 6%.

CD3.32
¿Cuánto debe invertir una psicóloga el día de hoy, si la tasa de interés es de 1.75% trimestral, para disponer de $450 000 dentro de tres años?

CD3.33
¿Cuánto debe invertir la señora Andrea Portos el día de hoy, a una tasa de 0.8% simple trimestral para disponer de $23 500 dentro de 4 años?

CD3.34
Don Jacinto pagó $1 525 300, por un préstamo bancario con un plazo a 2 años, 6 meses y 28 días, a una tasa de 17% por la compra de un camión de carga. Encontrar el capital inicial del préstamo.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.35
Una persona compró un automóvil compacto por el cual pagó $212 480 el primero de diciembre y lo vendió el 31 de agosto del año siguiente en $216 500 ¿Es conveniente la compra realizada si la tasa de interés que ofrece el banco es de 0.9% mensual?

Tiempo o plazo

CD3.36
El primero de septiembre se depositan $9 500 en una cuenta bancaria. ¿En cuánto tiempo se acumularían $11 000 a una tasa de interés del 6%?

CD3.37
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $34 500, si el capital invertido es de $28 800 a una tasa de 5.1% anual?

CD3.38
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $5 740, si el capital invertido es de $4 287 a una tasa de 4.5% anual?

CD3.39
Una deuda de $48 000 se liquidó el 11 de octubre con un cheque cuyo importe es de $50 800, y la tasa de interés aplicada de 23.73% ¿Cuánto tiempo estuvo prestado el dinero?

CD3.40
¿Cuánto tiempo debe de transcurrir para que un capital se duplique si la tasa de interés es de 8.5% anual? Como el capital inicial es C; entonces el monto al final del plazo es el doble de C ($M = 2C$).

CD3.41
¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que un capital de $1 500 alcance un monto de $3 000 si la tasa de interés es de 25% anual?

CD3.42
Encontrar el tiempo exacto y aproximado, del día 4 de mayo al 20 septiembre del mismo año.

Descuento simple

CD3.43
¿Cuál es el descuento que se hace a un préstamo de $3 500, a un plazo de 6 meses, con una tasa de descuento simple de 20% anual?

CD3.44
¿Cuál es el descuento que hace Banorte a un préstamo de $19 500, a un plazo de 13 meses, con una tasa de descuento simple de 1.8% mensual?

CD3.45
¿Cuál es el descuento que se hace a un préstamo de $8 300, a un plazo de 8 meses, con una tasa de descuento simple de 24% anual?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.46
¿Cuál es el descuento que hace Banorte a un préstamo de $7 500, a un plazo de 16 meses, con una tasa de descuento simple de 1.5% mensual?

CD3.47
Un banco cobra el 26% de interés por adelantado al señor Cabrera por un préstamo a corto plazo, de $10 000 del 2 de mayo al 30 de octubre del presente año. Calcular el descuento que aplica el banco al señor Cabrera.

CD3.48
Calcular el valor presente de $2 000 a 24% de interés simple a un plazo de 9 meses. ¿Cuál es el descuento que realizó Invemex Banco por el préstamo?

Valor descontado o ganancia

CD3.49
El profesor Arriaga solicita un préstamo a Bansur de $12 000 a un plazo de 13 meses, con una tasa de descuento de 2.2% mensual.
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad en realidad recibe el profesor Arriaga?

CD3.50
La Compañía Electrohogar S.A. solicita $3 500 000 de préstamo al banco de Sonora, a 2 años con una tasa de descuento de 12% anual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad la Compañía Electrohogar S.A., por el préstamo?

CD3.51
El administrador de la compañía papelera Gabo S.A. solicita un préstamo al banco INVURSA de $13 500 000 a un plazo de 18 meses, con una tasa de descuento de 1.2% mensual.
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad en realidad recibe el administrador?

CD3.52
El banco Invursa cobra 7% de descuento bancario en préstamos a largo plazo. Juan Luis Trejo necesita $40 000, para pagarlos con intereses en 6 años. ¿Qué cantidad debe solicitar en préstamo y cuánto paga de interés?

Tasa de rendimiento

CD3.53
Bansur aplica un descuento de $640 120 a la contadora Pamela Alfaro por un préstamo a 6 meses con una tasa de descuento de 19% anual, por la compra de remodelación de su despacho. ¿Cuál es la tasa de rendimiento?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.54
¿Cuál es la tasa de rendimiento, si el valor descontado a los 11 meses es de $22 948, y el monto de $24 000?

CD3.55
El abogado Amando Suárez Copel solicita un préstamo por una determinada cantidad de dinero. El plazo es de 9 meses y la tasa de descuento de 19%. Calcular la tasa mensual de rendimiento

CD3.56
El Banco IXE-MEX cobra el 12% de descuento bancario en préstamos a corto plazo. ¿Qué interés simple le cobra el Banco IXE-MEX, a la señora Ana Lucía Vega por un préstamo de $14 000 a un plazo de 6 meses?

Valor de vencimiento

CD3.57
El doctor Jerry Alfaro descontó en el banco un pagaré por el cual recibió la cantidad de $19 167, a una tasa de descuento de 20% anual. El vencimiento del pagaré fue 6 meses después de su descuento. ¿Cuál sería el valor del documento en la fecha de su vencimiento?

CD3.58
Encontrar el valor de un pagaré si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $19 540, a una tasa de descuento de 18% anual.

CD3.59
Calcular el valor de un pagaré, si 8 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $8 450, a una tasa de descuento de 20% anual.

CD3.60
La señora Lucia Vega solicita un préstamo a un banco y éste le entrega la cantidad de $10 000, para pagar en 13 meses, a una tasa de descuento de 22% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

CD3.61
El señor Duran solicita un préstamo al banco BANCA y éste le entrega la cantidad de $20 000, para pagar en 12 meses, a una tasa de descuento de 23% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

CD3.62
El profesor de matemáticas descontó en el banco un pagaré por el cual recibió la cantidad de $16 766, a una tasa de descuento de 23% anual. El vencimiento del pagaré es 6 meses después de su descuento. ¿Cuál sería el valor del documento en la fecha de su vencimiento?

CD3.63
Encontrar el valor de un pagaré, si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $9 540, a una tasa de descuento de 20% anual.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.64
La publicista Antonia Villagrán solicita un préstamo a un banco y éste le entrega la cantidad de $8 000, para pagar en 12 meses, a una tasa de descuento de 23% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

Tasa de descuento

CD3.65
El dueño de la tintorería De Héctor vendió a un banco un pagaré 3 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $18 355 y recibió del banco la cantidad de $16 835. Encontrar la tasa de descuento.

CD3.66
El dueño de la panificadora Trigo vendió a un banco un pagaré 6 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $19 355 y recibió del banco la cantidad de $17 855. Encontrar la tasa de descuento.

CD3.67
El señor Chavarría firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $21 240.50. ¿Cuál es la tasa de descuento?

CD3.68
Encontrar la tasa de rendimiento de un préstamo solicitado por el administrador. Adrián Salvatorio, a pagar en 6 meses, con una tasa de descuento de 18% anual.

CD3.69
Un banco descuenta un pagaré de $55 000, con vencimiento en 7 meses y una tasa de descuento de 22%. ¿Qué tasa de rendimiento obtiene en realidad el banco?

CD3.70
Un banco del Bajío descuenta un pagaré de $150 000, con vencimiento en 9 meses y una tasa de descuento de 24%. ¿Qué tasa de rendimiento obtiene en realidad el banco?

Plazo

CD3.71
La compañía Londres S. A. descuenta un pagaré por el cual recibe $28 879, a una tasa de descuento del 30% anual. ¿Cuánto tiempo falta para el vencimiento del pagaré, si éste tiene valor nominal de $70 000?

CD3.72
La casa de ropa Adrianos descuenta un pagaré por el cual recibe $29 887, a una tasa de descuento del 26% anual. ¿Cuánto tiempo falta para el vencimiento del pagaré si éste tiene valor nominal de $60 000?

CD3.73
Encontrar la fecha en que se descontó un pagaré de $34 000 con vencimiento el 12 de julio del presente año. Como el descuento es comercial el banco descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $3 670, con una tasa de descuento del 26% anual.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Pagaré

CD3.74

Encontrar el valor descontado del siguiente pagaré a Hielo del Atlántico S. A., el 15 de julio de 2006 en un banco que ofrece una tasa de descuento del 14%.

Documento 1 de 1 Núm._____

México D.F. a 15 de Marzo de 2014 $900 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de Hielo del Atlántico S.A. en México D.F. el día 15 de Septiembre de 2014 la cantidad de Novecientos mil pesos 00/100

Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción en mercancía

La suma anterior causará intereses 24% anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 48% anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Oscar Calva Montes
Domicilio Av. Pacífico 56481
Colonia Cafetalera
Ciudad México D.F.
C. P. 04836

Acepto (amos)

a) Calcular el valor de vencimiento del pagaré
b) Calcular el descuento y el valor descontado (valor efectivo)

CD3.75

Encontrar el valor descontado del siguiente pagaré, a la compañía Kolvi S.A., el 30 de agosto de 2006 en un banco que ofrece una tasa de descuento de 18%.

Documento 1 de 1 Núm._____

México D.F. a 30 de Marzo de 20 13 $1 300 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de Compañía de Kolvi S.A. en Puebla, Pue. el día 30 de Noviembre de 2013 la cantidad de Un millón trescientos mil pesos 00/100

Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción en material

La suma anterior causará intereses 18 % anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 48 % anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Mauricio Solís Martínez
Domicilio Calle 57 Oriente
Colonia Centro
Ciudad Puebla, Pue.
C. P. 08765

Acepto (amos)

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.76

El agrónomo Javier Domínguez Pedrosa firmó un pagaré a la tienda de fertilizantes Viarsa con valor de $800 000 pagaderos a 9 meses, con una tasa de interés de 20%. ¿Cuál es el valor descontado del pagaré 2 meses antes de su vencimiento con la misma tasa de descuento?

CD3.77

Del siguiente pagaré encontrar el valor de vencimiento. Si este pagaré se liquidó 12 días después de su vencimiento, calcular el interés moratorio y la cantidad a pagar.

Documento 1 de 1 Núm._____

México D.F. a 14 de enero de 2014 $ 348 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de Sr. Juan Barreda Suarez en México D.F.
el día 26 de Noviembre de 2014 la cantidad de trescientos cuarenta y ocho mil pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción _____
La suma anterior causará intereses 20% anual hasta la fecha de vencimiento.
En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 45% anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Juan Luis Herrera Rosales
Domicilio Av. Coyoacán 56481
Colonia Árbol de Fuego
Ciudad México D.F.
C. P. 04814

_____
Acepto (amos)

CD3.78

Del siguiente pagaré, calcular la cantidad que pidió prestada el señor Balboa a la señora Camargo y calcular el valor presente del documento al 20 de septiembre.

Documento 1 de 1 Núm._____

México D.F. a 14 de Febrero de 2014 $ 1 200 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de la señora Sonia Camargo Dorantes en México D.F.
el día 26 de diciembre de 2014 la cantidad de un millóm doscientos mil pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción _____
La suma anterior causará intereses 25% anual hasta la fecha de vencimiento.
En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 48% anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Joaquín Balbia Gaytán
Domicilio Jacaranda 81
Colonia Arboledas
Ciudad México D.F.
C. P. 04814

_____
Acepto (amos)

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas complementarios

Parte I

CD-I-3.1
¿Qué interés produce un capital de $76 600 a pagarse dentro de 13 semanas a una tasa de interés simple de 12% anual?

CD-I-3.2
Encontrar el interés exacto que se paga por un préstamo de $16 350, a 11.52% en 240 días.

CD-I-3.3
El arquitecto Juárez recibe un préstamo de $48 750 a 2 años. Si la tasa de interés es de 1.2% bimestral, ¿cuánto pagará dentro de 2 años?

CD-I-3.4
Un banco entrega al señor Juan Álvarez la cantidad de $2 255 000 por un préstamo a 1 año, 3 meses y 15 días, con una tasa de 27% de interés simple. ¿Cuál es el capital inicial del préstamo?

CD-I-3.5
Una deuda de $8 400 se liquidó el 29 de junio de este año con un cheque cuyo importe es de $9 080. Si la tasa de interés simple es de 11.75%, ¿cuánto tiempo estuvo prestado el dinero?

CD-I-3.6
Se descuenta al profesor Gómez un préstamo de $350 870 a un plazo de 180 días y con una tasa de descuento de 13% anual. Determinar:
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad de dinero recibe?

CD-I-3.7
Una compañía desea descontar un documento el 30 de abril con un valor de $683 656 y con una tasa de descuento de 10% anual. Si la fecha de vencimiento es el 30 de junio de este año, ¿cuánto dinero recibirá la compañía?

CD-I-3.8
Juan Torres recibe la cantidad de $100 000 por un préstamo a pagar en 10 meses y con una tasa de descuento de 10.5% anual. ¿Qué cantidad de dinero debió solicitar prestada?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte II

CD-II-3.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) El interés significa lo mismo que la tasa de interés _____
b) El capital es mayor que el monto _____
c) Valor descontado significa lo mismo que descuento _____
d) El deudor es la persona que cobra el pagaré _____
e) Se depositan $100 el 15 de marzo y se retira el 15 de octubre, entonces el plazo es de 199 días _____

CD-II-3.2
Un capital de $5 000 se duplica en 4 años con un tipo de interés simple de:

CD-II-3.3
Pedro solicita un préstamo de $38 000 a 2 años. Si la tasa de interés simple es de 3% mensual, ¿cuánto deberá pagar dentro de 2 años? La tasa y el tiempo se expresan en forma bimestral.

CD-II-3.4
Calcular el valor presente de $30 000, pagaderos a 18 meses, con tasa de interés simple del 12%.

CD-II-3.5
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $26 500, si el capital invertido es de $18 700 a una tasa de 6.8% anual?

CD-II-3.6
Una compañía solicita $500 000 de préstamo a un banco, a 2 años con una tasa de descuento de 12% anual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad la compañía por el préstamo?

CD-II-3.7
¿Cuánto recibe la señora Josefina por un pagaré de $45 600, 4 meses antes de su vencimiento, con una tasa de descuento del 15% anual?

CD-II-3.8
Calcular la tasa de rendimiento, si el valor descontado a los 12 meses es de $12 948, y el monto de $15 000

CD-II-3.9
Hallar el valor de un pagaré, si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $6 540, a una tasa de descuento del 18% anual.

CD-II-3.10
Una persona vendió a un banco un pagaré 3 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $8 355 y recibió del banco la cantidad de $6 835. Encontrar la tasa de descuento.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte III

CD-III-3.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) La tasa de interés activa es la que cobran los bancos _____
b) La tasa de interés pasiva es la que pagan los bancos _____
c) El valor de vencimiento es igual al valor nominal más los intereses _____
d) El pagaré es un compromiso por escrito para el pago de una determinada cantidad de dinero _____
e) El deudor u otorgante es la persona que cobra el pagaré _____

CD-III-3.2
Don Pablo abre una cuenta de inversión en Bansur por la cantidad de $2 000. Después de un año recibe $2 960. Por su inversión calcula:
a) El interés
b) La tasa de interés
c) El tipo de interés

CD-III-3.3
La señora Prudencia solicita a una institución financiera un préstamo de $6 500 a una tasa de interés simple de 18% con un plazo de 55 días. Calcula el interés comercial y exacto.

CD-III-3.4
Fernando Barrales depositó en su cuenta de ahorros $8 000 el 5 de marzo y el 27 marzo lo retiró. La tasa de interés simple es de 7.7% anual. ¿Qué cantidad recibió?

CD-III-3.5
Hallar el valor presente de $48 230 de un pagaré que vence dentro de 6 meses, si la tasa de interés simple es de 6%.

CD-III-3.6
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $35 650, si el capital invertido es de $29 780 a una tasa de 5.4% anual?

CD-III-3.7
El señor Porfirio solicita un préstamo de $8 000 a una institución bancaria, a un plazo de 9 meses, con una tasa de descuento de 0.85% mensual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad el señor Porfirio por el préstamo?

CD-III-3.8
El arquitecto Mario Aguilar adquirió una deuda de $2 000 hace 6 meses y vence dentro de 12 meses a partir de la contratación. Además hace 4 meses contrajo una nueva deuda de $8 000 a pagarse dentro de 4 meses a partir del día de hoy. Asimismo, también adquirió otra deuda hace 1 mes por $3 000 a pagarse en 6 meses. El día de hoy el acreedor acepta un pago único en efectivo equivalente a las tres deudas, a una tasa de interés de 24%. Si la fecha focal se establece el día de hoy, ¿cuál debe ser el valor del pago único para cancelar sus deudas?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Respuestas

¿Qué sabes?

En seguida aparecen las operaciones y las soluciones de los problemas enunciados al principio de la unidad.

3.1

¿Qué interés simple produce un capital de $15 600, a pagarse dentro de 13 semanas a una tasa de interés de 11.9% anual?

Datos
C = $ 15,600
T = 11.9% anual
n = 13 semanas
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/52)$$
$$I = 15600(0.119)(13/52)$$
$$I = 15600(0.119)(0.25)$$
$$I = 15600(0.02975)$$
$$I = \$464.10$$

3.2

Encontrar el interés exacto que se paga por un préstamo de $25 350 a 9.52% en 240 días.

Datos
C = $25 350
T = 9.52% anual
n = 240 días
Incógnita: Ie

$$Ie = C(T/100)(n/365)$$
$$Ie = 25350(0.0952)(240/365)$$
$$Ie = 25350(0.0952)(0.6575)$$
$$Ie = 25350(0.6575)$$
$$Ie = \$1586.84$$

3.3

El dueño de la tlapalería del pueblo recibe un préstamo de $18 650 a dos años. Si la tasa de interés es de 1.5% trimestral, ¿cuánto pagará dentro de dos años?

La tasa y el tiempo se expresan en forma trimestral.

Datos
C = $18 650
T = 1.5% trimestral
t = 0.015 trimestral
n = 2 años
n = 8 trimestres

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 18650[1+(0.015)(8)]$$
$$M = 18650[1+(0.12)]$$
$$M = 18650[1.12]$$
$$M = \$20888$$

3.4

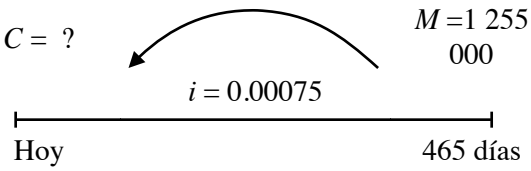
Un banco entrega al licenciado Aldama la cantidad $1 255 000 por un préstamo a un año, 3 meses y 15 días, con una tasa de 27%, ¿cuál es el capital inicial del préstamo?

Datos
M = $1 255 000
T = 27% anual
i = 0.00075 diario
n = 1 año, 3 meses y 15 días
n = 360 + 90 + 15
n = 465 días
Incógnita: C

$$C = 1255000[1+(0.00075)(465)]^{-1}$$
$$C = 1255000[1.34875]^{-1}$$
$$C = 1255000(0.741427)$$
$$C = \$930491.19$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.4 cont.



3.5

Una deuda de $7 545 se liquidó el 29 de junio de este año con un cheque cuyo importe es de $8 880. Si la tasa de interés simple es de 11.75%, ¿cuánto tiempo estuvo prestado?

Datos
$C = \$7\,545$
$M = \$8\,880$
$T = 11.75\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i}$$

$$n = \frac{\frac{8\,880}{7\,545} - 1}{0.1175} = \frac{1.176938 - 1}{0.1175} = 1.505858 \text{ años}$$

$n = 1$ año, 6 meses y 2 días

Cálculo de los meses y los días

$$\text{Años} = 1$$

$$\text{Meses} = 1.505858 - 1 = 0.505858$$

$$\text{Meses} = (0.505858)(12)$$

$$\text{Meses} = 6.0703$$

$$\text{Días} = 6.0703 - 6$$

$$\text{Días} = (0.0703)(30)$$

$$\text{Días} = 2.109$$

$$\text{Días} = 2$$

Como la tasa se da en forma anual, el periodo también es anual, entonces el resultado está expresado en años.

3.6

Se descuenta al profesor Gómez un préstamo de $150 000 a un plazo de 91 días, con una tasa de descuento de 13% anual.

a) ¿De cuánto es el descuento al momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad recibe?

Datos
$M = \$150\,000$
$n = 91$ días
$d = 13\%$ anual
$d =$ diario
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd$$

$$D = 150000(91)(0.0003611)$$

$$D = \$4929.16$$

La cantidad que recibe el profesor Gómez es de:

$$C = M - D$$

$$C = 150000 - 4929$$

$$C = \$145070.83$$

El profesor Gómez recibe $145 070.83, en lugar de los $150 000 solicitados, pero dentro de 91 días debe pagar $150 000, porque la institución financiera le aplicó el descuento comercial.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.7
Una compañía decide descontar un documento el 30 de abril con valor de $368 056, con una tasa de descuento de 13% anual. Si la fecha de vencimiento es el 30 de junio de este año. ¿Cuánto dinero recibirá la compañía?

Datos
$M = \$368\ 056$
$n = 61$ días
$d = 13\%$ anual
Incógnita: C

$$C = M(1 - nd)$$
$$C = 368056\left[1 - (61/360)(0.13)\right]$$
$$C = 368056\left[1 - (0.1694)(0.13)\right]$$
$$C = 368056(1 - 0.0220277)$$
$$C = 368056(0.97797)$$
$$C = \$359947.72$$

3.8
La señora Mendoza solicita un préstamo por una determinada cantidad de dinero. El plazo es de 7 meses y la tasa de descuento de 12%. Calcular la tasa mensual de rendimiento

Datos
$n = 7$ meses
$d = 12\%$ anual
d = 0.12 / 12 = 0.01 mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{d}{1 - dn}$$
$$R = \frac{0.01}{1 - (0.01)(7)}$$
$$R = \frac{0.01}{1 - 0.7}$$
$$R = \frac{0.01}{0.93}$$

3.8 cont.
$$R = 0.0107527 \text{ mensual}$$
$$R = 1.07527\% \text{ mensual}$$
$$R = 12.90\% \text{ anual}$$

3.9
El arquitecto Rodríguez recibe la cantidad de $80 500 por un préstamo a pagar en 8 meses, con una tasa de descuento de 15% anual. ¿Qué cantidad de dinero debió solicitar prestada?

Datos
$C = \$80\ 500$
$n = 8$ meses
$d = 15\%$ anual
d = 0.15 / 12 = 0.0125 mensual
Incógnita: M

$$M = \frac{C}{1 - nd}$$
$$M = \frac{80\ 500}{1 - (8)(0.0125)}$$
$$M = \frac{80\ 500}{1 - 0.1}$$
$$M = \frac{80\ 500}{0.9}$$
$$M = \$89444.44$$

3.10
El señor Martínez firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $12 245. ¿Cuál es la tasa de descuento?

Datos
$C = \$200\ 000$
$D = \$12\ 245$
Incógnita: d

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.10 cont.

$$d = \frac{D}{Mn}$$

$$d = \frac{12245}{(200000)(8)}$$

$$d = \frac{12245}{1600000}$$

$$d = 0.007653 \text{ mensual}$$

$$d = 9.18\% \text{ anual}$$

3.11

El señor Martínez firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial de 18%, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $12 245. ¿Cuál es la tasa de rendimiento?

Datos
n = 9 meses
d = 18% anual
d = 0.18 / 12 = 0.015 mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{d}{1 - dn}$$

$$R = \frac{0.015}{1 - (0.015)(9)}$$

$$R = \frac{0.01}{1 - 0.135}$$

$$R = \frac{0.01}{0.865}$$

$$R = 0.01734 \text{ mensual}$$

$$R = 20.81\% \text{ anual}$$

Problemas a resolver

Interés

CD3.1

La contadora Alma invierte $5 000 y al término de un año recibe $5 250 por su inversión. Calcular:
a) El interés
b) La tasa de interés
c) El tipo de interés

a) El interés se obtiene sustituyendo el valor del capital y el monto en la ecuación 3.1.

Datos
C = $5 000
M = $5 250
n = Un año
Incógnita: I

$$I = M - C$$

$$I = 5250 - 5000$$

$$I = \$\ 250$$

b) La tasa de interés
Incógnita: i.

$$i = \frac{I}{Cn}$$

$$i = \frac{250}{5\,000}$$

$$i = 0.05 \text{ anual}$$

c) El tipo de interés
Incógnita: T

$$T = (0.05)(100)$$

$$T = 5\% \text{ anual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.2
El señor Martínez solicitó un préstamo al ISSSTE de $18 500 al 9% anual durante un año. Calcular el interés simple a pagar.

Datos
C =$18 500
T = 9% anual
i = 0.09 anual
n = 1 año
Incógnita: I

$$I = Cni$$
$$I = 18500(1)(0.09)$$
$$I = \$1665$$

CD3.3
¿Cuál es la tasa de interés por un préstamo de $15 000 a un año, si se pagaron intereses de $1 900?

Datos
I = $1 900
C = $15 000
n = un año
Incógnita: i

$$i = I/C$$
$$i = 1900/15000$$
$$i = 0.1266 \text{ anual}$$
$$T = 12.66\% \text{ anual}$$

CD3.4
Se prestó un capital de $4 950 000 a un fabricante de juguetes durante tres años con un interés preferencial de $1 860 000.
¿Cuál fue la tasa de interés pactada?

Datos
C =$4 950 000
I =$1 860 000
n = 3 años
Incógnita: T

CD3.4 cont.
$$i = I/Cn$$
$$i = 1860000/[(4950000)(3)]$$
$$i = 0.1252 \text{ anual}$$
$$T = 12.52\% \text{ anual}$$

CD3.5
El señor Tomas Baroja le prestó a su cuñado la cantidad de $3 550 a una tasa de interés simple de 1.5% mensual, por 21 días.
¿Cuánto recibirá de intereses?

Datos
C = $3 550
T = 1.5% mensual
n = 21 días
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/30)$$
$$I = 3550(0.015)(21/30)$$
$$I = \$37.28$$

CD3.6
Usted compra un automóvil en $399 999 a pagarse en un año, a una tasa de interés simple de 12.4%. Calcular el interés correspondiente al primer mes de pago.

Datos
C = $399 999
T = 12.4% anual
n = 1 mes
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/12)$$
$$I = 399999(0.124)(1/12)$$
$$I = \$4133.32$$

Recursos académicos en línea · Grupo Editorial Patria

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Interés comercial y real

CD3.7
¿Qué interés produce un capital de $1 500 al 4% durante el mes de marzo?

a) Interés simple, comercial y tiempo exacto.
Año comercial de 360 días.
Tiempo exacto, el mes tiene 31 días.
$Io = 1500(0.04)(360/360) = \$5.16$

b) Interés simple, comercial y tiempo aproximado.
Año comercial de 360 días.
Tiempo aproximado, el mes tiene 30 días.
$Io = 1500(0.04)(30/360) = \$5.00$

c) Interés simple, real y tiempo exacto.
Año real de 365 días.
Tiempo exacto, el mes tiene 31 días.
$Ie = 1500(0.04)(31/365) = \$5.09$

d) Interés simple, real y tiempo aproximado.
Año real de 365 días.
Tiempo aproximado, el mes tiene 30 días.
$Ie = 1500(0.04)(30/365) = \$4.93$

CD3.8
¿Qué interés produce un capital de $8 500, al 4.6% de interés simple, del 18 de mayo de 2012 al 8 de abril de 2013?

a) Interés simple, comercial y tiempo exacto.
$Io = 8500(0.046)(325/360) = \$352.99$

b) Interés simple, comercial y tiempo aproximado.
$Io = 8500(0.046)(320/360) = \$347.55$

c) Interés simple, real y tiempo exacto.
$Ie = 8500(0.0.46)(325/365) = \$348.15$

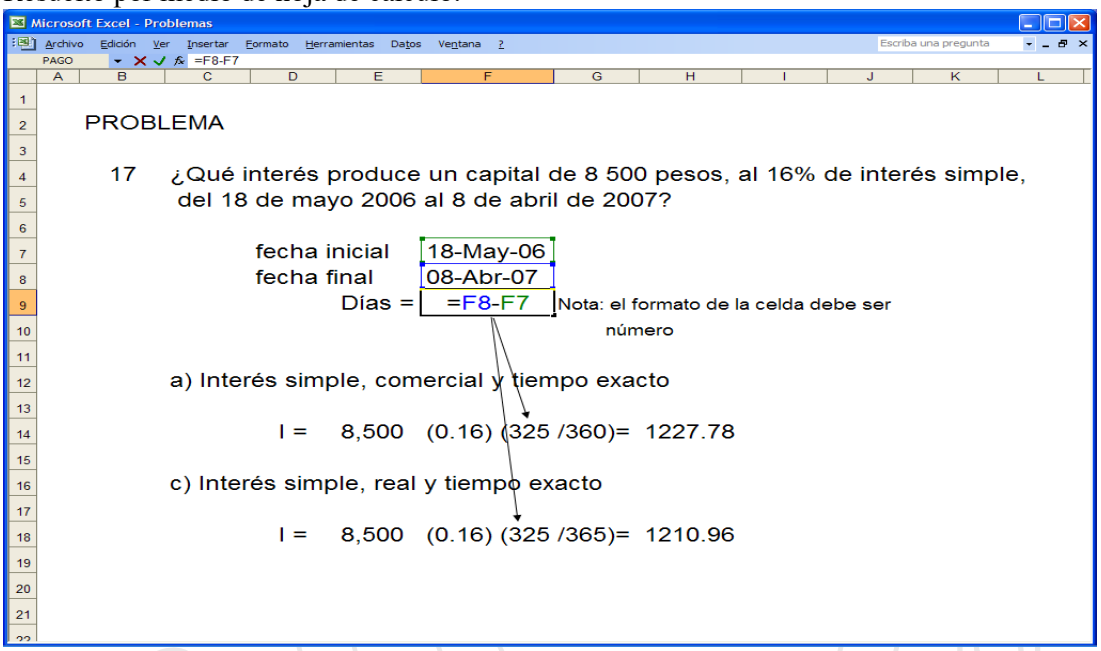
d) Interés simple, real y tiempo aproximado.
$Ie = 8500(0.4.6)(320/365) = \$342.79$

cursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.9
¿Qué interés produce un capital de 8 500 pesos, al 16% de interés simple, del 18 de mayo de 2006 al 8 de abril de 2007?

Resuelto por medio de hoja de cálculo:



CD3.10
Calcular el interés exacto si el interés ordinario es de $189.25.

$$Ie = 0.9863\ Io$$
$$Ie = 0.9863(189.25)$$
$$Ie = \$186.65$$

CD3.11
Calcular el interés ordinario si el interés exacto es de $385.15.

$$Io = 1.0139\ Ie$$
$$Io = 1.0139(385.15)$$
$$Io = \$390.5$$

CD3.12
Calcular el interés ordinario con tiempo exacto de $18 500 al 25% anual prestado durante 60 días.

$$Io = Cn(i/365)$$
$$Io = 18500(0.25)(60/365)$$
$$Io = \$760.27$$

CD3.13
Calcular el interés ordinario con tiempo aproximado de $24 750 al 27% anual prestado durante 180 días.

$$Io = Cn(i/360)$$
$$Io = 24750(180)(0.27/360)$$
$$Io = \$3341.25$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.14
Calcular el interés exacto de $385.15 con una tasa de interés de 24.32% durante 154 días.

Datos:
C = $385.15
T = 24.32%
n = 154 días
Incógnita: Ie

$$Ie = Cn(i/365)$$
$$Ie = 385.15(0.2432)(154/365)$$
$$Ie = \$39.52$$

CD3.15
Jesús Martínez depositó en su cuenta de ahorros $3 000 el día 5 de marzo y el día 27 de marzo lo retira. La tasa de interés simple es de 5.7% anual. Calcular el interés comercial y exacto, considerando que el año es bisiesto.

Datos
C = $3 000
T = 5.7% anual
Incógnitas:
n
Io
Ie
Los días transcurridos n = 27 – 5 = 22 días

a) Interés comercial
$$Io = 3\,000\left[\frac{0.057}{360}\right](22)$$
$$Io = \$10.45$$

b) Interés exacto
$$Io = 3\,000\left[\frac{0.057}{366}\right](22)$$
$$Io = \$10.27$$

CD3.16
Katia Rodríguez depositó en su cuenta de ahorro $5 000 el 5 de junio y el 27 de junio lo retiró. La tasa de interés simple es de 4.05% anual. Calcular el interés comercial y exacto, considerando el año bisiesto.

a) Datos
C = $5 000
T = 4.05%
n = 27 – 5 = 22 días
Incógnita: Io

$$Io = Cni/360$$
$$Io = 5000(22)(0.405/360)$$
$$Io = \$12.38$$

b) Datos
C = $35 042
T = 32.42%
n = 154 días
Incógnita: Ie

$$Ie = Cni/365$$
$$Ie = 5000(22)(0.405/365)$$
$$Ie = \$12.21$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.17
Calcular el interés que se debe pagar por un préstamo de $8 000 al 25.2% durante 340 días.

Como no se indica el tipo de interés a calcular, se debe entender que el tipo de interés es el comercial u ordinario, a menos que se indique lo contrario.

Datos
$C = \$8\,000$
$T = 25.2\%$
$n = 340$ días
Incógnita: Io

$$Io = Cni/360$$
$$Io = 8000(0.252)(340/360)$$
$$Io = \$1904$$

Cálculo del monto

CD3.18
Calcular el monto de un préstamo de $3 150 al 16% de interés simple, durante 1.5 años.

Datos:
$C = \$3\,150$
$T = 16\%$ anual
$n = 1.5$ años
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 3150[1+(0.16)(1.5)]$$
$$M = 3150(1.24)$$
$$M = \$3906$$

CD3.19
El arquitecto Ignacio Aguilera Hernández consigue un préstamo de $9 000 a 15 bimestres, para comprar una computadora. La tasa de interés simple es del 2% bimestral. ¿Cuánto pagará dentro de 15 bimestres?

Datos:
$C = \$9\,000$
$T = 2\%$ bimestral
$n = 15$ bimestres
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 9000[1+(0.02)(15)]$$
$$M = 9000[1+(0.30)]$$
$$M = \$11700$$

CD3.20
El alumno Eduardo Arteaga Mora depositó en su cuenta de ahorros $3 000 el 5 de enero y el 31 de enero lo retiró para comprarse un teléfono celular. La tasa de interés simple es de 4.7% anual. Calcular el monto, considerando que el año es bisiesto.

Datos:
$C = \$3\,000$
$T = 4.7\%$ anual
Los días transcurridos $n = 31 - 5 = 26$ días
Incógnitas: n y M

$$M = 3000\left[1+\left(\frac{0.047}{366}\right)(26)\right] = \$3010$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.21
Calcular el monto de un préstamo personal al banco del ejército de $5 500 a una tasa de interés simple de 24% anual del 3 de septiembre al 28 de diciembre del mismo año, considerando que el año es bisiesto.

Datos
C = $5 500
T = 24% anual
Incógnitas:
n
M

Los días transcurridos

Tabla 1

Mes	Días
Septiembre	30 – 3 = 27
Octubre	31
Noviembre	30
Diciembre	28
Total	116

$$M = 5500\left[1+\left(\frac{0.24}{366}\right)(116)\right] = \$5918.36$$

CD3.22
Calcular el monto de un préstamo de $18 000 al 26% de interés simple, durante dos años.

Datos
C = $18 000
T = 26% anual
n = 2 años

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 18000\left[1+(0.26)(2)\right]$$
$$M = \$27360$$

CD3.23
¿Qué monto hay que pagar al ISSSTE por un crédito de corto plazo de $49 000 al 9% anual, después de 1 año y 6 meses?

Datos
C = $49 000
n = 18 meses
T = 9% anual
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 49000\left[1+\left(\frac{0.09}{12}\right)(18)\right]$$
$$M = \$55615$$

CD3.24
Magaly recibe un préstamo de Alexa para adquirir calzado con valor de $32 500. Acuerda pagar la deuda 4 meses después con una tasa de interés de 24% anual. ¿Cuánto deberá pagar Magaly después de 4 meses?

Datos
C =$ 32 500
T = 24% anual
n = 4 meses
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 32500\left[1+(0.24)\left(\frac{4}{12}\right)\right]$$
$$M = 32500\left[1.08\right]$$
$$M = \$35100$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.25
El comunicador Jesús Miguel deposita $55 000 en un fondo de inversión, que da un rendimiento de 0.9% mensual. Para comprar más equipo para su negocio, decide retirar el depósito 28 días después.
¿Cuánto le entregarán al retirar capital e intereses?

Datos
$C = \$55\,000$
$T = 0.9\%$ mensual
$n = 28$ días
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 55000\left[1+(0.009)(28/30)\right]$$
$$M = 55000\left[1+(0.0014)\right]$$
$$M = \$55462$$

CD3.26
El ingeniero Tomas Aguirre consigue un préstamo de $26 000 a 2 años, para comprar una computadora. La tasa de interés simple es de 3% bimestral ¿Cuánto deberá pagar dentro de 2 años?

Datos
$C = \$26\,000$
$T = 3\%$ bimestral
$n = 2$ años
$n = 12$ bimestres

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 26000\left[1+(0.03)(12)\right]$$
$$M = 26000\left[1.36\right]$$
$$M = \$35360$$

CD3.27
Calcular el monto acumulado al 24 de marzo del 2014, de un depósito de $22 600 realizado el 14 de octubre de 2013 en una cuenta que abona una TIIE de 25.5% anual más 5.8 puntos porcentuales. Para solucionar el problema utilice el interés simple ordinario con tiempo aproximado.

Datos
$C = \$22\,600$
TIIE = 25.5% anual
5.8 puntos porcentuales
$T = 31.3\%$ anual
$n = 160$ días

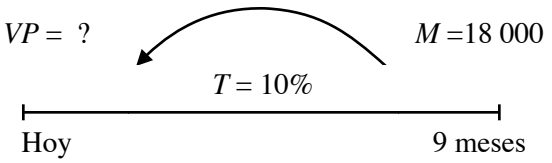
$$M = 22600\left[1+160\left(\frac{0.313}{360}\right)\right] = \$25743.91$$

Valor presente o actual

CD3.28
Encontrar el valor presente de $18 000, pagaderos a 9 meses, con tasa de interés simple de 10%.

Datos
$M = \$18\,000$
$T = 10\%$ anual
$n = 9$ meses
Incógnita: VP

$$VP = 18000\left[1+(0.1)(9/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 18000\left[0.93023\right]$$
$$VP = \$16744.18$$

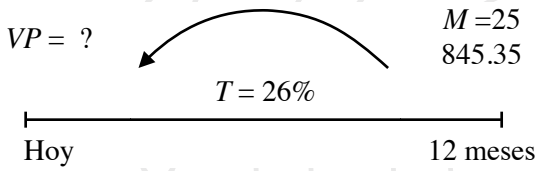


D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.29
¿Cuál será el valor presente de $25 845.35, pagaderos a 12 meses, con tasa de interés simple del 26%?

Datos
M = $25 845.35
T = 26% anual
n = 12 meses
Incógnita: VP

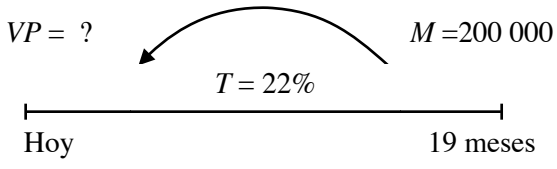
$$VP = 25845.35\left[1+(0.26)(12/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 25845.35\left[0.79365\right]$$
$$VP = \$20512.18$$



CD3.30
Calcular el valor presente de $200 000, pagaderos a 19 meses, con tasa de interés simple del 22%.

Datos
M = $200 000
T = 22% anual
n = 19 meses

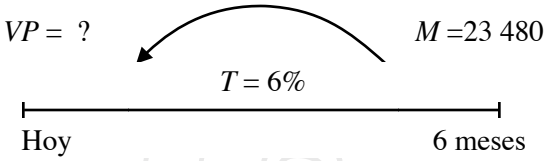
$$VP = 200000\left[1+(0.22)(19/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 200000.00\left[0.741656\right]$$
$$VP = \$148331.27$$



CD3.31
Encontrar el valor presente de $23 480 de un pagaré que vence dentro de 6 meses y si la tasa de interés simple es del 6%.

Datos
M = $23 480
T = 6% anual
n = 6 meses
Incógnita: VP

$$VP = 23480\left[1+(0.06)(6/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 23480\left[1.03\right]^{-1}$$
$$VP = 23480\left[0.9709\right]$$
$$VP = \$22796.12$$



Los $22 796.12 son el valor presente de $23 480, lo que significa que si el día de hoy invertimos $22 796.12, durante 6 meses a una tasa del 6%, obtendríamos $23 480.

CD3.32
¿Cuánto debe invertir una psicóloga el día de hoy, si la tasa de interés es de 1.75% trimestral, para disponer de $450 000 dentro de tres años?

Datos
M = $450 000
T = 1.75% trimestral
n = 12 trimestres

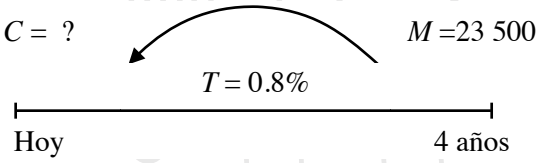
$$C = 450000\left[1+(12)(0.0175)\right]^{-1}$$
$$C = 18000\left[0.82645\right]$$
$$C = \$371900.83$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.33
¿Cuánto debe invertir la señora Andrea Portos el día de hoy, a una tasa de 0.8% simple trimestral para disponer de $23 500 dentro de 4 años?

Datos
$M = \$23\,500$
$T = 0.8\%$ trimestral
$n = 4$ años
$n = 16$ trimestres

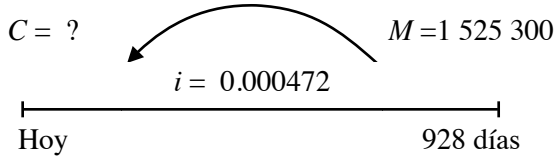
$$C = 23500\left[1+(16)(0.008)\right]^{-1}$$
$$C = 23500\left[1.128\right]^{-1}$$
$$C = 23500(0.887)$$
$$C = \$20883.30$$



CD3.34
Don Jacinto pagó $1 525 300, por un préstamo bancario con un plazo a 2 años, 6 meses y 28 días, a una tasa de 17% por la compra de un camión de carga. Encontrar el capital inicial del préstamo.

Datos
$M = \$1\,525\,300$
$T = 17\%$ anual
$i = 0.000472$ diario
$n = 720 + 180 + 28$

$$C = 1525300\left[1+(0.000472)(928)\right]^{-1}$$
$$C = 1525300\left[1.438\right]^{-1}$$
$$C = 1525300(0.6954)$$
$$C = \$1060697.52$$

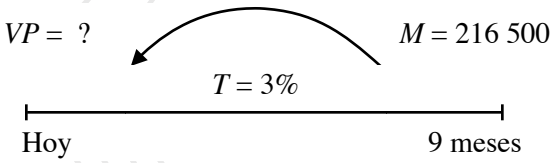


CD3.35
Una persona compró un automóvil compacto por el cual pagó $212 480 el primero de diciembre y lo vendió el 31 de agosto del año siguiente en $216 500 ¿Es conveniente la compra realizada si la tasa de interés que ofrece el banco es de 0.9% mensual?

Para evaluarla la conveniencia se debe calcular el valor presente de la cantidad que pagó por el automóvil.

Datos
Pago el primero de diciembre = $212 480
$M = \$216\,500$
$T = 0.9\%$ mensual
$n = 9$ meses
Incógnita: VP

$$VP = 216500\left[1+(0.009)(9)\right]^{-1}$$
$$VP = 216500\left[1.081\right]^{-1}$$
$$VP = 216500(0.92506)$$
$$VP = \$200277.52$$



Si la tasa de inversión fuera igual a la tasa de interés en el mercado por la compra de automóviles, la persona dejaría de ganar:
216 500.00 – 200 277.52 = $16 222.48
por haber invertido en el automóvil. Una mejor alternativa hubiera sido una inversión bancaria.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tiempo o plazo

CD3.36
El primero de septiembre se depositan $9 500 en una cuenta bancaria. ¿En cuánto tiempo se acumularían $11 000 a una tasa de interés del 6%?

Datos
$C = \$9\,500$
$M = \$11\,000$
$T = 6\%$ Anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i} = \frac{\frac{11000}{9500} - 1}{0.06} = \frac{1.15789 - 1}{0.06} = 2.6315 \text{ años}$$

Cálculo de los meses y los días

$$\text{Años} = 2$$
$$\text{Meses} = 2.6315 - 2 = 0.6315$$
$$\text{Meses} = (0.6315)(12)$$
$$\text{Meses} = 7.578$$
$$\text{Días} = 7.578 - 7$$
$$\text{Días} = (0.578)(30)$$
$$\text{Días} = 17.34$$

$n = 2$ años, 7 meses y 17 días

CD3.37
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $34 500, si el capital invertido es de $28 800 a una tasa de 5.1% anual?

Datos
$C = \$28\,800$
$M = \$34\,500$
$T = 5.1\%$ anual

$$n = \frac{\frac{34\,500}{28\,800} - 1}{0.051} = \frac{1.179772 - 1}{0.051} = 3.88$$

$n = 3$ años, 10 meses y 17 días

CD3.38
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $5 740, si el capital invertido es de $4 287 a una tasa de 4.5% anual?

Datos
$C = \$4\,287$
$M = \$5\,740$
$T = 4.5\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{5\,740}{4\,287} - 1}{0.045} = \frac{1.33893 - 1}{0.045} = 7.5318$$

$n = 7$ años, 6 meses y 11 días

CD3.39
Una deuda de $48 000 se liquidó el 11 de octubre con un cheque cuyo importe es de $50 800, y la tasa de interés aplicada de 23.73% ¿Cuánto tiempo estuvo prestado el dinero?

Datos
$C = \$48\,000$
$M = \$50\,800$
$T = 23.73\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{50\,800}{48\,000} - 1}{0.2373} = \frac{1.05833 - 1}{0.2373} = 0.2458$$

$n = 2$ meses y 28 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.40

¿Cuánto tiempo debe de transcurrir para que un capital se duplique si la tasa de interés es de 8.5% anual? Como el capital inicial es C; entonces el monto al final del plazo es el doble de C ($M = 2C$).

$$M = C(1+ni)$$
$$2C = C(1+ni)$$
$$\frac{2C}{C} = 1+ni$$
$$2 = 1+ni$$
$$2-1 = ni$$
$$\frac{1}{i} = n$$
$$n = \frac{1}{0.085} = 11.7647 \text{ años}$$

n = 11 años, 9 meses y 5 días

CD3.41

¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que un capital de $1 500 alcance un monto de $3 000 si la tasa de interés es de 25% anual?

Ahora, si M = pesos, entonces, M es el doble de C = $1 500, por tanto:

$$3\,000 = 1\,500\left[1+n(0.25)\right]$$
$$\frac{3\,000}{1\,500} = 1+n(0.25)$$
$$2 = 1+n(0.25)$$
$$n = \frac{1}{0.25} = 4 \text{ años}$$

CD3.42

Encontrar el tiempo exacto y aproximado, del día 4 de mayo al 20 septiembre del mismo año.

Para encontrar el tiempo exacto nos auxiliamos de la columna cuatro de la siguiente tabla 2 (para encontrar el día del año ver el apéndice A).

Tabla 2

Fecha	Mes	Día del año
4 de mayo	5	124
20 de septiembre	9	263
Diferencia	4	**139**

Tiempo exacto = 263 – 124 = 139 días
Otra forma de calcularlo se muestra en la tabla 3.

Tabla 3

Mes	Días del mes	Días
Mayo	31	31– 4 = 27
Junio	30	30
Julio	31	31
Agosto	31	31
Septiembre	30	20
Total		**139**

El tiempo aproximado se calcula considerando los meses de 30 días y en el caso de México no se cuenta el primer día pero si el último del plazo. Para encontrar el tiempo exacto nos auxiliamos de la columna cuatro de la siguiente tabla 4 (para encontrar el día del año ver el apéndice C).

Tabla 4

Fecha	Mes	Día	Día del año
4de mayo	5	40	124
20 de septiembre	9	28	260
Diferencia	4	12	136

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Descuento simple

CD3.43
¿Cuál es el descuento que se hace a un préstamo de $3 500, a un plazo de 6 meses, con una tasa de descuento simple de 20% anual?

Datos
M = $3 500
n = 6 meses
d = 20 % anual
d = 0.20/12 = 0.0166
Incógnita: D

$$D = Mnd = 3500(6)(0.20/12) = \$350$$

CD3.44
¿Cuál es el descuento que hace Banorte a un préstamo de $19 500, a un plazo de 13 meses, con una tasa de descuento simple de 1.8% mensual?

Datos
M = $19 500
n = 13 meses
d = 1.8% mensual
d = 0.018 mensual
Incógnita: D

$$D = Mnd = 19500(13)(0.018) = \$4563$$

CD3.45
¿Cuál es el descuento que se hace a un préstamo de $8 300, a un plazo de 8 meses, con una tasa de descuento simple de 24% anual?

Datos
M = $3 500
n = 8 meses
d = 24 % anual
d = 0.24/12 = 0.02
Incógnita: D

$$D = Mnd = 8300(8)(0.24/12) = \$1328$$

CD3.46
¿Cuál es el descuento que hace Banorte a un préstamo de $7 500, a un plazo de 16 meses, con una tasa de descuento simple de 1.5% mensual?

Datos
M = $7 500
n = 16 meses
d = 1.5 % mensual
d = 0.015 mensual
Incógnita: D

$$D = Mnd = 7500(16)(0.015) = \$1800$$

CD3.47
Un banco cobra el 26% de interés por adelantado al señor Cabrera por un préstamo a corto plazo, de $10 000 del 2 de mayo al 30 de octubre del presente año. Calcular el descuento que aplica el banco al señor Cabrera.

Datos
M = $10 000
n = 181 días
T = 26% anual (es el 26% de descuento bancario)
Incógnita: D

$$D = Mnd = 10000(181)(0.26/360) = \$1307.22$$

CD3.48
Calcular el valor presente de $2 000 a 24% de interés simple a un plazo de 9 meses. ¿Cuál es el descuento que realizó Invemex Banco por el préstamo?

Datos
M = $2 000
n = 9 meses
T = 24% anual
i = 0.02 mensual
Incógnitas: VP y D

$$D = M - VP = 2000 - 1694.91 = \$305.09$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Valor descontado o ganancia

CD3.49
El profesor Arriaga solicita un préstamo a Bansur de $12 000 a un plazo de 13 meses, con una tasa de descuento de 2.2% mensual.
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad en realidad recibe el profesor Arriaga?

Datos
$M = \$12\,000$
$n = 13$ meses
$d = 2.2\%$ mensual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 12000(13)(0.022) = \$3432$$

La cantidad que recibe el profesor Arriaga es de:
$$C = M - D = 12000 - 3432 = \$8568$$

CD3.50
La Compañía Electrohogar S.A. solicita $3 500 000 de préstamo al banco de Sonora, a 2 años con una tasa de descuento de 12% anual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad la Compañía Electrohogar S.A., por el préstamo?

Datos
$M = \$3\,500\,000$
$d = 12\%$ anual
$n = 2$ años
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 3500000(2)(0.12) = \$840000$$

La cantidad recibida por la Compañía Electrohogar S.A., es de:
$$C = M - D = 3500000 - 840000 = \$2660000$$

La compañía recibe $2 660 000 en lugar de los $3 500 000 solicitados, y en 2 años tendrá que pagar $3 500 000, ya que el Banco de Sonora le aplicó un descuento comercial.

CD3.51
El administrador de la compañía papelera Gabo S.A. solicita un préstamo al banco INVURSA de $13 500 000 a un plazo de 18 meses, con una tasa de descuento de 1.2% mensual.
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad en realidad recibe el administrador?

Datos
$M = \$13\,500\,000$
$n = 18$ meses
$d = 1.2\%$ mensual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 13500000(18)(0.012) = \$2916000$$

La cantidad que recibe el administrador es de:
$$C = M - D = 13500000 - 2916000 = \$10584000$$

CD3.52
El banco Invursa cobra 7% de descuento bancario en préstamos a largo plazo. Juan Luis Trejo necesita $40 000, para pagarlos con intereses en 6 años. ¿Qué cantidad debe solicitar en préstamo y cuánto paga de interés?

Datos
$T = 7\%$ anual
$M = \$40\,000$
$n = 6$ años
Incógnitas: C e I

$$C = M(1 - nd)^{-1} = 40000[1 - (0.07)(6)]^{-1} = \$68965.52$$
$$I = M - C = 68965.52 - 40000 = \$28965.52$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tasa de rendimiento

CD3.53
Bansur aplica un descuento de $640 120 a la contadora Pamela Alfaro por un préstamo a 6 meses con una tasa de descuento de 19% anual, por la compra de remodelación de su despacho. ¿Cuál es la tasa de rendimiento?

a) Calculamos el monto
Datos
$d = 19\%$ anual
$D = \$640\ 120$
$n = 6$ meses

$$M = \frac{D}{dn} = \frac{640120}{0.19(6/12)} = \frac{640120}{0.095} = \$6\,738105.26$$

b) Calculamos el valor descontado:

$$C = M - D$$
$$C = 6\,738105.26 - 640120$$
$$C = \$6097985.26$$

c) Se calcula el valor de la tasa de rendimiento

$$R = \frac{M - C}{Cn}$$
$$R = \frac{6\,738105.26 - 6097\,985.26}{6097\,985.26(6)}$$
$$R = \frac{640119.99}{3840\,719.98}$$
$$R = 0.0175$$
$$R = 1.75\% \text{ mensual}$$
$$R = 20.99\% \text{ anual}$$

CD3.54
¿Cuál es la tasa de rendimiento, si el valor descontado a los 11 meses es de $22 948, y el monto de $24 000?

Datos
$M = \$24\ 000$
$C = \$22\ 948$
$n = 11$ meses
Incógnita: R

$$R = \frac{M - C}{Cn}$$
$$R = \frac{24000 - 22948}{22948(11)}$$
$$R = \frac{1052}{252428}$$
$$R = 0.0041675$$
$$R = 0.417\% \text{ mensual}$$
$$R = 5.0\% \text{ anual}$$

CD3.55
El abogado Amando Suárez Copel solicita un préstamo por una determinada cantidad de dinero. El plazo es de 9 meses y la tasa de descuento de 19%. Calcular la tasa mensual de rendimiento

Datos
$d = 19\%$
$n = 9$ meses
Incógnita: R

$$R = \frac{1}{1 - nd}$$
$$R = \frac{0.19/12}{(0.19/12)(9)}$$
$$R = \frac{0.0158333}{0.8575}$$
$$R = 0.0184645$$
$$R = 1.84645\% \text{ mensual}$$
$$R = 22.157\% \text{ anual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.56
El Banco IXE-MEX cobra el 12% de descuento bancario en préstamos a corto plazo. ¿Qué interés simple le cobra el Banco IXE-MEX, a la señora Ana Lucía Vega por un préstamo de $14 000 a un plazo de 6 meses?

Datos
d =12%
n = 6 meses
Incógnita: R

$$R = \frac{1}{1 - nd}$$
$$R = \frac{0.12/12}{(0.12/12)(6)}$$
$$R = \frac{0.01}{0.94}$$
$$R = 0.01064$$

Solución alternativa:
$$M = \frac{C}{1 - dn}$$
$$M = \frac{14000}{1 - (0.12)(6/12)}$$
$$M = \frac{14000}{0.94}$$
$$M = \$14893.61$$
$$I = M - C$$
$$I = 14893.61 - 14000$$
$$I = \$893.61$$
$$R = \frac{I}{Cn}$$
$$R = \frac{893.61}{14000(6)}$$
$$R = 0.010638 \cong 0.01064$$

Valor de vencimiento

CD3.57
El doctor Jerry Alfaro descontó en el banco un pagaré por el cual recibió la cantidad de $19 167, a una tasa de descuento de 20% anual. El vencimiento del pagaré fue 6 meses después de su descuento. ¿Cuál sería el valor del documento en la fecha de su vencimiento?

a) Calculamos el descuento
C = $19 167
n = 6 meses
d = 20% anual
d = 0.20/12= 0.0166

$$D = \frac{Cnd}{1 - dn}$$
$$D = \frac{(19\,167)(6)(0.01666)}{1 - (6)(0.0166)}$$
$$D = \frac{1916.7}{0.9}$$
$$D = \$21472.53$$

b) Calcular el valor del monto
$M = C + D = 19167 + 2129.66 = \$21296.66$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.58
Encontrar el valor de un pagaré si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $19 540, a una tasa de descuento de 18% anual.

Datos
$C = \$19\,540$
$n = 6$ meses
$d = 18\%$ anual
$d = 0.015$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{19\,540}{1-(6)(0.015)}$$
$$M = \frac{19\,540}{0.91}$$
$$M = \$214\,72.53$$

CD3.59
Calcular el valor de un pagaré, si 8 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $8 450, a una tasa de descuento de 20% anual.

Datos
$C = \$8\,450$
$n = 8$ meses
$d = 20\%$ anual
$d = 0.016666$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{8\,450}{1-(8)(0.016666)}$$
$$M = \frac{8\,450}{0.866}$$
$$M = \$9\,750$$

CD3.60
La señora Lucia Vega solicita un préstamo a un banco y éste le entrega la cantidad de $10 000, para pagar en 13 meses, a una tasa de descuento de 22% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

Datos
$C = \$10\,000$
$n = 13$ meses
$d = 22\%$ anual
$d = 0.01833$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{10\,000}{1-(13)(0.01833)}$$
$$M = \frac{10\,000}{0.76166}$$
$$M = \$13129.10$$

CD3.61
El señor Duran solicita un préstamo al banco BANCA y éste le entrega la cantidad de $20 000, para pagar en 12 meses, a una tasa de descuento de 23% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

Datos
$C = \$20\,000$
$n = 12$ meses
$d = 23\%$ anual
$d = 0.019166$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{20\,000}{1-(12)(0.019166)}$$
$$M = \frac{20\,000}{0.77}$$
$$M = \$25\,974.03$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.62
El profesor de matemáticas descontó en el banco un pagaré por el cual recibió la cantidad de $16 766, a una tasa de descuento de 23% anual. El vencimiento del pagaré es 6 meses después de su descuento. ¿Cuál sería el valor del documento en la fecha de su vencimiento?

Primero calculamos el descuento

$C = \$16\ 766$
$d = 23\%$ anual
$d = 0.23/12 = 0.019166$
$n = 6$ meses
Incógnita: D

$$D = \frac{Cnd}{1 - dn}$$
$$D = \frac{(16\ 766)(6)(0.019166)}{1 - (6)(0.019166)}$$
$$D = \$2\ 178.63$$

Ahora se calcula el valor del monto
$$M = C + D$$
$$M = 16766.00 + 2177.77$$
$$M = \$18\ 944.63$$

CD3.63
Encontrar el valor de un pagaré, si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $9 540, a una tasa de descuento de 20% anual.

Datos
$C = \$9\ 540$
$n = 6$ meses
$d = 20\%$ anual
$d = 0.016667$ mensual
Incógnita: M

$$C = M(1 - nd)$$

CD3.63 cont.
Despejando M de la ecuación anterior se obtiene:

$$M = \frac{C}{1 - nd}$$
$$M = \frac{9\ 540}{1 - (6)(0.016667)} = \$10\ 600$$

CD3.64
La publicista Antonia Villagrán solicita un préstamo a un banco y éste le entrega la cantidad de $8 000, para pagar en 12 meses, a una tasa de descuento de 23% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

Datos
$C = \$8\ 000$
$n = 12$ meses
$d = 23\%$ anual
$d = 0.23/12 = 0.019166$

$$M = \frac{C}{1 - nd} = \frac{8000}{1 - (12)(0.019166)} = \$10389.61$$

Tasa de descuento

CD3.65
El dueño de la tintorería De Héctor vendió a un banco un pagaré 3 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $18 355 y recibió del banco la cantidad de $16 835. Encontrar la tasa de descuento.

Datos
$C = \$16\ 835$
$M = \$18\ 355$
$n = 3$ meses

$$D = M - C = 18355 - 16835 = \$1\ 520$$
$$d = \frac{D}{Mn} = \frac{1\ 520}{(18\ 355)(3)} = \frac{1\ 520}{55\ 065} = 0.0276$$
$$d = 2.76\% \text{ mensual}$$
$$d = 33.12\% \text{ anual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.66
El dueño de la panificadora Trigo vendió a un banco un pagaré 6 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $19 355 y recibió del banco la cantidad de $17 855. Encontrar la tasa de descuento.

Datos
$C = \$17\,855$
$M = \$19\,355$
$n = 6$ meses

$$D = M - C = 19355 - 17855 = \$1500$$

$$d = \frac{D}{Mn} = \frac{1\,500}{(19355)(6)} = \frac{1500}{116\,130} = 0.0129$$

$$d = 1.29\% \text{ mensual}$$

$$d = 15.5\% \text{ anual}$$

CD3.67
El señor Chavarría firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $21 240.50. ¿Cuál es la tasa de descuento?

Datos
$M = \$200\,000$
$D = \$21\,240.50$
$n = 8$ meses
Incógnita: d

$$d = \frac{D}{Mn} = \frac{21240.50}{(200000)(8)} = 0.0118$$

$$d = 1.18\% \text{ mensual}$$

$$d = 14.16\ \% \text{ anual}$$

CD3.68
Encontrar la tasa de rendimiento de un préstamo solicitado por el administrador. Adrián Salvatorio, a pagar en 6 meses, con una tasa de descuento de 18% anual.

Datos
$d = 18\%$ anual
$d = 0.18/12 = 0.015$ mensual
$n = 6$ meses

$$R = \frac{d}{1 - dn} = \frac{(0.015)}{1 - (0.015)(6)} = 0.01648$$

$$R = 1.648\% \text{ mensual}$$

$$R = 19.78\% \text{ anual}$$

CD3.69
Un banco descuenta un pagaré de $55 000, con vencimiento en 7 meses y una tasa de descuento de 22%. ¿Qué tasa de rendimiento obtiene en realidad el banco?

Datos
$d = 22\%$ anual
$n = 7$ meses

$$R = \frac{d}{1 - dn} = \frac{(0.22/12)}{1 - (0.22/12)(7)} = 0.02103$$

$$R = 2.103\% \text{ mensual}$$

$$R = 25.23\% \text{ anual}$$

CD3.70
Un banco del Bajío descuenta un pagaré de $150 000, con vencimiento en 9 meses y una tasa de descuento de 24%. ¿Qué tasa de rendimiento obtiene en realidad el banco?

Datos
$d = 24\%$ anual
$n = 9$ meses

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.70 cont.

$$R = \frac{d}{1 - dn} = \frac{(0.24/12)}{1 - (0.24/12)(9)} = 0.02439$$

$R = 2.439\%$ mensual

$R = 29.27\ \%$ anual

Plazo

CD3.71
La compañía Londres S. A. descuenta un pagaré por el cual recibe $28 879, a una tasa de descuento del 30% anual. ¿Cuánto tiempo falta para el vencimiento del pagaré, si éste tiene valor nominal de $70 000?

Datos
$M = \$70\ 000$
$C = \$28\ 879$
$d = 30\%$ anual

$$D = M - C = 70000 - 28879 = \$41\,121$$

$$n = \frac{D}{Md} = \frac{41121.00}{70000(0.30)} = 1.95814$$

Plazo = 1 año, 11 meses y 15 días

CD3.72
La casa de ropa Adrianos descuenta un pagaré por el cual recibe $29 887, a una tasa de descuento del 26% anual. ¿Cuánto tiempo falta para el vencimiento del pagaré si éste tiene valor nominal de $60 000?

Datos
$M = \$60\ 000$
$C = \$29\ 887$
$d = 26\%$ anual

$$D = M - C = 60000 - 29887 = \$30113$$

$$n = \frac{D}{Md} = \frac{30\,113}{60000(0.26)} = 1.93$$

Plazo = 1 año, 11 meses y 5 días

CD3.73
Encontrar la fecha en que se descontó un pagaré de $34 000 con vencimiento el 12 de julio del presente año. Como el descuento es comercial el banco descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $3 670, con una tasa de descuento del 26% anual.

Datos
$M = \$34\ 000$
$D = \$3\ 670$
$d = 26\%$ anual

$$n = \frac{D}{Md} = \frac{3\,670}{34\,000(0.26)} = 0.4151$$

$n = (0.4151)(360)$

$n = 149.45$ días $\cong$ 149

$n = 4$ meses 29 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Pagaré

CD3.74
Encontrar el valor descontado del siguiente pagaré a Hielo del Atlántico S. A., el 15 de julio de 2006 en un banco que ofrece una tasa de descuento del 14%.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 15 de Marzo de 2014 $900 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
Hielo del Atlántico S.A. en México D.F.
el día 15 de Septiembre de 2014 la cantidad de Novecientos mil
pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción en mercancía
La suma anterior causará intereses 24% anual hasta la fecha de vencimiento.
En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir
48% anual **por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.**

Nombre Oscar Calva Montes
Domicilio Av. Pacífico 56481
Colonia Cafetalera
Ciudad México D.F. Acepto (amos)
C. P. 04836

a) Calcular el valor de vencimiento del pagaré
Datos
$C = \$900\,000$
$n = 6$ meses
$T = 24\%$ anual
$i = 0.02$
Incógnitas: I y M

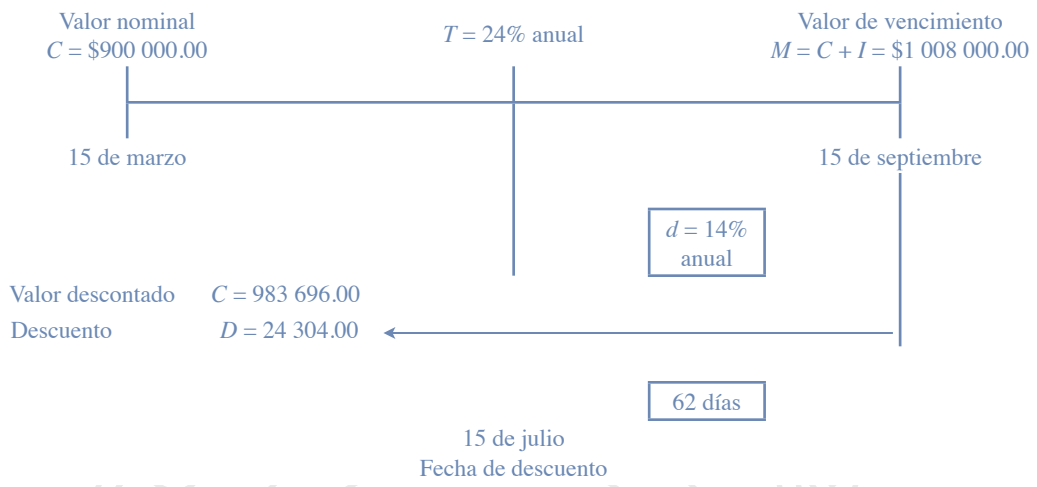
$$I = Cni = 900000(6)(0.24/12) = \$108000$$
$$M = C + I = 900000 + 108000 = \$1008000$$

b) Calcular el descuento y el valor descontado (valor efectivo)
Datos
$M = \$1\,008\,000$
$d = 14\%$ anual
$n = 62$ días
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 1008000(62/360)(0.14) = \$24304$$
$$C = M - D = 1008000 - 24304 = \$983696$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.74 cont.



CD3.75

Encontrar el valor descontado del siguiente pagaré, a la compañía Kolvi S.A., el 30 de agosto de 2006 en un banco que ofrece una tasa de descuento de 18%.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 30 de Marzo de 20 13 $1 300 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
Compañía de Kolvi S.A. en Puebla, Pue.
el día 30 de Noviembre de 20 13 la cantidad de
Un millón trescientos mil pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción en material
La suma anterior causará intereses 18 % anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 48 % anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Mauricio Solís Martínez
Domicilio Calle 57 Oriente
Colonia Centro
Ciudad Puebla, Pue.
C. P. 08765

Acepto (amos)

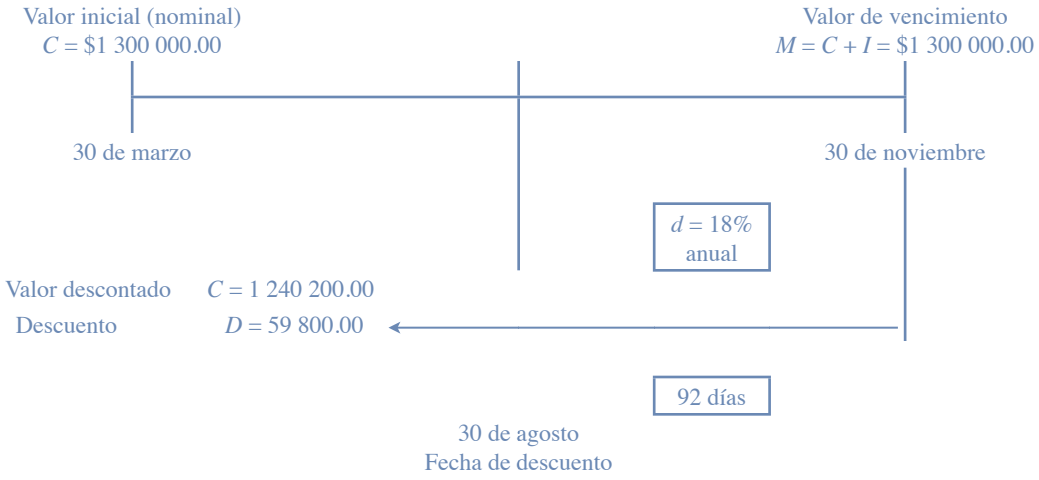
No es necesario calcular el valor de vencimiento del pagaré, porque éste no indica la tasa de interés a pagar. Entonces se procede a calcular el descuento y el valor descontado (valor efecto), sabiendo que el valor de vencimiento es igual al valor nominal.

Datos
$M = \$1\ 300\ 000$
$d = 18\%$ anual
$n = 92$ días
Incógnitas: D y C

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.75 cont.

$$D = Mnd = 1300000(92/360)(0.18) = \$59800$$
$$C = M - D = 1300000 - 59800 = \$1240200$$



CD3.76
El agrónomo Javier Domínguez Pedrosa firmó un pagaré a la tienda de fertilizantes Viarsa con valor de $800 000 pagaderos a 9 meses, con una tasa de interés de 20%. ¿Cuál es el valor descontado del pagaré 2 meses antes de su vencimiento con la misma tasa de descuento?

Datos
C = $800 000
n = 9 meses
T = 20 % anual
Incógnita: M

a) $M = C(1+ni) = 800000\left[1+(9/12)(0.20)\right] = \$920000$

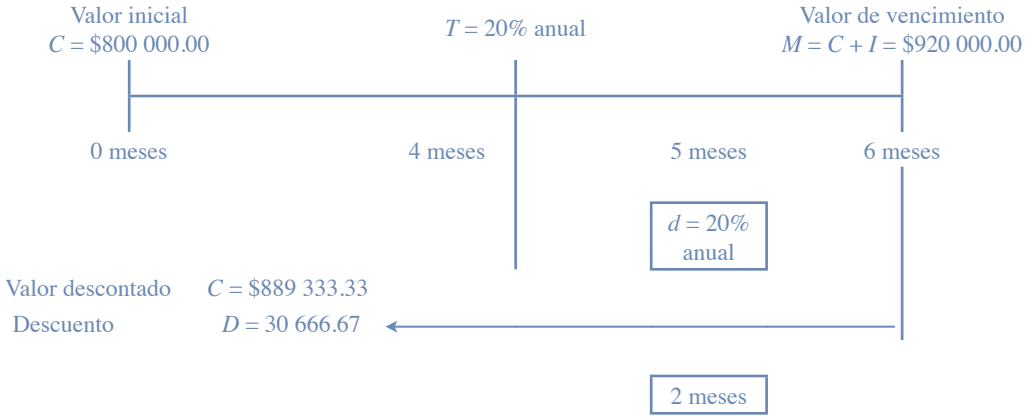
b) Calcular el descuento y el valor descontado.

Datos
M = $920 000
n = 2 meses
d = 20% anual

$$D = Mnd = 920000(2/12)(0.20) = \$30666.67$$
$$C = M - D = 920000 - 30666.67 = \$889333.33$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.76 cont.



CD3.77

Del siguiente pagaré encontrar el valor de vencimiento. Si este pagaré se liquidó 12 días después de su vencimiento, calcular el interés moratorio y la cantidad a pagar.

Documento 1 de 1 Núm._____

México D.F. a 14 de enero de 2014 $ 348 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de Sr. Juan Barreda Suarez en México D.F.
el día 26 de Noviembre de 2014 la cantidad de
trescientos cuarenta y ocho mil pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción

La suma anterior causará intereses 20% anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 45% anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Juan Luis Herrera Rosales
Domicilio Av. Coyoacán 56481
Colonia Árbol de Fuego
Ciudad México D.F.
C. P. 04814

Acepto (amos)

Datos
C = $348 000
n = 316 días
d = 20% anual
Incógnitas: M y Im

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.77 cont.

a) El valor de vencimiento del pagaré es:

$$M = 348000\left[1+\left(\frac{0.20}{360}\right)(316)\right] = \$\ 409093.33$$

b) Interés moratorio

$$Im = 409\,093.33\left[\left(\frac{0.45}{360}\right)(12)\right] = \$6\,136.40$$

Cantidad a pagar = (capital + intereses ordinarios) + intereses moratorios
Cantidad a pagar = 409 093.33 + 6136.40 = $415 229.73

CD3.78
Del siguiente pagaré, calcular la cantidad que pidió prestada el señor Balboa a la señora Camargo y calcular el valor presente del documento al 20 de septiembre.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 14 de Febrero de 20 14 $ 1 200 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
la señora Sonia Camargo Dorantes en México D.F.
el día 26 de diciembre de 20 14 la cantidad de un millóm doscientos mil pesos 00/100

Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción _____
La suma anterior causará intereses 25% anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 48% anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Joaquín Balbia Gaytán
Domicilio Jacaranda 81
Colonia Arboledas
Ciudad México D.F.
C. P. 04814

Acepto (amos)

a) Del 14 de febrero (hoy) al 26 de diciembre transcurren 315 días.

$$C = 1\,200000\left[1+\left(\frac{0.25}{360}\right)(315)\right]^{-1} = \$984615.38$$

b) Del 20 de septiembre al 26 de diciembre hay 97 días.

$$VP = 1200000\left[1+\left(\frac{0.25}{360}\right)(97)\right]^{-1} = \$\,1124268.05$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas complementarios
Parte I

CD-I-3.1
¿Qué interés produce un capital de $76 600 a pagarse dentro de 13 semanas a una tasa de interés simple de 12% anual?

Datos
C = $76 600
T = 12% anual
n = 13 semanas
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/52)$$
$$I = 76600(0.12)(13/52)$$
$$I = 76600(0.12)(0.25)$$
$$I = 76600(0.03)$$
$$I = \$2298$$

CD-I-3.2
Encontrar el interés exacto que se paga por un préstamo de $16 350, a 11.52% en 240 días.

Datos
C = $16 350
T = 11.52% anual
n = 240 días
Incógnita: Ie

$$Ie = C(T/100)(n/365)$$
$$Ie = 16350(0.1152)(240/365)$$
$$Ie = 16350(0.1152)(0.00031561)$$
$$Ie = 16350(0.07574)$$
$$Ie = \$1238.48$$

CD-I-3.3
El arquitecto Juárez recibe un préstamo de $48 750 a 2 años. Si la tasa de interés es de 1.2% bimestral, ¿cuánto pagará dentro de 2 años?

La tasa y el tiempo se expresan en forma bimestral.

Datos
C = $48 750
T = 1.2% bimestral
t = 0.012 bimestral
n = 2 años
n = 12 bimestres

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 48750\left[1+(0.012)(12)\right]$$
$$M = 48750\left[1+(0.144)\right]$$
$$M = 48750\left[1.144\right]$$
$$M = \$55770$$

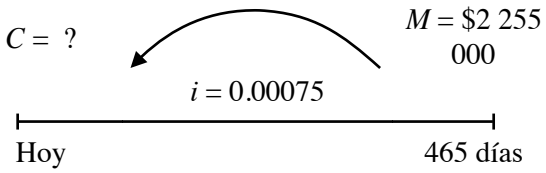
CD-I-3.4
Un banco entrega al señor Juan Álvarez la cantidad de $2 255 000 por un préstamo a 1 año, 3 meses y 15 días, con una tasa de 27% de interés simple. ¿Cuál es el capital inicial del préstamo?

Datos
M = $2 255 000
T = 27% anual
i = 0.00075 diario
n = 1 año, 3 meses y 15 días
n = 360 + 90 + 15
n = 465 días
Incógnita: C

$$C = 2255000\left[1+(0.00075)(465)\right]^{-1}$$
$$C = 2255000\left[1.34875\right]^{-1}$$
$$C = 2255000(0.741427)$$
$$C = \$1671917.88$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-I-3.4 cont.



CD-I-3.5

Una deuda de $8 400 se liquidó el 29 de junio de este año con un cheque cuyo importe es de $9 080. Si la tasa de interés simple es de 11.75%, ¿cuánto tiempo estuvo prestado el dinero?

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i}$$

Datos
C = $8 400
M = $9 080
T = 11.75% anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{9\,080}{8\,400} - 1}{0.1175} = \frac{1.0809 - 1}{0.1175} = 0.688 \text{ años}$$

n = 8 meses, 8 días

Como la tasa se da en forma anual, el periodo también es anual, entonces el resultado se expresa en años.

CD-I-3.6

Se descuenta al profesor Gómez un préstamo de $350 870 a un plazo de 180 días y con una tasa de descuento de 13% anual. Determinar:
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad de dinero recibe?

Datos
M = $350 870
n = 180 días
d = 13% anual
d = 0.0003611 diario
Incógnitas: D y C

CD-I-3.6 cont.

$$D = Mnd$$
$$D = 350870(180)(0.0003611)$$
$$D = 350870(0.065)$$
$$D = \$22806.55$$

La cantidad que recibe el profesor Gómez es de:
$$C = M - D$$
$$C = 350870 - 22806.55$$
$$C = \$328063.45$$

CD-I-3.7

Una compañía desea descontar un documento el 30 de abril con un valor de $683 656 y con una tasa de descuento de 10% anual. Si la fecha de vencimiento es el 30 de junio de este año, ¿cuánto dinero recibirá la compañía?

Datos
M = $683 656
n = 2 meses
d = 10% anual
d = 0.10 / 12 = 0.00833 mensual
Incógnita: C

$$C = M(1 - nd)$$
$$C = 683656[1 - (2)(0.00833)]$$
$$C = 683656(1 - 0.01666)$$
$$C = 683656(0.98334)$$
$$C = \$672266.29$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-I-3.8
Juan Torres recibe la cantidad de $100 000 por un préstamo a pagar en 10 meses y con una tasa de descuento de 10.5% anual. ¿Qué cantidad de dinero debió solicitar prestada?

Datos
C = $100 000
n = 10 meses
d = 10.5% anual
d = 0.15 / 12 = 0.00875 mensual
Incógnita: M

$$M = \frac{C}{1 - nd}$$

$$M = \frac{100000}{1 - (10)(0.00875)}$$

$$M = \frac{100000}{1 - 0.00875}$$

$$M = \frac{100000}{0.9125}$$

$$M = \$109589.04$$

Parte II

CD-II-3.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) El interés significa lo mismo que la tasa de interés FALSE
b) El capital es mayor que el monto FALSE
c) Valor descontado significa lo mismo que descuento FALSE
d) El deudor es la persona que cobra el pagaré FALSE
e) Se depositan $100 el 15 de marzo y se retira el 15 de octubre, entonces el plazo es de 199 días FALSE

Se considera año comercial por realizarse un depósito en una institución financiera (ver apéndice C).

Año comercial (365 días)

Fecha	Día del año
15 de marzo	73
15 de octubre	287
Total de días transcurridos	214

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-II-3.2
Un capital de $5 000 se duplica en 4 años con un tipo de interés simple de:

Datos
$C = \$5\,000$
$M = 2C$
$N = 4$ años
Incógnita: T

$$M = C(1+ni)$$
$$2C = C(1+ni)$$
$$\frac{2C}{C} = 1+ni$$
$$2 = 1+ni$$
$$2-1 = ni$$
$$\frac{1}{n} = i$$
$$i = \frac{1}{4} = 0.25$$

CD-II-3.3
Pedro solicita un préstamo de $38 000 a 2 años. Si la tasa de interés simple es de 3% mensual, ¿cuánto deberá pagar dentro de 2 años? La tasa y el tiempo se expresan en forma bimestral.

Datos
$C = \$38\,000$
$T = 3\%$ mensual
$t = 0.03$ mensual
$n = 2$ años
$n = 24$ meses
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 380000\left[1+(0.03)(24)\right]$$
$$M = 38000\left[1+(0.72)\right]$$
$$M = 38000\left[1.72\right]$$
$$M = \$65360$$

CD-II-3.4
Calcular el valor presente de $30 000, pagaderos a 18 meses, con tasa de interés simple del 12%.

Datos
$M = \$30\,000$
$T = 12\%$ anual
$i = 0.01$mensual
$n = 18$ meses
Incógnita: VP

$$VP = 30000\left[1+(0.12/12)(18)\right]^{-1}$$
$$VP = 30000\left[1+(0.01)(18)\right]^{-1}$$
$$VP = 30000(1.18)^{-1}$$
$$VP = 30000(0.8474)$$
$$VP = \$25423.73$$

CD-II-3.5
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $26 500, si el capital invertido es de $18 700 a una tasa de 6.8% anual?

Datos
$C = \$18\,700$
$M = \$26\,500$
$T = 6.8\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C}-1}{i}$$
$$n = \frac{\frac{26\,500}{18\,700}-1}{0.068} = \frac{1.4171-1}{0.068} = 6.134 \text{ años}$$

$n = 6$ años, 1 mes y 18 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-II-3.6
Una compañía solicita $500 000 de préstamo a un banco, a 2 años con una tasa de descuento de 12% anual.

a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad la compañía por el préstamo?

Datos
$M = \$500\,000$
$n = 2$ años
$d = 12\ \%$ anual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd$$
$$D = 500000(2)(0.12)$$
$$D = 500000(0.24)$$
$$D = \$120000$$

La cantidad que recibe la compañía es de:
$$C = M - D$$
$$C = 500000 - 120000$$
$$C = \$380000$$

CD-II-3.7
¿Cuánto recibe la señora Josefina por un pagaré de $45 600, 4 meses antes de su vencimiento, con una tasa de descuento del 15% anual?

Datos
$M = \$45\,600$
$n = 4$ meses
$d = 15\%$ anual
$$d = \frac{0.15}{12} = 0.0125 \text{ mensual}$$
Incógnita: C

CD-II-3.7 cont.
$$C = M(1 - nd)$$
$$C = 45600[1 - (4)(0.0125)]$$
$$C = 45600(1 - 0.05)$$
$$C = 45600(0.95)$$
$$C = \$43320$$

CD-II-3.8
Calcular la tasa de rendimiento, si el valor descontado a los 12 meses es de $12 948, y el monto de $15 000

Datos
$C = \$12\,948$
$n = 12$ meses
$M = \$15\,000$
Incógnita: R

$$R = \frac{M - C}{Cn}$$
$$R = \frac{15000 - 12948}{(12948)(12)}$$
$$R = \frac{2052}{155376} = 0.0132$$
$$R = 1.32\% \text{ mensual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-II-3.9
Hallar el valor de un pagaré, si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $6 540, a una tasa de descuento del 18% anual.

Datos
C = $6 540
d = 18% anual
d = 1.5% mensual
n = 6 meses
Incógnita: M

$$M = C(1+nd)$$
$$M = 6540\left[1+(6)(0.015)\right]$$
$$M = 6540\left[1+(0.09)\right]$$
$$M = 6540\left[1.09\right]$$
$$M = \$7128.60$$

CD-II-3.10
Una persona vendió a un banco un pagaré 3 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $8 355 y recibió del banco la cantidad de $6 835. Encontrar la tasa de descuento.

Datos
M = $8 355
C = $6 835
n = 3 meses
Incógnita: D y d

$$D = M - C$$
$$D = 8355 - 6835$$
$$D = 1520$$

CD-II-3.10 cont.

$$d = \frac{D}{Mn}$$
$$d = \frac{1520}{(8355)(3)}$$
$$d = \frac{1520}{25065}$$
$$d = 0.0606 \text{ mensual}$$
$$d = 6.06\% \text{ mensual}$$

Recursos académicos en línea © GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte III

CD-III-3.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) La tasa de interés activa es la que cobran los bancos ____TRUE____
b) La tasa de interés pasiva es la que pagan los bancos ____TRUE____
c) El valor de vencimiento es igual al valor nominal más los intereses ____TRUE____
d) El pagaré es un compromiso por escrito para el pago de una determinada cantidad de dinero ____TRUE____
e) El deudor u otorgante es la persona que cobra el pagaré ____TRUE____

CD-III-3.2
Don Pablo abre una cuenta de inversión en Bansur por la cantidad de $2 000. Después de un año recibe $2 960. Por su inversión calcula:
a) El interés
b) La tasa de interés
c) El tipo de interés

Datos
$C = \$2\,000$
$M = \$2\,960$
$n = 1$ año
Incógnitas: I, i y T
a)
$$I = M - C$$
$$I = 2960 - 2000$$
$$I = \$960$$
b)
$$i = \frac{I}{Cn}$$
$$i = \frac{960}{(2000)(1)}$$
$$i = 0.48 \text{ anual}$$
c)
$$T = 48\% \text{ anual}$$

CD-III-3.3
La señora Prudencia solicita a una institución financiera un préstamo de $6 500 a una tasa de interés simple de 18% con un plazo de 55 días. Calcula el interés comercial y exacto.

Datos
$C = \$6\,500$
$T = 18\%$ anual
$n = 55$ días
Incógnitas: Io e Ie

$$Io = C\left(\frac{T}{360}\right)(n)$$
$$Io = 6500\left(\frac{0.18}{360}\right)(55)$$
$$Io = 6500(0.0005)(55)$$
$$Io = 6500(0.0275)$$
$$Io = \$178.75$$

$$Ie = C\left(\frac{T}{365}\right)(n)$$
$$Ie = 6500\left(\frac{0.18}{365}\right)(55)$$
$$Ie = 6500(0.000493)(55)$$
$$Ie = 6500(0.02712)$$
$$Ie = \$176.28$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-III-3.4
Fernando Barrales depositó en su cuenta de ahorros $8 000 el 5 de marzo y el 27 marzo lo retiró. La tasa de interés simple es de 7.7% anual. ¿Qué cantidad recibió?

Datos
C = $8 000
T = 7.7% anual
i = 0.000213888
n = 22 días
Incógnita: M

$$M = 8000\left[1+\left(0.077/360\right)\left(22\right)\right]$$
$$M = 8000\left[1+\left(0.00021388\right)\left(22\right)\right]$$
$$M = 8000\left(1+0.004705555\right)$$
$$M = \ 8000.00\left(1.004705556\right)$$
$$M = \$8037.64$$

CD-III-3.5
Hallar el valor presente de $48 230 de un pagaré que vence dentro de 6 meses, si la tasa de interés simple es de 6%.

Datos
M = $48 230
T = 6% anual
i = 0.005 mensual
n = 6 meses
Incógnita: VP

$$VP = 48230\left[1+\left(0.06/12\right)\left(6\right)\right]^{-1}$$
$$VP = 48230\left[1+\left(0.05\right)\left(6\right)\right]^{-1}$$
$$VP = 48230\left(1.03\right)^{-1}$$
$$VP = 48230\left(0.9708\right)$$
$$VP = \$46825.24$$

CD-III-3.6
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $35 650, si el capital invertido es de $29 780 a una tasa de 5.4% anual?

Datos
M = $35 650
C = $29 780
T = 5.4% anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C}-1}{i}$$
$$n = \frac{\frac{35\,650}{29\,780}-1}{0.054} = \frac{1.1971-1}{0.054} = 3.65 \text{ años}$$

n = 3 años, 7 meses y 24 días

CD-III-3.7
El señor Porfirio solicita un préstamo de $8 000 a una institución bancaria, a un plazo de 9 meses, con una tasa de descuento de 0.85% mensual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad el señor Porfirio por el préstamo?

Datos
M = $8 000
n = 9 meses
d = 0.85 % mensual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd$$
$$D = 8000\left(9\right)\left(0.0085\right)$$
$$D = 8000\left(0.0765\right)$$
$$D = \$612$$

La cantidad que recibe el señor Porfirio es de
$$C = M - D$$
$$C = M - D$$
$$C = \$7388$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-III-3.8

El arquitecto Mario Aguilar adquirió una deuda de $2 000 hace 6 meses y vence dentro de 12 meses a partir de la contratación. Además hace 4 meses contrajo una nueva deuda de $8 000 a pagarse dentro de 4 meses a partir del día de hoy. Asimismo, también adquirió otra deuda hace 1 mes por $3 000 a pagarse en 6 meses. El día de hoy el acreedor acepta un pago único en efectivo equivalente a las tres deudas, a una tasa de interés de 24%. Si la fecha focal se establece el día de hoy, ¿cuál debe ser el valor del pago único para cancelar sus deudas?

$$X = 2000\left[1+(0.24)(12/12)\right]\left[1+(0.24)(6/12)\right]^{-1}$$
$$+8000\left[1+(0.24)(8/12)\right]\left[1+(0.24)(4/12)\right]^{-1}$$
$$+3000\left[1+(0.24)(6/12)\right]\left[1+(0.24)(5/12)\right]^{-1}$$
$$X = 2000[1.24][1.12]^{-1} + 8000[1.16][1.08]^{-1} + 3000[1.12][1.1]^{-1}$$
$$X = 2000[1.24][0.8928] + 8000[1.16][0.9259] + 3000[1.12][0.9091]$$
$$X = 2000[1.1071] + 8000[1.0740] + 3000[1.0182]$$
$$X = 2214.20 + 8592.00 + 3054.60$$
$$X = \$13860.80$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

GLOSARIO

Acreedor. Es la persona o razón social a la que se debe pagar el dinero que nos han prestado.

Actividad financiera. Costumbre de pagar un rédito por el uso de dinero prestado.

Capital. En términos financieros es una determinada cantidad de dinero que permite ganar más (dinero) en operaciones de préstamo, llamada esta última interés.

Cuentas de inversión. También conocidas como cuentas de ahorro. En estas cuentas las personas pueden hacer depósitos y retiros del capital en cualquier momento (con tan sólo solicitarlo) y los intereses son bajos.

Compra. Acción de adquirir algo a cambio de dinero. También se refiere a un conjunto de bienes y servicios adquiridos en el acto de compra.

Compra a crédito. Compra cuyo importe no se paga en efectivo en el momento de la adquisición, sino que en la propia entidad vendedora o una tercera entidad concede crédito por la suma debida. En bolsa es la adquisición de acciones financiada a través de créditos por una autoridad bursátil.

Compra de contado. Compra cuyo importe se paga en el momento de la adquisición.

Compra a plazos. Contrato de compraventa en el cual el vendedor entrega el bien objeto de la transacción en el momento en que ésta se produce, y el comprador puede postergar sus pagos a futuras cuotas o plazos, pudiendo efectuar uno de estos pagos en el momento de la compra.

Comprador. Persona que adquiere un bien o derecho producto de una operación de compraventa.

Compraventa. Contrato por el que uno de los contratantes (vendedor) se obliga a entregar una cosa determinada y el otro (comprador) a pagar por ella un precio determinado. Asimismo, negocio de objetos que se revenden.

Contado. Procedimiento de cobro o pago que implica la entrega del bien o servicio con contrapartida monetaria en ese mismo momento.

Contrato. Negocio jurídico bilateral por el que dos o más personas físicas o jurídicas se obligan mutuamente a dar, hacer o no hacer algo, surgiendo entre ellas una relación obligatoria.

Crédito. Reputación, fama, prestigio que tiene una persona respecto al cumplimiento de sus obligaciones financieras.

Crédito a clientes. Cantidad que los clientes de una empresa le adeudan en función de los suministros que reciben.

Debe..Adeudar, estar en deuda con otra persona, estar obligado a cumplir una obligación o realizar un pago.

Demora. Retraso en el cumplimiento de una obligación de pago de una deuda, desde el momento en que ésta venció.

Depósito a plazo. Es el dinero depositado en una cuenta bancaria por la persona o razón social; su retiro es en una sola fecha determinada, de común acuerdo por ambas partes.

Descuento. Descuento concedido por las empresas a sus clientes por diversas causas: por pronto pago, por volumen de venta, etc.

Descuento en precios. Reducción en el precio de venta de un producto o servicio por motivos muy diversos: campañas de promoción, ferias, rebajas

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

estacionales, fidelidad del comprador, liquidación de existencias.

Descuento financiero. Operación financiera realizada por las entidades de crédito. Consistente en abonar al prestatario el importe, con rebaja de intereses, de una letra de cambio u otro mercantil antes de la fecha de su vencimiento.

Descuento por pronto pago. Descuento concedido por pagar las mercancías adquiridas al contado o en un plazo menor al establecido en la transacción comercial. Se trata de un porcentaje sobre las ventas que compensan el menor riesgo de insolvencia y la inmediata obtención de liquidez por parte de la empresa. Cuando se trata de descuento sobre compras por pronto pago, se refiere a una modalidad de descuento de proveedores en el que es la empresa la que reduce la cantidad a pagar a sus proveedores por realizar el pago dentro de unos días determinados por estos. Estos descuentos se registran en las cuentas de pérdidas y ganancias bajo el epígrafe de ingresos financieros.

Descuento por volumen de compra. Descuento concedido a la empresa cuando su volumen de compras con un determinado proveedor en un periodo, excede de una cierta cuantía, independientemente del tamaño de los pedidos que haya ido realizando con anterioridad. Estos descuentos se registran en la cuenta de pérdidas y ganancias como un menor importe de la compra que los origina.

Descuento por volumen de venta. Descuento que la empresa concede a sus clientes cuando su volumen de ventas con ellos en un periodo determinado supera una cierta cuantía.

Descuento sobre compras. Descuento concedido a las empresas por sus proveedores por diversas causas: volumen de compras, por pronto pago, etc.

Deuda. Obligación que se ha contraído con un tercero y que se ha de satisfacer. En general, es una obligación de pagar cierta cantidad de dinero.

Deudor. Es la persona o razón social que solicita un dinero prestado y se compromete a pagarlo posteriormente, extendiendo para ello un pagaré.

Dinero. Todo aquello aceptado como medio de pago o medición del valor. Las monedas y billetes de circulación son la forma final adoptadas por las economías como dinero. Es la suma de moneda circulante.

Dinero circulante. Dinero en efectivo, es decir, tesorería que la empresa en un momento determinado tiene como consecuencia de su funcionamiento. Una gestión eficiente de tesorería que maximice su rentabilidad evitando fondos ociosos incrementará el valor de la empresa.

Dinero de plástico. Tarjetas (de crédito, débito, de prepago, etc.) que se utilizan como medio de pago sustituyendo al dinero.

Dinero en circulación. Suma del efectivo en manos del público compuesto de billetes y moneda metálica de curso legal más los depósitos de todo tipo en el sistema bancario.

Empeñar. Entregar algo en prenda como garantía del pago de una deuda.

Empresa. Unidad económica de producción y decisión que, mediante la organización y coordinación de una serie de factores (capital y trabajo), persigue obtener un beneficio produciendo y comercializando productos o prestando servicios en el mercado.

Fábrica. Recinto en el que se instalan máquinas y otro tipo de equipos conjunta y ordenadamente para producción en masa de un determinado producto u objeto o para la transformación industrial de una fuente de energía.

Fabricar. Producir bienes o servicios mediante la transformación de materias primas o productos intermedios, valiéndose de una maquinaria y organización determinadas, de unos sistemas respectivos y haciéndolo en gran volumen.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Factura. Documento o recibo entregado por el vendedor al comprador como prueba de que éste ha adquirido una mercancía determinada o recibo de un servicio a un precio dado, y que representa, por tanto, el derecho de cobro a favor del vendedor. En la factura se especifican datos personales de ambos, las características de los productos, así como la fecha y el precio de compra.

Moneda en circulación. Son las monedas constantes y sonantes (aleaciones de metales). También a los billetes se les llama papel moneda.

Rédito. Renta de un capital.

Tanto por uno. Es el rendimiento que produce una moneda.

Tasa. También llamada tipo de interés o tanto por ciento, es el rendimiento que producen 100 unidades de moneda en una unidad de tiempo.

Tiempo. Es el número de periodos (tiempo predeterminado) que dura el préstamo de un capital.

En el país las tasas de interés que se utilizan en las operaciones comerciales y financieras no permanecen constantes por periodos grandes, por lo que es necesario fijar tasas de referencia. Las tasas de referencia más utilizadas son la Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE), el Costo Porcentual Promedio de Capitalización (CPP), el Costo de Capitalización a Plazo (CCP) y la tasa de los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES).

- **Tasa de interés activas**. Son las tasas que los bancos *cobran* por los diferentes tipos de crédito a los usuarios de éstos.

- **Tasa de interés pasivas**. Son las tasas de interés que los bancos *pagan* a los ahorradores e inversionistas.

- **Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE)**. Es el punto de equilibrio entre las tasas de interés pasivas y activas. Se obtienen a partir de la información que proporciona diariamente al Banco de México (BANXICO) de las diferentes instituciones bancarias del país (por lo menos seis), a las 12:00 horas de la ciudad de México. Las tasas son precios reales que los bancos están dispuestos a pedir prestado o prestar a BANXICO. Existen diferentes plazos de la TIIE, el más usual es de 28 días.

- **Costo Porcentual Promedio de Capitalización (CPP)**. Mide el costo al cual se fondean los bancos para cubrir sus pasivos. El Banco de México es el encargado de calcularlo y publicarlo el día 20 de cada mes en el *Diario Oficial de la Federación*.

- **Costo de Capitalización a Plazo (CCP)**. Es la estimación mensual del costo de capitalización a plazo por concepto de la tasa de interés de los pasivos a plazo en la moneda nacional a cargo de la banca múltiple y éste se utiliza para la tasa de interés de créditos en pesos. El Banco de México es el encargado de calcularlo y publicarlo los días 21 y 25 de cada mes en el *Diario Oficial de la Federación*.

- **Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES)**. Son instrumentos financieros de inversión cuya tasa de interés tiene un plazo de 28, 90 o 180 días y por lo regular, dicha tasa se utiliza como tasa de referencia.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.1
$7.50

3.2
$367 500

3.3
a) $530.83
b) $523.56

3.4
2.83% mensual

3.5
1.9% mensual

3.6
$3 220

3.7
$2 537 333.20

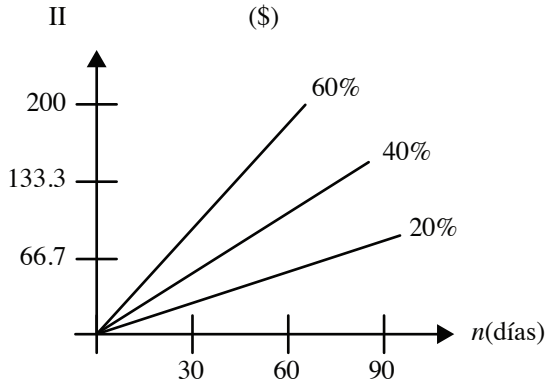
3.8
$9 195.40

3.9
$27 743

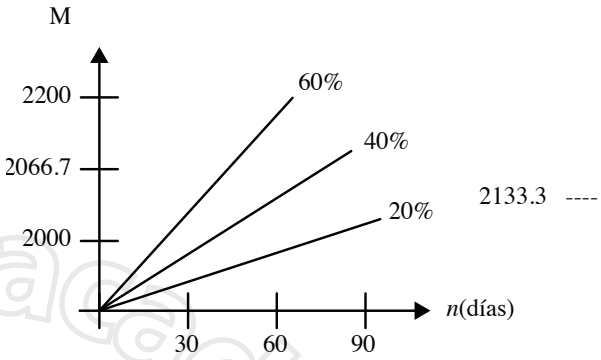
3.10
10 años

3.11
2 años, 9 meses y 10 días

3.12



3.13



3.14
$2 663 175

3.15
a) $ 284.93
b) $ 288.89
c) $ 280.55
d) $ 284.89

3.1
a) 335 días
b) 324 días

3.17
a) 176 días
c) 175 días

3.18
$425

3.19
$5 138

3.20
$14 356.21

3.21
$3 942

3.22
I = $1 440
M = $13 440

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.23
$22 720

3.24
$100 329.00

3.25
$1 200

3.26
$161.87

3.27
$1 208.05

3.28
$5 219.35

3.29
$13 200

3.30
$2 994.12

3.31
$153.57

3.32
$12 568

3.33
$697.66

3.34
a) $14 000
b) $11 000

3.35
$690

3.36
$543 630.47

3.37
$191 081.25

3.38
33.918% anual

3.39
76% anual

3.40
$21 686

3.41
$4 695.65

3.42
72.22% anual

3.43
25% anual

3.44
2 meses y 29 días

3.45
1 mes y 18 días

3.46
$1 912.50

3.47
El señor José Antonio Solís Díaz es el deudor y el señor Armando González Carrasco es el acreedor o beneficiario del pagaré. El valor nominal del documento es por $500 000. El 14 de febrero de 2007 es la fecha en que se expidió el documento y el 26 de diciembre de 2007 es la fecha de vencimiento. El plazo es de 315 días.

3.48
$631 250

3.49
Interés moratorio = $8 000,
Cantidad a pagar = $639 250

3.50
$33 312 y $33 438.34

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.51
1.7195% mensual

3.52
10.09% mensual

3.53
28.27%

3.54
$996.29

3.55
10%

3.56
45 días

3.57
$349.80

3.58
$1 830

3.59
$601.40

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas a resolver

Interés

CD3.1
La contadora Alma invierte $5 000 y al término de un año recibe $5 250 por su inversión. Calcular:
a) El interés
b) La tasa de interés
c) El tipo de interés

CD3.2
El señor Martínez solicitó un préstamo al ISSSTE de $18 500 al 9% anual durante un año. Calcular el interés simple a pagar.

CD3.3
¿Cuál es la tasa de interés por un préstamo de $15 000 a un año, si se pagaron intereses de $1 900?

CD3.4
Se prestó un capital de $4 950 000 a un fabricante de juguetes durante tres años con un interés preferencial de $1 860 000. ¿Cuál fue la tasa de interés pactada?

CD3.5
El señor Tomas Baroja le prestó a su cuñado la cantidad de $3 550 a una tasa de interés simple de 1.5% mensual, por 21 días. ¿Cuánto recibirá de intereses?

CD3.6
Usted compra un automóvil en $399 999 a pagarse en un año, a una tasa de interés simple de 12.4%. Calcular el interés correspondiente al primer mes de pago.

Interés comercial y real

CD3.7
¿Qué interés produce un capital de $1 500 al 4% durante el mes de marzo?

CD3.8
¿Qué interés produce un capital de $8 500, al 4.6% de interés simple, del 18 de mayo de 2012 al 8 de abril de 2013?

CD3.9
¿Qué interés produce un capital de 8 500 pesos, al 16% de interés simple, del 18 de mayo de 2006 al 8 de abril de 2007?

CD3.10
Calcular el interés exacto si el interés ordinario es de $189.25.

CD3.11
Calcular el interés ordinario si el interés exacto es de $385.15.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.12
Calcular el interés ordinario con tiempo exacto de $18 500 al 25% anual prestado durante 60 días.

CD3.13
Calcular el interés ordinario con tiempo aproximado de $24 750 al 27% anual prestado durante 180 días.

CD3.14
Calcular el interés exacto de $385.15 con una tasa de interés de 24.32% durante 154 días.

CD3.15
Jesús Martínez depositó en su cuenta de ahorros $3 000 el día 5 de marzo y el día 27 de marzo lo retira. La tasa de interés simple es de 5.7% anual. Calcular el interés comercial y exacto, considerando que el año es bisiesto.

CD3.16
Katia Rodríguez depositó en su cuenta de ahorro $5 000 el 5 de junio y el 27 de junio lo retiró. La tasa de interés simple es de 4.05% anual. Calcular el interés comercial y exacto, considerando el año bisiesto.

CD3.17
Calcular el interés que se debe pagar por un préstamo de $8 000 al 25.2% durante 340 días.

Cálculo del monto

CD3.18
Calcular el monto de un préstamo de $3 150 al 16% de interés simple, durante 1.5 años.

CD3.19
El arquitecto Ignacio Aguilera Hernández consigue un préstamo de $9 000 a 15 bimestres, para comprar una computadora. La tasa de interés simple es del 2% bimestral. ¿Cuánto pagará dentro de 15 bimestres?

CD3.20
El alumno Eduardo Arteaga Mora depositó en su cuenta de ahorros $3 000 el 5 de enero y el 31 de enero lo retiró para comprarse un teléfono celular. La tasa de interés simple es de 4.7% anual. Calcular el monto, considerando que el año es bisiesto.

CD3.21
Calcular el monto de un préstamo personal al banco del ejército de $5 500 a una tasa de interés simple de 24% anual del 3 de septiembre al 28 de diciembre del mismo año, considerando que el año es bisiesto.

CD3.22
Calcular el monto de un préstamo de $18 000 al 26% de interés simple, durante dos años.

CD3.23
¿Qué monto hay que pagar al ISSSTE por un crédito de corto plazo de $49 000 al 9% anual, después de 1 año y 6 meses?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.24
Magaly recibe un préstamo de Alexa para adquirir calzado con valor de $32 500. Acuerda pagar la deuda 4 meses después con una tasa de interés de 24% anual. ¿Cuánto deberá pagar Magaly después de 4 meses?

CD3.25
El comunicador Jesús Miguel deposita $55 000 en un fondo de inversión, que da un rendimiento de 0.9% mensual. Para comprar más equipo para su negocio, decide retirar el depósito 28 días después. ¿Cuánto le entregarán al retirar capital e intereses?

CD3.26
El ingeniero Tomas Aguirre consigue un préstamo de $26 000 a 2 años, para comprar una computadora. La tasa de interés simple es de 3% bimestral ¿Cuánto deberá pagar dentro de 2 años?

CD3.27
Calcular el monto acumulado al 24 de marzo del 2014, de un depósito de $22 600 realizado el 14 de octubre de 2013 en una cuenta que abona una TIIE de 25.5% anual más 5.8 puntos porcentuales. Para solucionar el problema utilice el interés simple ordinario con tiempo aproximado.

Valor presente o actual

CD3.28
Encontrar el valor presente de $18 000, pagaderos a 9 meses, con tasa de interés simple de 10%.

CD3.29
¿Cuál será el valor presente de $25 845.35, pagaderos a 12 meses, con tasa de interés simple del 26%?

CD3.30
Calcular el valor presente de $200 000, pagaderos a 19 meses, con tasa de interés simple del 22%.

CD3.31
Encontrar el valor presente de $23 480 de un pagaré que vence dentro de 6 meses y si la tasa de interés simple es del 6%.

CD3.32
¿Cuánto debe invertir una psicóloga el día de hoy, si la tasa de interés es de 1.75% trimestral, para disponer de $450 000 dentro de tres años?

CD3.33
¿Cuánto debe invertir la señora Andrea Portos el día de hoy, a una tasa de 0.8% simple trimestral para disponer de $23 500 dentro de 4 años?

CD3.34
Don Jacinto pagó $1 525 300, por un préstamo bancario con un plazo a 2 años, 6 meses y 28 días, a una tasa de 17% por la compra de un camión de carga. Encontrar el capital inicial del préstamo.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.35
Una persona compró un automóvil compacto por el cual pagó $212 480 el primero de diciembre y lo vendió el 31 de agosto del año siguiente en $216 500 ¿Es conveniente la compra realizada si la tasa de interés que ofrece el banco es de 0.9% mensual?

Tiempo o plazo

CD3.36
El primero de septiembre se depositan $9 500 en una cuenta bancaria. ¿En cuánto tiempo se acumularían $11 000 a una tasa de interés del 6%?

CD3.37
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $34 500, si el capital invertido es de $28 800 a una tasa de 5.1% anual?

CD3.38
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $5 740, si el capital invertido es de $4 287 a una tasa de 4.5% anual?

CD3.39
Una deuda de $48 000 se liquidó el 11 de octubre con un cheque cuyo importe es de $50 800, y la tasa de interés aplicada de 23.73% ¿Cuánto tiempo estuvo prestado el dinero?

CD3.40
¿Cuánto tiempo debe de transcurrir para que un capital se duplique si la tasa de interés es de 8.5% anual? Como el capital inicial es C; entonces el monto al final del plazo es el doble de C ($M = 2C$).

CD3.41
¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que un capital de $1 500 alcance un monto de $3 000 si la tasa de interés es de 25% anual?

CD3.42
Encontrar el tiempo exacto y aproximado, del día 4 de mayo al 20 septiembre del mismo año.

Descuento simple

CD3.43
¿Cuál es el descuento que se hace a un préstamo de $3 500, a un plazo de 6 meses, con una tasa de descuento simple de 20% anual?

CD3.44
¿Cuál es el descuento que hace Banorte a un préstamo de $19 500, a un plazo de 13 meses, con una tasa de descuento simple de 1.8% mensual?

CD3.45
¿Cuál es el descuento que se hace a un préstamo de $8 300, a un plazo de 8 meses, con una tasa de descuento simple de 24% anual?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.46
¿Cuál es el descuento que hace Banorte a un préstamo de $7 500, a un plazo de 16 meses, con una tasa de descuento simple de 1.5% mensual?

CD3.47
Un banco cobra el 26% de interés por adelantado al señor Cabrera por un préstamo a corto plazo, de $10 000 del 2 de mayo al 30 de octubre del presente año. Calcular el descuento que aplica el banco al señor Cabrera.

CD3.48
Calcular el valor presente de $2 000 a 24% de interés simple a un plazo de 9 meses. ¿Cuál es el descuento que realizó Invemex Banco por el préstamo?

Valor descontado o ganancia

CD3.49
El profesor Arriaga solicita un préstamo a Bansur de $12 000 a un plazo de 13 meses, con una tasa de descuento de 2.2% mensual.
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad en realidad recibe el profesor Arriaga?

CD3.50
La Compañía Electrohogar S.A. solicita $3 500 000 de préstamo al banco de Sonora, a 2 años con una tasa de descuento de 12% anual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad la Compañía Electrohogar S.A., por el préstamo?

CD3.51
El administrador de la compañía papelera Gabo S.A. solicita un préstamo al banco INVURSA de $13 500 000 a un plazo de 18 meses, con una tasa de descuento de 1.2% mensual.
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad en realidad recibe el administrador?

CD3.52
El banco Invursa cobra 7% de descuento bancario en préstamos a largo plazo. Juan Luis Trejo necesita $40 000, para pagarlos con intereses en 6 años. ¿Qué cantidad debe solicitar en préstamo y cuánto paga de interés?

Tasa de rendimiento

CD3.53
Bansur aplica un descuento de $640 120 a la contadora Pamela Alfaro por un préstamo a 6 meses con una tasa de descuento de 19% anual, por la compra de remodelación de su despacho. ¿Cuál es la tasa de rendimiento?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.54
¿Cuál es la tasa de rendimiento, si el valor descontado a los 11 meses es de $22 948, y el monto de $24 000?

CD3.55
El abogado Amando Suárez Copel solicita un préstamo por una determinada cantidad de dinero. El plazo es de 9 meses y la tasa de descuento de 19%. Calcular la tasa mensual de rendimiento

CD3.56
El Banco IXE-MEX cobra el 12% de descuento bancario en préstamos a corto plazo. ¿Qué interés simple le cobra el Banco IXE-MEX, a la señora Ana Lucía Vega por un préstamo de $14 000 a un plazo de 6 meses?

Valor de vencimiento

CD3.57
El doctor Jerry Alfaro descontó en el banco un pagaré por el cual recibió la cantidad de $19 167, a una tasa de descuento de 20% anual. El vencimiento del pagaré fue 6 meses después de su descuento. ¿Cuál sería el valor del documento en la fecha de su vencimiento?

CD3.58
Encontrar el valor de un pagaré si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $19 540, a una tasa de descuento de 18% anual.

CD3.59
Calcular el valor de un pagaré, si 8 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $8 450, a una tasa de descuento de 20% anual.

CD3.60
La señora Lucia Vega solicita un préstamo a un banco y éste le entrega la cantidad de $10 000, para pagar en 13 meses, a una tasa de descuento de 22% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

CD3.61
El señor Duran solicita un préstamo al banco BANCA y éste le entrega la cantidad de $20 000, para pagar en 12 meses, a una tasa de descuento de 23% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

CD3.62
El profesor de matemáticas descontó en el banco un pagaré por el cual recibió la cantidad de $16 766, a una tasa de descuento de 23% anual. El vencimiento del pagaré es 6 meses después de su descuento. ¿Cuál sería el valor del documento en la fecha de su vencimiento?

CD3.63
Encontrar el valor de un pagaré, si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $9 540, a una tasa de descuento de 20% anual.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.64
La publicista Antonia Villagrán solicita un préstamo a un banco y éste le entrega la cantidad de $8 000, para pagar en 12 meses, a una tasa de descuento de 23% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

Tasa de descuento

CD3.65
El dueño de la tintorería De Héctor vendió a un banco un pagaré 3 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $18 355 y recibió del banco la cantidad de $16 835. Encontrar la tasa de descuento.

CD3.66
El dueño de la panificadora Trigo vendió a un banco un pagaré 6 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $19 355 y recibió del banco la cantidad de $17 855. Encontrar la tasa de descuento.

CD3.67
El señor Chavarría firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $21 240.50. ¿Cuál es la tasa de descuento?

CD3.68
Encontrar la tasa de rendimiento de un préstamo solicitado por el administrador. Adrián Salvatorio, a pagar en 6 meses, con una tasa de descuento de 18% anual.

CD3.69
Un banco descuenta un pagaré de $55 000, con vencimiento en 7 meses y una tasa de descuento de 22%. ¿Qué tasa de rendimiento obtiene en realidad el banco?

CD3.70
Un banco del Bajío descuenta un pagaré de $150 000, con vencimiento en 9 meses y una tasa de descuento de 24%. ¿Qué tasa de rendimiento obtiene en realidad el banco?

Plazo

CD3.71
La compañía Londres S. A. descuenta un pagaré por el cual recibe $28 879, a una tasa de descuento del 30% anual. ¿Cuánto tiempo falta para el vencimiento del pagaré, si éste tiene valor nominal de $70 000?

CD3.72
La casa de ropa Adrianos descuenta un pagaré por el cual recibe $29 887, a una tasa de descuento del 26% anual. ¿Cuánto tiempo falta para el vencimiento del pagaré si éste tiene valor nominal de $60 000?

CD3.73
Encontrar la fecha en que se descontó un pagaré de $34 000 con vencimiento el 12 de julio del presente año. Como el descuento es comercial el banco descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $3 670, con una tasa de descuento del 26% anual.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Pagaré

CD3.74

Encontrar el valor descontado del siguiente pagaré a Hielo del Atlántico S. A., el 15 de julio de 2006 en un banco que ofrece una tasa de descuento del 14%.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 15 de Marzo de 2014 $900 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
Hielo del Atlántico S.A. en México D.F.
el día 15 de Septiembre de 2014 la cantidad de Novecientos mil pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción en mercancía
La suma anterior causará intereses 24% anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 48% anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Oscar Calva Montes
Domicilio Av. Pacífico 56481
Colonia Cafetalera
Ciudad México D.F.
C. P. 04836

Acepto (amos)

a) Calcular el valor de vencimiento del pagaré
b) Calcular el descuento y el valor descontado (valor efectivo)

CD3.75

Encontrar el valor descontado del siguiente pagaré, a la compañía Kolvi S.A., el 30 de agosto de 2006 en un banco que ofrece una tasa de descuento de 18%.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 30 de Marzo de 20 13 $1 300 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
Compañía de Kolvi S.A. en Puebla, Pue.
el día 30 de Noviembre de 2013 la cantidad de
Un millón trescientos mil pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción en material
La suma anterior causará intereses 18 % anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 48 % anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Mauricio Solís Martínez
Domicilio Calle 57 Oriente
Colonia Centro
Ciudad Puebla, Pue.
C. P. 08765

Acepto (amos)

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.76
El agrónomo Javier Domínguez Pedrosa firmó un pagaré a la tienda de fertilizantes Viarsa con valor de $800 000 pagaderos a 9 meses, con una tasa de interés de 20%. ¿Cuál es el valor descontado del pagaré 2 meses antes de su vencimiento con la misma tasa de descuento?

CD3.77
Del siguiente pagaré encontrar el valor de vencimiento. Si este pagaré se liquidó 12 días después de su vencimiento, calcular el interés moratorio y la cantidad a pagar.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 14 de enero de 2014 $ 348 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
Sr. Juan Barreda Suarez en México D.F.
el día 26 de Noviembre de 2014 la cantidad de
trescientos cuarenta y ocho mil pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción
La suma anterior causará intereses 20% anual hasta la fecha de vencimiento.
En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 45% anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Juan Luis Herrera Rosales
Domicilio Av. Coyoacán 56481
Colonia Árbol de Fuego
Ciudad México D.F.
C. P. 04814

Acepto (amos)

CD3.78
Del siguiente pagaré, calcular la cantidad que pidió prestada el señor Balboa a la señora Camargo y calcular el valor presente del documento al 20 de septiembre.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 14 de Febrero de 2014 $ 1 200 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
la señora Sonia Camargo Dorantes en México D.F.
el día 26 de diciembre de 2014 la cantidad de un millóm doscientos mil pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción
La suma anterior causará intereses 25% anual hasta la fecha de vencimiento.
En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 48% anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Joaquín Balbia Gaytán
Domicilio Jacaranda 81
Colonia Arboledas
Ciudad México D.F.
C. P. 04814

Acepto (amos)

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas complementarios

Parte I

CD-I-3.1
¿Qué interés produce un capital de $76 600 a pagarse dentro de 13 semanas a una tasa de interés simple de 12% anual?

CD-I-3.2
Encontrar el interés exacto que se paga por un préstamo de $16 350, a 11.52% en 240 días.

CD-I-3.3
El arquitecto Juárez recibe un préstamo de $48 750 a 2 años. Si la tasa de interés es de 1.2% bimestral, ¿cuánto pagará dentro de 2 años?

CD-I-3.4
Un banco entrega al señor Juan Álvarez la cantidad de $2 255 000 por un préstamo a 1 año, 3 meses y 15 días, con una tasa de 27% de interés simple. ¿Cuál es el capital inicial del préstamo?

CD-I-3.5
Una deuda de $8 400 se liquidó el 29 de junio de este año con un cheque cuyo importe es de $9 080. Si la tasa de interés simple es de 11.75%, ¿cuánto tiempo estuvo prestado el dinero?

CD-I-3.6
Se descuenta al profesor Gómez un préstamo de $350 870 a un plazo de 180 días y con una tasa de descuento de 13% anual. Determinar:
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad de dinero recibe?

CD-I-3.7
Una compañía desea descontar un documento el 30 de abril con un valor de $683 656 y con una tasa de descuento de 10% anual. Si la fecha de vencimiento es el 30 de junio de este año, ¿cuánto dinero recibirá la compañía?

CD-I-3.8
Juan Torres recibe la cantidad de $100 000 por un préstamo a pagar en 10 meses y con una tasa de descuento de 10.5% anual. ¿Qué cantidad de dinero debió solicitar prestada?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte II

CD-II-3.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) El interés significa lo mismo que la tasa de interés _____
b) El capital es mayor que el monto _____
c) Valor descontado significa lo mismo que descuento _____
d) El deudor es la persona que cobra el pagaré _____
e) Se depositan $100 el 15 de marzo y se retira el 15 de octubre, entonces el plazo es de 199 días _____

CD-II-3.2
Un capital de $5 000 se duplica en 4 años con un tipo de interés simple de:

CD-II-3.3
Pedro solicita un préstamo de $38 000 a 2 años. Si la tasa de interés simple es de 3% mensual, ¿cuánto deberá pagar dentro de 2 años? La tasa y el tiempo se expresan en forma bimestral.

CD-II-3.4
Calcular el valor presente de $30 000, pagaderos a 18 meses, con tasa de interés simple del 12%.

CD-II-3.5
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $26 500, si el capital invertido es de $18 700 a una tasa de 6.8% anual?

CD-II-3.6
Una compañía solicita $500 000 de préstamo a un banco, a 2 años con una tasa de descuento de 12% anual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad la compañía por el préstamo?

CD-II-3.7
¿Cuánto recibe la señora Josefina por un pagaré de $45 600, 4 meses antes de su vencimiento, con una tasa de descuento del 15% anual?

CD-II-3.8
Calcular la tasa de rendimiento, si el valor descontado a los 12 meses es de $12 948, y el monto de $15 000

CD-II-3.9
Hallar el valor de un pagaré, si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $6 540, a una tasa de descuento del 18% anual.

CD-II-3.10
Una persona vendió a un banco un pagaré 3 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $8 355 y recibió del banco la cantidad de $6 835. Encontrar la tasa de descuento.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte III

CD-III-3.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) La tasa de interés activa es la que cobran los bancos _____
b) La tasa de interés pasiva es la que pagan los bancos _____
c) El valor de vencimiento es igual al valor nominal más los intereses _____
d) El pagaré es un compromiso por escrito para el pago de una determinada cantidad de dinero _____
e) El deudor u otorgante es la persona que cobra el pagaré _____

CD-III-3.2
Don Pablo abre una cuenta de inversión en Bansur por la cantidad de $2 000. Después de un año recibe $2 960. Por su inversión calcula:
a) El interés
b) La tasa de interés
c) El tipo de interés

CD-III-3.3
La señora Prudencia solicita a una institución financiera un préstamo de $6 500 a una tasa de interés simple de 18% con un plazo de 55 días. Calcula el interés comercial y exacto.

CD-III-3.4
Fernando Barrales depositó en su cuenta de ahorros $8 000 el 5 de marzo y el 27 marzo lo retiró. La tasa de interés simple es de 7.7% anual. ¿Qué cantidad recibió?

CD-III-3.5
Hallar el valor presente de $48 230 de un pagaré que vence dentro de 6 meses, si la tasa de interés simple es de 6%.

CD-III-3.6
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $35 650, si el capital invertido es de $29 780 a una tasa de 5.4% anual?

CD-III-3.7
El señor Porfirio solicita un préstamo de $8 000 a una institución bancaria, a un plazo de 9 meses, con una tasa de descuento de 0.85% mensual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad el señor Porfirio por el préstamo?

CD-III-3.8
El arquitecto Mario Aguilar adquirió una deuda de $2 000 hace 6 meses y vence dentro de 12 meses a partir de la contratación. Además hace 4 meses contrajo una nueva deuda de $8 000 a pagarse dentro de 4 meses a partir del día de hoy. Asimismo, también adquirió otra deuda hace 1 mes por $3 000 a pagarse en 6 meses. El día de hoy el acreedor acepta un pago único en efectivo equivalente a las tres deudas, a una tasa de interés de 24%. Si la fecha focal se establece el día de hoy, ¿cuál debe ser el valor del pago único para cancelar sus deudas?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Respuestas

¿Qué sabes?

En seguida aparecen las operaciones y las soluciones de los problemas enunciados al principio de la unidad.

3.1

¿Qué interés simple produce un capital de $15 600, a pagarse dentro de 13 semanas a una tasa de interés de 11.9% anual?

Datos
C = $ 15,600
T = 11.9% anual
n = 13 semanas
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/52)$$
$$I = 15600(0.119)(13/52)$$
$$I = 15600(0.119)(0.25)$$
$$I = 15600(0.02975)$$
$$I = \$464.10$$

3.2

Encontrar el interés exacto que se paga por un préstamo de $25 350 a 9.52% en 240 días.

Datos
C = $25 350
T = 9.52% anual
n = 240 días
Incógnita: Ie

$$Ie = C(T/100)(n/365)$$
$$Ie = 25350(0.0952)(240/365)$$
$$Ie = 25350(0.0952)(0.6575)$$
$$Ie = 25350(0.6575)$$
$$Ie = \$1586.84$$

3.3

El dueño de la tlapalería del pueblo recibe un préstamo de $18 650 a dos años. Si la tasa de interés es de 1.5% trimestral, ¿cuánto pagará dentro de dos años?

La tasa y el tiempo se expresan en forma trimestral.

Datos
C = $18 650
T = 1.5% trimestral
t = 0.015 trimestral
n = 2 años
n = 8 trimestres

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 18650[1+(0.015)(8)]$$
$$M = 18650[1+(0.12)]$$
$$M = 18650[1.12]$$
$$M = \$20888$$

3.4

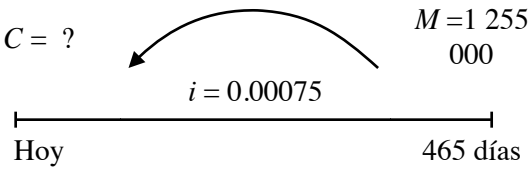
Un banco entrega al licenciado Aldama la cantidad $1 255 000 por un préstamo a un año, 3 meses y 15 días, con una tasa de 27%, ¿cuál es el capital inicial del préstamo?

Datos
M = $1 255 000
T = 27% anual
i = 0.00075 diario
n = 1 año, 3 meses y 15 días
n = 360 + 90 + 15
n = 465 días
Incógnita: C

$$C = 1255000[1+(0.00075)(465)]^{-1}$$
$$C = 1255000[1.34875]^{-1}$$
$$C = 1255000(0.741427)$$
$$C = \$930491.19$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.4 cont.



3.5

Una deuda de $7 545 se liquidó el 29 de junio de este año con un cheque cuyo importe es de $8 880. Si la tasa de interés simple es de 11.75%, ¿cuánto tiempo estuvo prestado?

Datos
$C = \$7\,545$
$M = \$8\,880$
$T = 11.75\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i}$$

$$n = \frac{\frac{8\,880}{7\,545} - 1}{0.1175} = \frac{1.176938 - 1}{0.1175} = 1.505858 \text{ años}$$

$n = 1$ año, 6 meses y 2 días

Cálculo de los meses y los días

$$\text{Años} = 1$$

$$\text{Meses} = 1.505858 - 1 = 0.505858$$

$$\text{Meses} = (0.505858)(12)$$

$$\text{Meses} = 6.0703$$

$$\text{Días} = 6.0703 - 6$$

$$\text{Días} = (0.0703)(30)$$

$$\text{Días} = 2.109$$

$$\text{Días} = 2$$

Como la tasa se da en forma anual, el periodo también es anual, entonces el resultado está expresado en años.

3.6

Se descuenta al profesor Gómez un préstamo de $150 000 a un plazo de 91 días, con una tasa de descuento de 13% anual.

a) ¿De cuánto es el descuento al momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad recibe?

Datos
$M = \$150\,000$
$n = 91$ días
$d = 13\%$ anual
$d =$ diario
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd$$

$$D = 150000(91)(0.0003611)$$

$$D = \$4929.16$$

La cantidad que recibe el profesor Gómez es de:

$$C = M - D$$

$$C = 150000 - 4929$$

$$C = \$145070.83$$

El profesor Gómez recibe $145 070.83, en lugar de los $150 000 solicitados, pero dentro de 91 días debe pagar $150 000, porque la institución financiera le aplicó el descuento comercial.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.7
Una compañía decide descontar un documento el 30 de abril con valor de $368 056, con una tasa de descuento de 13% anual. Si la fecha de vencimiento es el 30 de junio de este año. ¿Cuánto dinero recibirá la compañía?

Datos
$M = \$368\ 056$
$n = 61$ días
$d = 13\%$ anual
Incógnita: C

$$C = M(1 - nd)$$
$$C = 368056\left[1 - (61/360)(0.13)\right]$$
$$C = 368056\left[1 - (0.1694)(0.13)\right]$$
$$C = 368056(1 - 0.0220277)$$
$$C = 368056(0.97797)$$
$$C = \$359947.72$$

3.8
La señora Mendoza solicita un préstamo por una determinada cantidad de dinero. El plazo es de 7 meses y la tasa de descuento de 12%. Calcular la tasa mensual de rendimiento

Datos
$n = 7$ meses
$d = 12\%$ anual
d = 0.12 / 12 = 0.01 mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{d}{1 - dn}$$
$$R = \frac{0.01}{1 - (0.01)(7)}$$
$$R = \frac{0.01}{1 - 0.7}$$
$$R = \frac{0.01}{0.93}$$

3.8 cont.
$$R = 0.0107527 \text{ mensual}$$
$$R = 1.07527\% \text{ mensual}$$
$$R = 12.90\% \text{ anual}$$

3.9
El arquitecto Rodríguez recibe la cantidad de $80 500 por un préstamo a pagar en 8 meses, con una tasa de descuento de 15% anual. ¿Qué cantidad de dinero debió solicitar prestada?

Datos
$C = \$80\ 500$
$n = 8$ meses
$d = 15\%$ anual
d = 0.15 / 12 = 0.0125 mensual
Incógnita: M

$$M = \frac{C}{1 - nd}$$
$$M = \frac{80\ 500}{1 - (8)(0.0125)}$$
$$M = \frac{80\ 500}{1 - 0.1}$$
$$M = \frac{80\ 500}{0.9}$$
$$M = \$89444.44$$

3.10
El señor Martínez firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $12 245. ¿Cuál es la tasa de descuento?

Datos
$C = \$200\ 000$
$D = \$12\ 245$
Incógnita: d

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.10 cont.

$$d = \frac{D}{Mn}$$

$$d = \frac{12245}{(200000)(8)}$$

$$d = \frac{12245}{1600000}$$

$$d = 0.007653 \text{ mensual}$$

$$d = 9.18\% \text{ anual}$$

3.11

El señor Martínez firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial de 18%, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $12 245.
¿Cuál es la tasa de rendimiento?

Datos
n = 9 meses
d = 18% anual
d = 0.18 / 12 = 0.015 mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{d}{1 - dn}$$

$$R = \frac{0.015}{1 - (0.015)(9)}$$

$$R = \frac{0.01}{1 - 0.135}$$

$$R = \frac{0.01}{0.865}$$

$$R = 0.01734 \text{ mensual}$$

$$R = 20.81\% \text{ anual}$$

Problemas a resolver

Interés

CD3.1

La contadora Alma invierte $5 000 y al término de un año recibe $5 250 por su inversión. Calcular:
a) El interés
b) La tasa de interés
c) El tipo de interés

a) El interés se obtiene sustituyendo el valor del capital y el monto en la ecuación 3.1.

Datos
C = $5 000
M = $5 250
n = Un año
Incógnita: I

$$I = M - C$$

$$I = 5250 - 5000$$

$$I = \$\ 250$$

b) La tasa de interés
Incógnita: i.

$$i = \frac{I}{Cn}$$

$$i = \frac{250}{5\,000}$$

$$i = 0.05 \text{ anual}$$

c) El tipo de interés
Incógnita: T

$$T = (0.05)(100)$$

$$T = 5\% \text{ anual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.2
El señor Martínez solicitó un préstamo al ISSSTE de $18 500 al 9% anual durante un año. Calcular el interés simple a pagar.

Datos
C =$18 500
T = 9% anual
i = 0.09 anual
n = 1 año
Incógnita: I

$$I = Cni$$
$$I = 18500(1)(0.09)$$
$$I = \$1665$$

CD3.3
¿Cuál es la tasa de interés por un préstamo de $15 000 a un año, si se pagaron intereses de $1 900?

Datos
I = $1 900
C = $15 000
n = un año
Incógnita: i

$$i = I/C$$
$$i = 1900/15000$$
$$i = 0.1266 \text{ anual}$$
$$T = 12.66\% \text{ anual}$$

CD3.4
Se prestó un capital de $4 950 000 a un fabricante de juguetes durante tres años con un interés preferencial de $1 860 000.
¿Cuál fue la tasa de interés pactada?

Datos
C =$4 950 000
I =$1 860 000
n = 3 años
Incógnita: T

CD3.4 cont.
$$i = I/Cn$$
$$i = 1860000/[(4950000)(3)]$$
$$i = 0.1252 \text{ anual}$$
$$T = 12.52\% \text{ anual}$$

CD3.5
El señor Tomas Baroja le prestó a su cuñado la cantidad de $3 550 a una tasa de interés simple de 1.5% mensual, por 21 días.
¿Cuánto recibirá de intereses?

Datos
C = $3 550
T = 1.5% mensual
n = 21 días
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/30)$$
$$I = 3550(0.015)(21/30)$$
$$I = \$37.28$$

CD3.6
Usted compra un automóvil en $399 999 a pagarse en un año, a una tasa de interés simple de 12.4%. Calcular el interés correspondiente al primer mes de pago.

Datos
C = $399 999
T = 12.4% anual
n = 1 mes
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/12)$$
$$I = 399999(0.124)(1/12)$$
$$I = \$4133.32$$

Recursos académicos en línea · Grupo Editorial Patria

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Interés comercial y real

CD3.7
¿Qué interés produce un capital de $1 500 al 4% durante el mes de marzo?

a) Interés simple, comercial y tiempo exacto.
Año comercial de 360 días.
Tiempo exacto, el mes tiene 31 días.
$Io = 1500(0.04)(360/360) = \$5.16$

b) Interés simple, comercial y tiempo aproximado.
Año comercial de 360 días.
Tiempo aproximado, el mes tiene 30 días.
$Io = 1500(0.04)(30/360) = \$5.00$

c) Interés simple, real y tiempo exacto.
Año real de 365 días.
Tiempo exacto, el mes tiene 31 días.
$Ie = 1500(0.04)(31/365) = \$5.09$

d) Interés simple, real y tiempo aproximado.
Año real de 365 días.
Tiempo aproximado, el mes tiene 30 días.
$Ie = 1500(0.04)(30/365) = \$4.93$

CD3.8
¿Qué interés produce un capital de $8 500, al 4.6% de interés simple, del 18 de mayo de 2012 al 8 de abril de 2013?

a) Interés simple, comercial y tiempo exacto.
$Io = 8500(0.046)(325/360) = \$352.99$

b) Interés simple, comercial y tiempo aproximado.
$Io = 8500(0.046)(320/360) = \$347.55$

c) Interés simple, real y tiempo exacto.
$Ie = 8500(0.0.46)(325/365) = \$348.15$

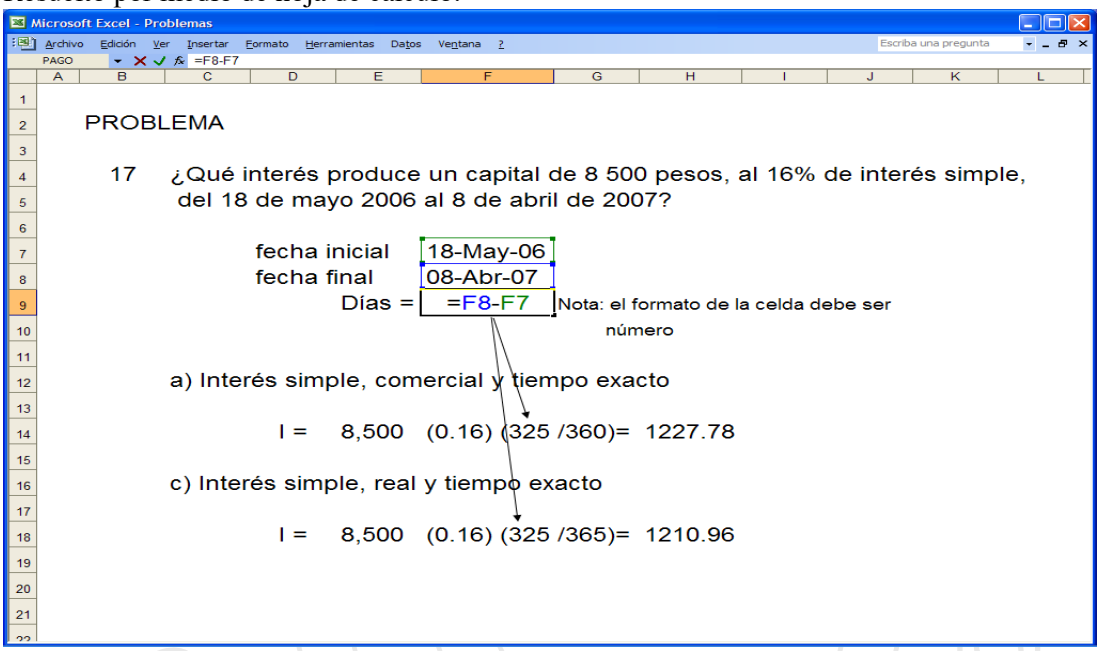
d) Interés simple, real y tiempo aproximado.
$Ie = 8500(0.4.6)(320/365) = \$342.79$

cursos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.9
¿Qué interés produce un capital de 8 500 pesos, al 16% de interés simple, del 18 de mayo de 2006 al 8 de abril de 2007?

Resuelto por medio de hoja de cálculo:



CD3.10
Calcular el interés exacto si el interés ordinario es de $189.25.

$$Ie = 0.9863\ Io$$
$$Ie = 0.9863(189.25)$$
$$Ie = \$186.65$$

CD3.11
Calcular el interés ordinario si el interés exacto es de $385.15.

$$Io = 1.0139\ Ie$$
$$Io = 1.0139(385.15)$$
$$Io = \$390.5$$

CD3.12
Calcular el interés ordinario con tiempo exacto de $18 500 al 25% anual prestado durante 60 días.

$$Io = Cn(i/365)$$
$$Io = 18500(0.25)(60/365)$$
$$Io = \$760.27$$

CD3.13
Calcular el interés ordinario con tiempo aproximado de $24 750 al 27% anual prestado durante 180 días.

$$Io = Cn(i/360)$$
$$Io = 24750(180)(0.27/360)$$
$$Io = \$3341.25$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.14
Calcular el interés exacto de $385.15 con una tasa de interés de 24.32% durante 154 días.

Datos:
C = $385.15
T = 24.32%
n = 154 días
Incógnita: Ie

$$Ie = Cn(i/365)$$
$$Ie = 385.15(0.2432)(154/365)$$
$$Ie = \$39.52$$

CD3.15
Jesús Martínez depositó en su cuenta de ahorros $3 000 el día 5 de marzo y el día 27 de marzo lo retira. La tasa de interés simple es de 5.7% anual. Calcular el interés comercial y exacto, considerando que el año es bisiesto.

Datos
C = $3 000
T = 5.7% anual
Incógnitas:
n
Io
Ie
Los días transcurridos n = 27 – 5 = 22 días

a) Interés comercial
$$Io = 3\,000\left[\frac{0.057}{360}\right](22)$$
$$Io = \$10.45$$

b) Interés exacto
$$Io = 3\,000\left[\frac{0.057}{366}\right](22)$$
$$Io = \$10.27$$

CD3.16
Katia Rodríguez depositó en su cuenta de ahorro $5 000 el 5 de junio y el 27 de junio lo retiró. La tasa de interés simple es de 4.05% anual. Calcular el interés comercial y exacto, considerando el año bisiesto.

a) Datos
C = $5 000
T = 4.05%
n = 27 – 5 = 22 días
Incógnita: Io

$$Io = Cni/360$$
$$Io = 5000(22)(0.405/360)$$
$$Io = \$12.38$$

b) Datos
C = $35 042
T = 32.42%
n = 154 días
Incógnita: Ie

$$Ie = Cni/365$$
$$Ie = 5000(22)(0.405/365)$$
$$Ie = \$12.21$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.17
Calcular el interés que se debe pagar por un préstamo de $8 000 al 25.2% durante 340 días.

Como no se indica el tipo de interés a calcular, se debe entender que el tipo de interés es el comercial u ordinario, a menos que se indique lo contrario.

Datos
$C = \$8\,000$
$T = 25.2\%$
$n = 340$ días
Incógnita: Io

$$Io = Cni/360$$
$$Io = 8000(0.252)(340/360)$$
$$Io = \$1904$$

Cálculo del monto

CD3.18
Calcular el monto de un préstamo de $3 150 al 16% de interés simple, durante 1.5 años.

Datos:
$C = \$3\,150$
$T = 16\%$ anual
$n = 1.5$ años
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 3150[1+(0.16)(1.5)]$$
$$M = 3150(1.24)$$
$$M = \$3906$$

CD3.19
El arquitecto Ignacio Aguilera Hernández consigue un préstamo de $9 000 a 15 bimestres, para comprar una computadora. La tasa de interés simple es del 2% bimestral. ¿Cuánto pagará dentro de 15 bimestres?

Datos:
$C = \$9\,000$
$T = 2\%$ bimestral
$n = 15$ bimestres
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 9000[1+(0.02)(15)]$$
$$M = 9000[1+(0.30)]$$
$$M = \$11700$$

CD3.20
El alumno Eduardo Arteaga Mora depositó en su cuenta de ahorros $3 000 el 5 de enero y el 31 de enero lo retiró para comprarse un teléfono celular. La tasa de interés simple es de 4.7% anual. Calcular el monto, considerando que el año es bisiesto.

Datos:
$C = \$3\,000$
$T = 4.7\%$ anual
Los días transcurridos $n = 31 - 5 = 26$ días
Incógnitas: n y M

$$M = 3000\left[1+\left(\frac{0.047}{366}\right)(26)\right] = \$3010$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.21
Calcular el monto de un préstamo personal al banco del ejército de $5 500 a una tasa de interés simple de 24% anual del 3 de septiembre al 28 de diciembre del mismo año, considerando que el año es bisiesto.

Datos
C = $5 500
T = 24% anual
Incógnitas:
n
M

Los días transcurridos

Tabla 1

Mes	Días
Septiembre	30 – 3 = 27
Octubre	31
Noviembre	30
Diciembre	28
Total	116

$$M = 5500\left[1+\left(\frac{0.24}{366}\right)(116)\right] = \$5918.36$$

CD3.22
Calcular el monto de un préstamo de $18 000 al 26% de interés simple, durante dos años.

Datos
C = $18 000
T = 26% anual
n = 2 años

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 18000\left[1+(0.26)(2)\right]$$
$$M = \$27360$$

CD3.23
¿Qué monto hay que pagar al ISSSTE por un crédito de corto plazo de $49 000 al 9% anual, después de 1 año y 6 meses?

Datos
C = $49 000
n = 18 meses
T = 9% anual
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 49000\left[1+\left(\frac{0.09}{12}\right)(18)\right]$$
$$M = \$55615$$

CD3.24
Magaly recibe un préstamo de Alexa para adquirir calzado con valor de $32 500. Acuerda pagar la deuda 4 meses después con una tasa de interés de 24% anual. ¿Cuánto deberá pagar Magaly después de 4 meses?

Datos
C =$ 32 500
T = 24% anual
n = 4 meses
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 32500\left[1+(0.24)\left(\frac{4}{12}\right)\right]$$
$$M = 32500\left[1.08\right]$$
$$M = \$35100$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.25
El comunicador Jesús Miguel deposita $55 000 en un fondo de inversión, que da un rendimiento de 0.9% mensual. Para comprar más equipo para su negocio, decide retirar el depósito 28 días después.
¿Cuánto le entregarán al retirar capital e intereses?

Datos
$C = \$55\,000$
$T = 0.9\%$ mensual
$n = 28$ días
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 55000\left[1+(0.009)(28/30)\right]$$
$$M = 55000\left[1+(0.0014)\right]$$
$$M = \$55462$$

CD3.26
El ingeniero Tomas Aguirre consigue un préstamo de $26 000 a 2 años, para comprar una computadora. La tasa de interés simple es de 3% bimestral ¿Cuánto deberá pagar dentro de 2 años?

Datos
$C = \$26\,000$
$T = 3\%$ bimestral
$n = 2$ años
$n = 12$ bimestres

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 26000\left[1+(0.03)(12)\right]$$
$$M = 26000\left[1.36\right]$$
$$M = \$35360$$

CD3.27
Calcular el monto acumulado al 24 de marzo del 2014, de un depósito de $22 600 realizado el 14 de octubre de 2013 en una cuenta que abona una TIIE de 25.5% anual más 5.8 puntos porcentuales. Para solucionar el problema utilice el interés simple ordinario con tiempo aproximado.

Datos
$C = \$22\,600$
TIIE = 25.5% anual
5.8 puntos porcentuales
$T = 31.3\%$ anual
$n = 160$ días

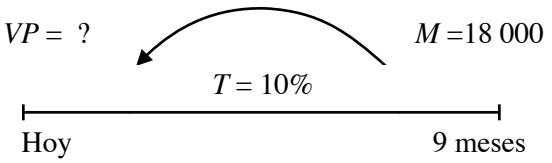
$$M = 22600\left[1+160\left(\frac{0.313}{360}\right)\right] = \$25743.91$$

Valor presente o actual

CD3.28
Encontrar el valor presente de $18 000, pagaderos a 9 meses, con tasa de interés simple de 10%.

Datos
$M = \$18\,000$
$T = 10\%$ anual
$n = 9$ meses
Incógnita: VP

$$VP = 18000\left[1+(0.1)(9/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 18000\left[0.93023\right]$$
$$VP = \$16744.18$$

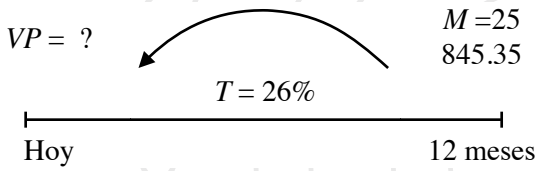


D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.29
¿Cuál será el valor presente de $25 845.35, pagaderos a 12 meses, con tasa de interés simple del 26%?

Datos
M = $25 845.35
T = 26% anual
n = 12 meses
Incógnita: VP

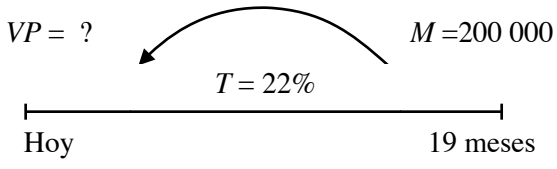
$$VP = 25845.35\left[1+(0.26)(12/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 25845.35\left[0.79365\right]$$
$$VP = \$20512.18$$



CD3.30
Calcular el valor presente de $200 000, pagaderos a 19 meses, con tasa de interés simple del 22%.

Datos
M = $200 000
T = 22% anual
n = 19 meses

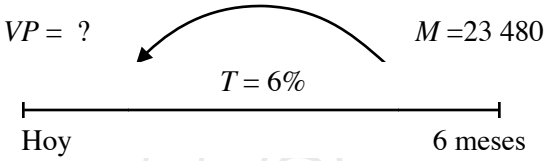
$$VP = 200000\left[1+(0.22)(19/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 200000.00\left[0.741656\right]$$
$$VP = \$148331.27$$



CD3.31
Encontrar el valor presente de $23 480 de un pagaré que vence dentro de 6 meses y si la tasa de interés simple es del 6%.

Datos
M = $23 480
T = 6% anual
n = 6 meses
Incógnita: VP

$$VP = 23480\left[1+(0.06)(6/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 23480\left[1.03\right]^{-1}$$
$$VP = 23480\left[0.9709\right]$$
$$VP = \$22796.12$$



Los $22 796.12 son el valor presente de $23 480, lo que significa que si el día de hoy invertimos $22 796.12, durante 6 meses a una tasa del 6%, obtendríamos $23 480.

CD3.32
¿Cuánto debe invertir una psicóloga el día de hoy, si la tasa de interés es de 1.75% trimestral, para disponer de $450 000 dentro de tres años?

Datos
M = $450 000
T = 1.75% trimestral
n = 12 trimestres

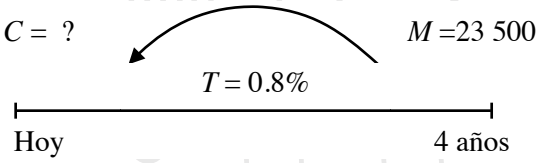
$$C = 450000\left[1+(12)(0.0175)\right]^{-1}$$
$$C = 18000\left[0.82645\right]$$
$$C = \$371900.83$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.33
¿Cuánto debe invertir la señora Andrea Portos el día de hoy, a una tasa de 0.8% simple trimestral para disponer de $23 500 dentro de 4 años?

Datos
$M = \$23\,500$
$T = 0.8\%$ trimestral
$n = 4$ años
$n = 16$ trimestres

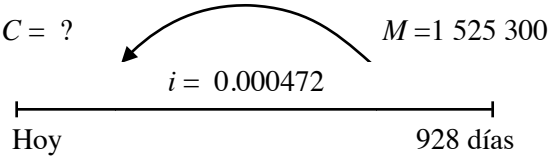
$$C = 23500\left[1+(16)(0.008)\right]^{-1}$$
$$C = 23500\left[1.128\right]^{-1}$$
$$C = 23500(0.887)$$
$$C = \$20883.30$$



CD3.34
Don Jacinto pagó $1 525 300, por un préstamo bancario con un plazo a 2 años, 6 meses y 28 días, a una tasa de 17% por la compra de un camión de carga. Encontrar el capital inicial del préstamo.

Datos
$M = \$1\,525\,300$
$T = 17\%$ anual
$i = 0.000472$ diario
$n = 720 + 180 + 28$

$$C = 1525300\left[1+(0.000472)(928)\right]^{-1}$$
$$C = 1525300\left[1.438\right]^{-1}$$
$$C = 1525300(0.6954)$$
$$C = \$1060697.52$$

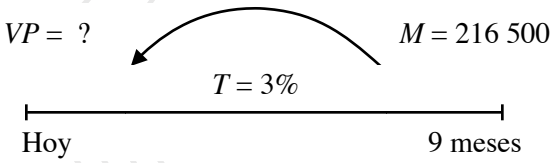


CD3.35
Una persona compró un automóvil compacto por el cual pagó $212 480 el primero de diciembre y lo vendió el 31 de agosto del año siguiente en $216 500 ¿Es conveniente la compra realizada si la tasa de interés que ofrece el banco es de 0.9% mensual?

Para evaluarla la conveniencia se debe calcular el valor presente de la cantidad que pagó por el automóvil.

Datos
Pago el primero de diciembre = $212 480
$M = \$216\,500$
$T = 0.9\%$ mensual
$n = 9$ meses
Incógnita: VP

$$VP = 216500\left[1+(0.009)(9)\right]^{-1}$$
$$VP = 216500\left[1.081\right]^{-1}$$
$$VP = 216500(0.92506)$$
$$VP = \$200277.52$$



Si la tasa de inversión fuera igual a la tasa de interés en el mercado por la compra de automóviles, la persona dejaría de ganar:
216 500.00 – 200 277.52 = $16 222.48
por haber invertido en el automóvil. Una mejor alternativa hubiera sido una inversión bancaria.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tiempo o plazo

CD3.36
El primero de septiembre se depositan $9 500 en una cuenta bancaria. ¿En cuánto tiempo se acumularían $11 000 a una tasa de interés del 6%?

Datos
$C = \$9\,500$
$M = \$11\,000$
$T = 6\%$ Anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i} = \frac{\frac{11000}{9500} - 1}{0.06} = \frac{1.15789 - 1}{0.06} = 2.6315 \text{ años}$$

Cálculo de los meses y los días

$$\text{Años} = 2$$
$$\text{Meses} = 2.6315 - 2 = 0.6315$$
$$\text{Meses} = (0.6315)(12)$$
$$\text{Meses} = 7.578$$
$$\text{Días} = 7.578 - 7$$
$$\text{Días} = (0.578)(30)$$
$$\text{Días} = 17.34$$

$n = 2$ años, 7 meses y 17 días

CD3.37
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $34 500, si el capital invertido es de $28 800 a una tasa de 5.1% anual?

Datos
$C = \$28\,800$
$M = \$34\,500$
$T = 5.1\%$ anual

$$n = \frac{\frac{34\,500}{28\,800} - 1}{0.051} = \frac{1.179772 - 1}{0.051} = 3.88$$

$n = 3$ años, 10 meses y 17 días

CD3.38
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $5 740, si el capital invertido es de $4 287 a una tasa de 4.5% anual?

Datos
$C = \$4\,287$
$M = \$5\,740$
$T = 4.5\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{5\,740}{4\,287} - 1}{0.045} = \frac{1.33893 - 1}{0.045} = 7.5318$$

$n = 7$ años, 6 meses y 11 días

CD3.39
Una deuda de $48 000 se liquidó el 11 de octubre con un cheque cuyo importe es de $50 800, y la tasa de interés aplicada de 23.73% ¿Cuánto tiempo estuvo prestado el dinero?

Datos
$C = \$48\,000$
$M = \$50\,800$
$T = 23.73\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{50\,800}{48\,000} - 1}{0.2373} = \frac{1.05833 - 1}{0.2373} = 0.2458$$

$n = 2$ meses y 28 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.40

¿Cuánto tiempo debe de transcurrir para que un capital se duplique si la tasa de interés es de 8.5% anual? Como el capital inicial es C; entonces el monto al final del plazo es el doble de C ($M = 2C$).

$$M = C(1+ni)$$
$$2C = C(1+ni)$$
$$\frac{2C}{C} = 1+ni$$
$$2 = 1+ni$$
$$2-1 = ni$$
$$\frac{1}{i} = n$$
$$n = \frac{1}{0.085} = 11.7647 \text{ años}$$

n = 11 años, 9 meses y 5 días

CD3.41

¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que un capital de $1 500 alcance un monto de $3 000 si la tasa de interés es de 25% anual?

Ahora, si M = pesos, entonces, M es el doble de C = $1 500, por tanto:

$$3\,000 = 1\,500\left[1+n(0.25)\right]$$
$$\frac{3\,000}{1\,500} = 1+n(0.25)$$
$$2 = 1+n(0.25)$$
$$n = \frac{1}{0.25} = 4 \text{ años}$$

CD3.42

Encontrar el tiempo exacto y aproximado, del día 4 de mayo al 20 septiembre del mismo año.

Para encontrar el tiempo exacto nos auxiliamos de la columna cuatro de la siguiente tabla 2 (para encontrar el día del año ver el apéndice A).

Tabla 2

Fecha	Mes	Día del año
4 de mayo	5	124
20 de septiembre	9	263
Diferencia	4	**139**

Tiempo exacto = 263 – 124 = 139 días
Otra forma de calcularlo se muestra en la tabla 3.

Tabla 3

Mes	Días del mes	Días
Mayo	31	31– 4 = 27
Junio	30	30
Julio	31	31
Agosto	31	31
Septiembre	30	20
Total		**139**

El tiempo aproximado se calcula considerando los meses de 30 días y en el caso de México no se cuenta el primer día pero si el último del plazo. Para encontrar el tiempo exacto nos auxiliamos de la columna cuatro de la siguiente tabla 4 (para encontrar el día del año ver el apéndice C).

Tabla 4

Fecha	Mes	Día	Día del año
4de mayo	5	40	124
20 de septiembre	9	28	260
Diferencia	4	12	136

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Descuento simple

CD3.43
¿Cuál es el descuento que se hace a un préstamo de $3 500, a un plazo de 6 meses, con una tasa de descuento simple de 20% anual?

Datos
M = $3 500
n = 6 meses
d = 20 % anual
d = 0.20/12 = 0.0166
Incógnita: D

$$D = Mnd = 3500(6)(0.20/12) = \$350$$

CD3.44
¿Cuál es el descuento que hace Banorte a un préstamo de $19 500, a un plazo de 13 meses, con una tasa de descuento simple de 1.8% mensual?

Datos
M = $19 500
n = 13 meses
d = 1.8% mensual
d = 0.018 mensual
Incógnita: D

$$D = Mnd = 19500(13)(0.018) = \$4563$$

CD3.45
¿Cuál es el descuento que se hace a un préstamo de $8 300, a un plazo de 8 meses, con una tasa de descuento simple de 24% anual?

Datos
M = $3 500
n = 8 meses
d = 24 % anual
d = 0.24/12 = 0.02
Incógnita: D

$$D = Mnd = 8300(8)(0.24/12) = \$1328$$

CD3.46
¿Cuál es el descuento que hace Banorte a un préstamo de $7 500, a un plazo de 16 meses, con una tasa de descuento simple de 1.5% mensual?

Datos
M = $7 500
n = 16 meses
d = 1.5 % mensual
d = 0.015 mensual
Incógnita: D

$$D = Mnd = 7500(16)(0.015) = \$1800$$

CD3.47
Un banco cobra el 26% de interés por adelantado al señor Cabrera por un préstamo a corto plazo, de $10 000 del 2 de mayo al 30 de octubre del presente año. Calcular el descuento que aplica el banco al señor Cabrera.

Datos
M = $10 000
n = 181 días
T = 26% anual (es el 26% de descuento bancario)
Incógnita: D

$$D = Mnd = 10000(181)(0.26/360) = \$1307.22$$

CD3.48
Calcular el valor presente de $2 000 a 24% de interés simple a un plazo de 9 meses. ¿Cuál es el descuento que realizó Invemex Banco por el préstamo?

Datos
M = $2 000
n = 9 meses
T = 24% anual
i = 0.02 mensual
Incógnitas: VP y D

$$D = M - VP = 2000 - 1694.91 = \$305.09$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Valor descontado o ganancia

CD3.49
El profesor Arriaga solicita un préstamo a Bansur de $12 000 a un plazo de 13 meses, con una tasa de descuento de 2.2% mensual.
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad en realidad recibe el profesor Arriaga?

Datos
$M = \$12\,000$
$n = 13$ meses
$d = 2.2\%$ mensual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 12000(13)(0.022) = \$3432$$

La cantidad que recibe el profesor Arriaga es de:
$$C = M - D = 12000 - 3432 = \$8568$$

CD3.50
La Compañía Electrohogar S.A. solicita $3 500 000 de préstamo al banco de Sonora, a 2 años con una tasa de descuento de 12% anual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad la Compañía Electrohogar S.A., por el préstamo?

Datos
$M = \$3\,500\,000$
$d = 12\%$ anual
$n = 2$ años
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 3500000(2)(0.12) = \$840000$$

La cantidad recibida por la Compañía Electrohogar S.A., es de:
$$C = M - D = 3500000 - 840000 = \$2660000$$

La compañía recibe $2 660 000 en lugar de los $3 500 000 solicitados, y en 2 años tendrá que pagar $3 500 000, ya que el Banco de Sonora le aplicó un descuento comercial.

CD3.51
El administrador de la compañía papelera Gabo S.A. solicita un préstamo al banco INVURSA de $13 500 000 a un plazo de 18 meses, con una tasa de descuento de 1.2% mensual.
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad en realidad recibe el administrador?

Datos
$M = \$13\,500\,000$
$n = 18$ meses
$d = 1.2\%$ mensual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 13500000(18)(0.012) = \$2916000$$

La cantidad que recibe el administrador es de:
$$C = M - D = 13500000 - 2916000 = \$10584000$$

CD3.52
El banco Invursa cobra 7% de descuento bancario en préstamos a largo plazo. Juan Luis Trejo necesita $40 000, para pagarlos con intereses en 6 años. ¿Qué cantidad debe solicitar en préstamo y cuánto paga de interés?

Datos
$T = 7\%$ anual
$M = \$40\,000$
$n = 6$ años
Incógnitas: C e I

$$C = M(1 - nd)^{-1} = 40000[1 - (0.07)(6)]^{-1} = \$68965.52$$
$$I = M - C = 68965.52 - 40000 = \$28965.52$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tasa de rendimiento

CD3.53
Bansur aplica un descuento de $640 120 a la contadora Pamela Alfaro por un préstamo a 6 meses con una tasa de descuento de 19% anual, por la compra de remodelación de su despacho. ¿Cuál es la tasa de rendimiento?

a) Calculamos el monto
Datos
$d = 19\%$ anual
$D = \$640\ 120$
$n = 6$ meses

$$M = \frac{D}{dn} = \frac{640120}{0.19(6/12)} = \frac{640120}{0.095} = \$6\,738105.26$$

b) Calculamos el valor descontado:

$$C = M - D$$
$$C = 6\,738105.26 - 640120$$
$$C = \$6097985.26$$

c) Se calcula el valor de la tasa de rendimiento

$$R = \frac{M - C}{Cn}$$
$$R = \frac{6\,738105.26 - 6097\,985.26}{6097\,985.26(6)}$$
$$R = \frac{640119.99}{3840\,719.98}$$
$$R = 0.0175$$
$$R = 1.75\% \text{ mensual}$$
$$R = 20.99\% \text{ anual}$$

CD3.54
¿Cuál es la tasa de rendimiento, si el valor descontado a los 11 meses es de $22 948, y el monto de $24 000?

Datos
$M = \$24\ 000$
$C = \$22\ 948$
$n = 11$ meses
Incógnita: R

$$R = \frac{M - C}{Cn}$$
$$R = \frac{24000 - 22948}{22948(11)}$$
$$R = \frac{1052}{252428}$$
$$R = 0.0041675$$
$$R = 0.417\% \text{ mensual}$$
$$R = 5.0\% \text{ anual}$$

CD3.55
El abogado Amando Suárez Copel solicita un préstamo por una determinada cantidad de dinero. El plazo es de 9 meses y la tasa de descuento de 19%. Calcular la tasa mensual de rendimiento

Datos
$d = 19\%$
$n = 9$ meses
Incógnita: R

$$R = \frac{1}{1 - nd}$$
$$R = \frac{0.19/12}{(0.19/12)(9)}$$
$$R = \frac{0.0158333}{0.8575}$$
$$R = 0.0184645$$
$$R = 1.84645\% \text{ mensual}$$
$$R = 22.157\% \text{ anual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.56
El Banco IXE-MEX cobra el 12% de descuento bancario en préstamos a corto plazo. ¿Qué interés simple le cobra el Banco IXE-MEX, a la señora Ana Lucía Vega por un préstamo de $14 000 a un plazo de 6 meses?

Datos
d =12%
n = 6 meses
Incógnita: R

$$R = \frac{1}{1 - nd}$$
$$R = \frac{0.12/12}{(0.12/12)(6)}$$
$$R = \frac{0.01}{0.94}$$
$$R = 0.01064$$

Solución alternativa:
$$M = \frac{C}{1 - dn}$$
$$M = \frac{14000}{1 - (0.12)(6/12)}$$
$$M = \frac{14000}{0.94}$$
$$M = \$14893.61$$
$$I = M - C$$
$$I = 14893.61 - 14000$$
$$I = \$893.61$$
$$R = \frac{I}{Cn}$$
$$R = \frac{893.61}{14000(6)}$$
$$R = 0.010638 \cong 0.01064$$

Valor de vencimiento

CD3.57
El doctor Jerry Alfaro descontó en el banco un pagaré por el cual recibió la cantidad de $19 167, a una tasa de descuento de 20% anual. El vencimiento del pagaré fue 6 meses después de su descuento. ¿Cuál sería el valor del documento en la fecha de su vencimiento?

a) Calculamos el descuento
C = $19 167
n = 6 meses
d = 20% anual
d = 0.20/12= 0.0166

$$D = \frac{Cnd}{1 - dn}$$
$$D = \frac{(19\,167)(6)(0.01666)}{1 - (6)(0.0166)}$$
$$D = \frac{1916.7}{0.9}$$
$$D = \$21472.53$$

b) Calcular el valor del monto
$M = C + D = 19167 + 2129.66 = \$21296.66$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.58
Encontrar el valor de un pagaré si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $19 540, a una tasa de descuento de 18% anual.

Datos
$C = \$19\,540$
$n = 6$ meses
$d = 18\%$ anual
$d = 0.015$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{19\,540}{1-(6)(0.015)}$$
$$M = \frac{19\,540}{0.91}$$
$$M = \$214\,72.53$$

CD3.59
Calcular el valor de un pagaré, si 8 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $8 450, a una tasa de descuento de 20% anual.

Datos
$C = \$8\,450$
$n = 8$ meses
$d = 20\%$ anual
$d = 0.016666$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{8\,450}{1-(8)(0.016666)}$$
$$M = \frac{8\,450}{0.866}$$
$$M = \$9\,750$$

CD3.60
La señora Lucia Vega solicita un préstamo a un banco y éste le entrega la cantidad de $10 000, para pagar en 13 meses, a una tasa de descuento de 22% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

Datos
$C = \$10\,000$
$n = 13$ meses
$d = 22\%$ anual
$d = 0.01833$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{10\,000}{1-(13)(0.01833)}$$
$$M = \frac{10\,000}{0.76166}$$
$$M = \$13129.10$$

CD3.61
El señor Duran solicita un préstamo al banco BANCA y éste le entrega la cantidad de $20 000, para pagar en 12 meses, a una tasa de descuento de 23% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

Datos
$C = \$20\,000$
$n = 12$ meses
$d = 23\%$ anual
$d = 0.019166$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{20\,000}{1-(12)(0.019166)}$$
$$M = \frac{20\,000}{0.77}$$
$$M = \$25\,974.03$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.62
El profesor de matemáticas descontó en el banco un pagaré por el cual recibió la cantidad de $16 766, a una tasa de descuento de 23% anual. El vencimiento del pagaré es 6 meses después de su descuento. ¿Cuál sería el valor del documento en la fecha de su vencimiento?

Primero calculamos el descuento

$C = \$16\,766$
$d = 23\%$ anual
$d = 0.23/12 = 0.019166$
$n = 6$ meses
Incógnita: D

$$D = \frac{Cnd}{1 - dn}$$
$$D = \frac{(16\,766)(6)(0.019166)}{1 - (6)(0.019166)}$$
$$D = \$2\,178.63$$

Ahora se calcula el valor del monto
$$M = C + D$$
$$M = 16766.00 + 2177.77$$
$$M = \$18\ 944.63$$

CD3.63
Encontrar el valor de un pagaré, si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $9 540, a una tasa de descuento de 20% anual.

Datos
$C = \$9\,540$
$n = 6$ meses
$d = 20\%$ anual
$d = 0.016667$ mensual
Incógnita: M

$$C = M(1 - nd)$$

CD3.63 cont.
Despejando M de la ecuación anterior se obtiene:

$$M = \frac{C}{1 - nd}$$
$$M = \frac{9\,540}{1 - (6)(0.016667)} = \$10\,600$$

CD3.64
La publicista Antonia Villagrán solicita un préstamo a un banco y éste le entrega la cantidad de $8 000, para pagar en 12 meses, a una tasa de descuento de 23% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

Datos
$C = \$8\,000$
$n = 12$ meses
$d = 23\%$ anual
$d = 0.23/12 = 0.019166$

$$M = \frac{C}{1 - nd} = \frac{8000}{1 - (12)(0.019166)} = \$10389.61$$

Tasa de descuento

CD3.65
El dueño de la tintorería De Héctor vendió a un banco un pagaré 3 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $18 355 y recibió del banco la cantidad de $16 835. Encontrar la tasa de descuento.

Datos
$C = \$16\,835$
$M = \$18\,355$
$n = 3$ meses

$$D = M - C = 18355 - 16835 = \$1\,520$$
$$d = \frac{D}{Mn} = \frac{1\,520}{(18\,355)(3)} = \frac{1\,520}{55\,065} = 0.0276$$
$$d = 2.76\% \text{ mensual}$$
$$d = 33.12\% \text{ anual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.66
El dueño de la panificadora Trigo vendió a un banco un pagaré 6 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $19 355 y recibió del banco la cantidad de $17 855. Encontrar la tasa de descuento.

Datos
$C = \$17\,855$
$M = \$19\,355$
$n = 6$ meses

$$D = M - C = 19355 - 17855 = \$1500$$

$$d = \frac{D}{Mn} = \frac{1\,500}{(19355)(6)} = \frac{1500}{116\,130} = 0.0129$$

$$d = 1.29\% \text{ mensual}$$

$$d = 15.5\% \text{ anual}$$

CD3.67
El señor Chavarría firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $21 240.50. ¿Cuál es la tasa de descuento?

Datos
$M = \$200\,000$
$D = \$21\,240.50$
$n = 8$ meses
Incógnita: d

$$d = \frac{D}{Mn} = \frac{21240.50}{(200000)(8)} = 0.0118$$

$$d = 1.18\% \text{ mensual}$$

$$d = 14.16\ \% \text{ anual}$$

CD3.68
Encontrar la tasa de rendimiento de un préstamo solicitado por el administrador. Adrián Salvatorio, a pagar en 6 meses, con una tasa de descuento de 18% anual.

Datos
$d = 18\%$ anual
$d = 0.18/12 = 0.015$ mensual
$n = 6$ meses

$$R = \frac{d}{1 - dn} = \frac{(0.015)}{1 - (0.015)(6)} = 0.01648$$

$$R = 1.648\% \text{ mensual}$$

$$R = 19.78\% \text{ anual}$$

CD3.69
Un banco descuenta un pagaré de $55 000, con vencimiento en 7 meses y una tasa de descuento de 22%. ¿Qué tasa de rendimiento obtiene en realidad el banco?

Datos
$d = 22\%$ anual
$n = 7$ meses

$$R = \frac{d}{1 - dn} = \frac{(0.22/12)}{1 - (0.22/12)(7)} = 0.02103$$

$$R = 2.103\% \text{ mensual}$$

$$R = 25.23\% \text{ anual}$$

CD3.70
Un banco del Bajío descuenta un pagaré de $150 000, con vencimiento en 9 meses y una tasa de descuento de 24%. ¿Qué tasa de rendimiento obtiene en realidad el banco?

Datos
$d = 24\%$ anual
$n = 9$ meses

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.70 cont.

$$R = \frac{d}{1 - dn} = \frac{(0.24/12)}{1 - (0.24/12)(9)} = 0.02439$$

$R = 2.439\%$ mensual

$R = 29.27\ \%$ anual

Plazo

CD3.71

La compañía Londres S. A. descuenta un pagaré por el cual recibe $28 879, a una tasa de descuento del 30% anual. ¿Cuánto tiempo falta para el vencimiento del pagaré, si éste tiene valor nominal de $70 000?

Datos
$M = \$70\ 000$
$C = \$28\ 879$
$d = 30\%$ anual

$$D = M - C = 70000 - 28879 = \$41\,121$$

$$n = \frac{D}{Md} = \frac{41121.00}{70000(0.30)} = 1.95814$$

Plazo = 1 año, 11 meses y 15 días

CD3.72

La casa de ropa Adrianos descuenta un pagaré por el cual recibe $29 887, a una tasa de descuento del 26% anual. ¿Cuánto tiempo falta para el vencimiento del pagaré si éste tiene valor nominal de $60 000?

Datos
$M = \$60\ 000$
$C = \$29\ 887$
$d = 26\%$ anual

$$D = M - C = 60000 - 29887 = \$30113$$

$$n = \frac{D}{Md} = \frac{30\,113}{60000(0.26)} = 1.93$$

Plazo = 1 año, 11 meses y 5 días

CD3.73

Encontrar la fecha en que se descontó un pagaré de $34 000 con vencimiento el 12 de julio del presente año. Como el descuento es comercial el banco descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $3 670, con una tasa de descuento del 26% anual.

Datos
$M = \$34\ 000$
$D = \$3\ 670$
$d = 26\%$ anual

$$n = \frac{D}{Md} = \frac{3\,670}{34\,000(0.26)} = 0.4151$$

$n = (0.4151)(360)$

$n = 149.45$ días $\cong$ 149

$n = 4$ meses 29 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Pagaré

CD3.74
Encontrar el valor descontado del siguiente pagaré a Hielo del Atlántico S. A., el 15 de julio de 2006 en un banco que ofrece una tasa de descuento del 14%.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 15 de Marzo de 2014 $900 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
Hielo del Atlántico S.A. en México D.F.
el día 15 de Septiembre de 2014 la cantidad de Novecientos mil
pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción en mercancía
La suma anterior causará intereses 24% anual hasta la fecha de vencimiento.
En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir
48% anual **por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.**

Nombre Oscar Calva Montes
Domicilio Av. Pacífico 56481
Colonia Cafetalera
Ciudad México D.F. Acepto (amos)
C. P. 04836

a) Calcular el valor de vencimiento del pagaré
Datos
$C = \$900\,000$
$n = 6$ meses
$T = 24\%$ anual
$i = 0.02$
Incógnitas: I y M

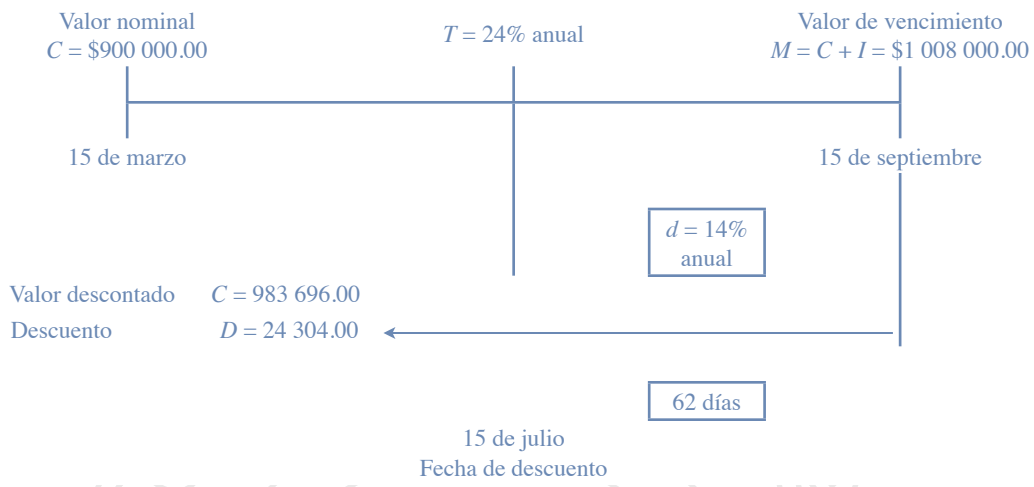
$$I = Cni = 900000(6)(0.24/12) = \$108000$$
$$M = C + I = 900000 + 108000 = \$1008000$$

b) Calcular el descuento y el valor descontado (valor efectivo)
Datos
$M = \$1\,008\,000$
$d = 14\%$ anual
$n = 62$ días
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 1008000(62/360)(0.14) = \$24304$$
$$C = M - D = 1008000 - 24304 = \$983696$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.74 cont.



CD3.75

Encontrar el valor descontado del siguiente pagaré, a la compañía Kolvi S.A., el 30 de agosto de 2006 en un banco que ofrece una tasa de descuento de 18%.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 30 de Marzo de 20 13 $1 300 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
Compañía de Kolvi S.A. en Puebla, Pue.
el día 30 de Noviembre de 20 13 la cantidad de
Un millón trescientos mil pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción en material
La suma anterior causará intereses 18 % anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 48 % anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Mauricio Solís Martínez
Domicilio Calle 57 Oriente
Colonia Centro
Ciudad Puebla, Pue.
C. P. 08765

Acepto (amos)

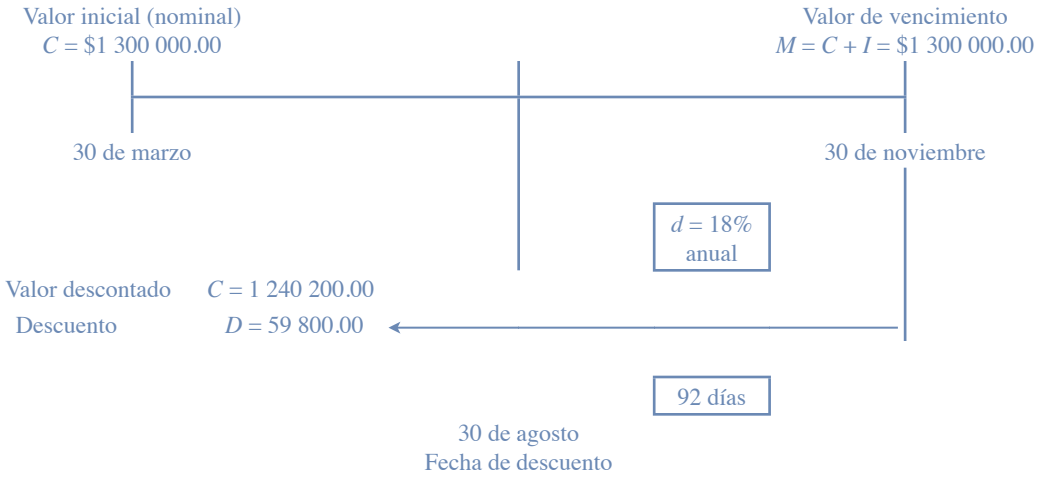
No es necesario calcular el valor de vencimiento del pagaré, porque éste no indica la tasa de interés a pagar. Entonces se procede a calcular el descuento y el valor descontado (valor efecto), sabiendo que el valor de vencimiento es igual al valor nominal.

Datos
$M = \$1\ 300\ 000$
$d = 18\%$ anual
$n = 92$ días
Incógnitas: D y C

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.75 cont.

$$D = Mnd = 1300000(92/360)(0.18) = \$59800$$
$$C = M - D = 1300000 - 59800 = \$1240200$$



CD3.76
El agrónomo Javier Domínguez Pedrosa firmó un pagaré a la tienda de fertilizantes Viarsa con valor de $800 000 pagaderos a 9 meses, con una tasa de interés de 20%. ¿Cuál es el valor descontado del pagaré 2 meses antes de su vencimiento con la misma tasa de descuento?

Datos
C = $800 000
n = 9 meses
T = 20 % anual
Incógnita: M

a) $M = C(1+ni) = 800000\left[1+(9/12)(0.20)\right] = \$920000$

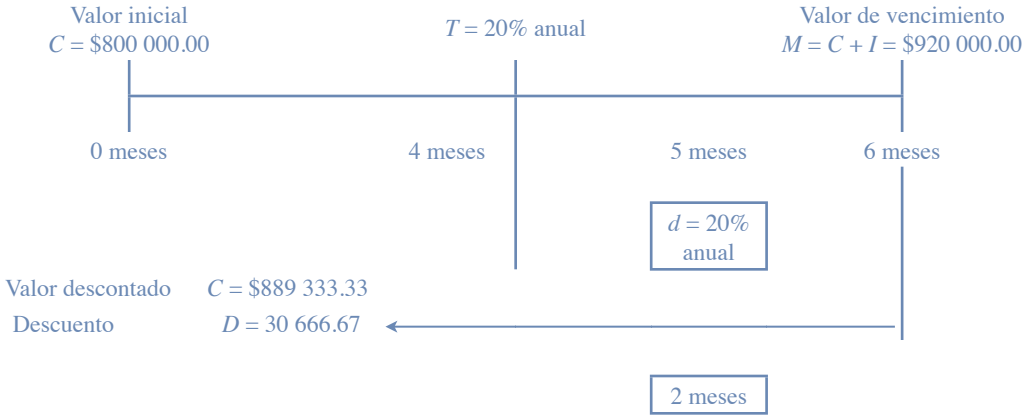
b) Calcular el descuento y el valor descontado.

Datos
M = $920 000
n = 2 meses
d = 20% anual

$$D = Mnd = 920000(2/12)(0.20) = \$30666.67$$
$$C = M - D = 920000 - 30666.67 = \$889333.33$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.76 cont.



CD3.77

Del siguiente pagaré encontrar el valor de vencimiento. Si este pagaré se liquidó 12 días después de su vencimiento, calcular el interés moratorio y la cantidad a pagar.

Documento 1 de 1 Núm._____

México D.F. a 14 de enero de 2014 $ 348 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de Sr. Juan Barreda Suarez en México D.F.
el día 26 de Noviembre de 2014 la cantidad de
trescientos cuarenta y ocho mil pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción

La suma anterior causará intereses 20% anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 45% anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Juan Luis Herrera Rosales
Domicilio Av. Coyoacán 56481
Colonia Árbol de Fuego
Ciudad México D.F.
C. P. 04814

Acepto (amos)

Datos
C = $348 000
n = 316 días
d = 20% anual
Incógnitas: M y Im

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.77 cont.

a) El valor de vencimiento del pagaré es:

$$M = 348000\left[1+\left(\frac{0.20}{360}\right)(316)\right] = \$\ 409093.33$$

b) Interés moratorio

$$Im = 409\,093.33\left[\left(\frac{0.45}{360}\right)(12)\right] = \$6\,136.40$$

Cantidad a pagar = (capital + intereses ordinarios) + intereses moratorios
Cantidad a pagar = 409 093.33 + 6136.40 = $415 229.73

CD3.78
Del siguiente pagaré, calcular la cantidad que pidió prestada el señor Balboa a la señora Camargo y calcular el valor presente del documento al 20 de septiembre.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 14 de Febrero de 20 14 $ 1 200 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
la señora Sonia Camargo Dorantes en México D.F.
el día 26 de diciembre de 20 14 la cantidad de un millóm doscientos mil pesos 00/100

Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción _____
La suma anterior causará intereses 25% anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 48% anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Joaquín Balbia Gaytán
Domicilio Jacaranda 81
Colonia Arboledas
Ciudad México D.F.
C. P. 04814

Acepto (amos)

a) Del 14 de febrero (hoy) al 26 de diciembre transcurren 315 días.

$$C = 1\,200000\left[1+\left(\frac{0.25}{360}\right)(315)\right]^{-1} = \$984615.38$$

b) Del 20 de septiembre al 26 de diciembre hay 97 días.

$$VP = 1200000\left[1+\left(\frac{0.25}{360}\right)(97)\right]^{-1} = \$\,1124268.05$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas complementarios
Parte I

CD-I-3.1
¿Qué interés produce un capital de $76 600 a pagarse dentro de 13 semanas a una tasa de interés simple de 12% anual?

Datos
C = $76 600
T = 12% anual
n = 13 semanas
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/52)$$
$$I = 76600(0.12)(13/52)$$
$$I = 76600(0.12)(0.25)$$
$$I = 76600(0.03)$$
$$I = \$2298$$

CD-I-3.2
Encontrar el interés exacto que se paga por un préstamo de $16 350, a 11.52% en 240 días.

Datos
C = $16 350
T = 11.52% anual
n = 240 días
Incógnita: Ie

$$Ie = C(T/100)(n/365)$$
$$Ie = 16350(0.1152)(240/365)$$
$$Ie = 16350(0.1152)(0.00031561)$$
$$Ie = 16350(0.07574)$$
$$Ie = \$1238.48$$

CD-I-3.3
El arquitecto Juárez recibe un préstamo de $48 750 a 2 años. Si la tasa de interés es de 1.2% bimestral, ¿cuánto pagará dentro de 2 años?

La tasa y el tiempo se expresan en forma bimestral.

Datos
C = $48 750
T = 1.2% bimestral
t = 0.012 bimestral
n = 2 años
n = 12 bimestres

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 48750\left[1+(0.012)(12)\right]$$
$$M = 48750\left[1+(0.144)\right]$$
$$M = 48750\left[1.144\right]$$
$$M = \$55770$$

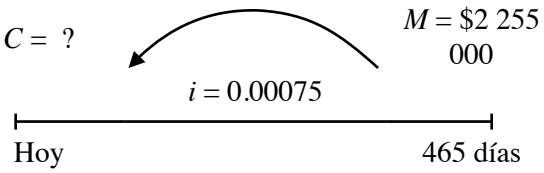
CD-I-3.4
Un banco entrega al señor Juan Álvarez la cantidad de $2 255 000 por un préstamo a 1 año, 3 meses y 15 días, con una tasa de 27% de interés simple. ¿Cuál es el capital inicial del préstamo?

Datos
M = $2 255 000
T = 27% anual
i = 0.00075 diario
n = 1 año, 3 meses y 15 días
n = 360 + 90 + 15
n = 465 días
Incógnita: C

$$C = 2255000\left[1+(0.00075)(465)\right]^{-1}$$
$$C = 2255000\left[1.34875\right]^{-1}$$
$$C = 2255000(0.741427)$$
$$C = \$1671917.88$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-I-3.4 cont.



CD-I-3.5

Una deuda de $8 400 se liquidó el 29 de junio de este año con un cheque cuyo importe es de $9 080. Si la tasa de interés simple es de 11.75%, ¿cuánto tiempo estuvo prestado el dinero?

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i}$$

Datos
C = $8 400
M = $9 080
T = 11.75% anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{9\,080}{8\,400} - 1}{0.1175} = \frac{1.0809 - 1}{0.1175} = 0.688 \text{ años}$$

n = 8 meses, 8 días

Como la tasa se da en forma anual, el periodo también es anual, entonces el resultado se expresa en años.

CD-I-3.6

Se descuenta al profesor Gómez un préstamo de $350 870 a un plazo de 180 días y con una tasa de descuento de 13% anual. Determinar:
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad de dinero recibe?

Datos
M = $350 870
n = 180 días
d = 13% anual
d = 0.0003611 diario
Incógnitas: D y C

CD-I-3.6 cont.

$$D = Mnd$$
$$D = 350870(180)(0.0003611)$$
$$D = 350870(0.065)$$
$$D = \$22806.55$$

La cantidad que recibe el profesor Gómez es de:

$$C = M - D$$
$$C = 350870 - 22806.55$$
$$C = \$328063.45$$

CD-I-3.7

Una compañía desea descontar un documento el 30 de abril con un valor de $683 656 y con una tasa de descuento de 10% anual. Si la fecha de vencimiento es el 30 de junio de este año, ¿cuánto dinero recibirá la compañía?

Datos
M = $683 656
n = 2 meses
d = 10% anual
d = 0.10 / 12 = 0.00833 mensual
Incógnita: C

$$C = M(1 - nd)$$
$$C = 683656[1 - (2)(0.00833)]$$
$$C = 683656(1 - 0.01666)$$
$$C = 683656(0.98334)$$
$$C = \$672266.29$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-I-3.8
Juan Torres recibe la cantidad de $100 000 por un préstamo a pagar en 10 meses y con una tasa de descuento de 10.5% anual. ¿Qué cantidad de dinero debió solicitar prestada?

Datos
C = $100 000
n = 10 meses
d = 10.5% anual
d = 0.15 / 12 = 0.00875 mensual
Incógnita: M

$$M = \frac{C}{1 - nd}$$

$$M = \frac{100000}{1 - (10)(0.00875)}$$

$$M = \frac{100000}{1 - 0.00875}$$

$$M = \frac{100000}{0.9125}$$

$$M = \$109589.04$$

Parte II

CD-II-3.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) El interés significa lo mismo que la tasa de interés FALSE
b) El capital es mayor que el monto FALSE
c) Valor descontado significa lo mismo que descuento FALSE
d) El deudor es la persona que cobra el pagaré FALSE
e) Se depositan $100 el 15 de marzo y se retira el 15 de octubre, entonces el plazo es de 199 días FALSE

Se considera año comercial por realizarse un depósito en una institución financiera (ver apéndice C).

Año comercial (365 días)

Fecha	Día del año
15 de marzo	73
15 de octubre	287
Total de días transcurridos	214

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-II-3.2
Un capital de $5 000 se duplica en 4 años con un tipo de interés simple de:

Datos
$C = \$5\,000$
$M = 2C$
$N = 4$ años
Incógnita: T

$$M = C(1+ni)$$
$$2C = C(1+ni)$$
$$\frac{2C}{C} = 1+ni$$
$$2 = 1+ni$$
$$2-1 = ni$$
$$\frac{1}{n} = i$$
$$i = \frac{1}{4} = 0.25$$

CD-II-3.3
Pedro solicita un préstamo de $38 000 a 2 años. Si la tasa de interés simple es de 3% mensual, ¿cuánto deberá pagar dentro de 2 años? La tasa y el tiempo se expresan en forma bimestral.

Datos
$C = \$38\,000$
$T = 3\%$ mensual
$t = 0.03$ mensual
$n = 2$ años
$n = 24$ meses
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 380000\left[1+(0.03)(24)\right]$$
$$M = 38000\left[1+(0.72)\right]$$
$$M = 38000\left[1.72\right]$$
$$M = \$65360$$

CD-II-3.4
Calcular el valor presente de $30 000, pagaderos a 18 meses, con tasa de interés simple del 12%.

Datos
$M = \$30\,000$
$T = 12\%$ anual
$i = 0.01$mensual
$n = 18$ meses
Incógnita: VP

$$VP = 30000\left[1+(0.12/12)(18)\right]^{-1}$$
$$VP = 30000\left[1+(0.01)(18)\right]^{-1}$$
$$VP = 30000(1.18)^{-1}$$
$$VP = 30000(0.8474)$$
$$VP = \$25423.73$$

CD-II-3.5
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $26 500, si el capital invertido es de $18 700 a una tasa de 6.8% anual?

Datos
$C = \$18\,700$
$M = \$26\,500$
$T = 6.8\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C}-1}{i}$$
$$n = \frac{\frac{26\,500}{18\,700}-1}{0.068} = \frac{1.4171-1}{0.068} = 6.134 \text{ años}$$

$n = 6$ años, 1 mes y 18 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-II-3.6
Una compañía solicita $500 000 de préstamo a un banco, a 2 años con una tasa de descuento de 12% anual.

a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad la compañía por el préstamo?

Datos
$M = \$500\,000$
$n = 2$ años
$d = 12\ \%$ anual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd$$
$$D = 500000(2)(0.12)$$
$$D = 500000(0.24)$$
$$D = \$120000$$

La cantidad que recibe la compañía es de:
$$C = M - D$$
$$C = 500000 - 120000$$
$$C = \$380000$$

CD-II-3.7
¿Cuánto recibe la señora Josefina por un pagaré de $45 600, 4 meses antes de su vencimiento, con una tasa de descuento del 15% anual?

Datos
$M = \$45\,600$
$n = 4$ meses
$d = 15\%$ anual
$$d = \frac{0.15}{12} = 0.0125 \text{ mensual}$$
Incógnita: C

CD-II-3.7 cont.
$$C = M(1 - nd)$$
$$C = 45600[1 - (4)(0.0125)]$$
$$C = 45600(1 - 0.05)$$
$$C = 45600(0.95)$$
$$C = \$43320$$

CD-II-3.8
Calcular la tasa de rendimiento, si el valor descontado a los 12 meses es de $12 948, y el monto de $15 000

Datos
$C = \$12\,948$
$n = 12$ meses
$M = \$15\,000$
Incógnita: R

$$R = \frac{M - C}{Cn}$$
$$R = \frac{15000 - 12948}{(12948)(12)}$$
$$R = \frac{2052}{155376} = 0.0132$$
$$R = 1.32\% \text{ mensual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-II-3.9
Hallar el valor de un pagaré, si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $6 540, a una tasa de descuento del 18% anual.

Datos
C = $6 540
d = 18% anual
d = 1.5% mensual
n = 6 meses
Incógnita: M

$$M = C(1+nd)$$
$$M = 6540\left[1+(6)(0.015)\right]$$
$$M = 6540\left[1+(0.09)\right]$$
$$M = 6540\left[1.09\right]$$
$$M = \$7128.60$$

CD-II-3.10
Una persona vendió a un banco un pagaré 3 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $8 355 y recibió del banco la cantidad de $6 835. Encontrar la tasa de descuento.

Datos
M = $8 355
C = $6 835
n = 3 meses
Incógnita: D y d

$$D = M - C$$
$$D = 8355 - 6835$$
$$D = 1520$$

CD-II-3.10 cont.

$$d = \frac{D}{Mn}$$
$$d = \frac{1520}{(8355)(3)}$$
$$d = \frac{1520}{25065}$$
$$d = 0.0606 \text{ mensual}$$
$$d = 6.06\% \text{ mensual}$$

Recursos académicos en línea ©

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte III

CD-III-3.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) La tasa de interés activa es la que cobran los bancos ____TRUE____
b) La tasa de interés pasiva es la que pagan los bancos ____TRUE____
c) El valor de vencimiento es igual al valor nominal más los intereses ____TRUE____
d) El pagaré es un compromiso por escrito para el pago de una determinada cantidad de dinero ____TRUE____
e) El deudor u otorgante es la persona que cobra el pagaré ____TRUE____

CD-III-3.2
Don Pablo abre una cuenta de inversión en Bansur por la cantidad de $2 000. Después de un año recibe $2 960. Por su inversión calcula:
a) El interés
b) La tasa de interés
c) El tipo de interés

Datos
$C = \$2\,000$
$M = \$2\,960$
$n = 1$ año
Incógnitas: I, i y T
a)
$$I = M - C$$
$$I = 2960 - 2000$$
$$I = \$960$$
b)
$$i = \frac{I}{Cn}$$
$$i = \frac{960}{(2000)(1)}$$
$$i = 0.48 \text{ anual}$$
c)
$$T = 48\% \text{ anual}$$

CD-III-3.3
La señora Prudencia solicita a una institución financiera un préstamo de $6 500 a una tasa de interés simple de 18% con un plazo de 55 días. Calcula el interés comercial y exacto.

Datos
$C = \$6\,500$
$T = 18\%$ anual
$n = 55$ días
Incógnitas: Io e Ie

$$Io = C\left(\frac{T}{360}\right)(n)$$
$$Io = 6500\left(\frac{0.18}{360}\right)(55)$$
$$Io = 6500(0.0005)(55)$$
$$Io = 6500(0.0275)$$
$$Io = \$178.75$$

$$Ie = C\left(\frac{T}{365}\right)(n)$$
$$Ie = 6500\left(\frac{0.18}{365}\right)(55)$$
$$Ie = 6500(0.000493)(55)$$
$$Ie = 6500(0.02712)$$
$$Ie = \$176.28$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-III-3.4
Fernando Barrales depositó en su cuenta de ahorros $8 000 el 5 de marzo y el 27 marzo lo retiró. La tasa de interés simple es de 7.7% anual. ¿Qué cantidad recibió?

Datos
C = $8 000
T = 7.7% anual
i = 0.000213888
n = 22 días
Incógnita: M

$$M = 8000\left[1+\left(0.077/360\right)\left(22\right)\right]$$
$$M = 8000\left[1+\left(0.00021388\right)\left(22\right)\right]$$
$$M = 8000\left(1+0.004705555\right)$$
$$M = \ 8000.00\left(1.004705556\right)$$
$$M = \$8037.64$$

CD-III-3.5
Hallar el valor presente de $48 230 de un pagaré que vence dentro de 6 meses, si la tasa de interés simple es de 6%.

Datos
M = $48 230
T = 6% anual
i = 0.005 mensual
n = 6 meses
Incógnita: VP

$$VP = 48230\left[1+\left(0.06/12\right)\left(6\right)\right]^{-1}$$
$$VP = 48230\left[1+\left(0.05\right)\left(6\right)\right]^{-1}$$
$$VP = 48230\left(1.03\right)^{-1}$$
$$VP = 48230\left(0.9708\right)$$
$$VP = \$46825.24$$

CD-III-3.6
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $35 650, si el capital invertido es de $29 780 a una tasa de 5.4% anual?

Datos
M = $35 650
C = $29 780
T = 5.4% anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C}-1}{i}$$
$$n = \frac{\frac{35\,650}{29\,780}-1}{0.054} = \frac{1.1971-1}{0.054} = 3.65 \text{ años}$$

n = 3 años, 7 meses y 24 días

CD-III-3.7
El señor Porfirio solicita un préstamo de $8 000 a una institución bancaria, a un plazo de 9 meses, con una tasa de descuento de 0.85% mensual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad el señor Porfirio por el préstamo?

Datos
M = $8 000
n = 9 meses
d = 0.85 % mensual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd$$
$$D = 8000\left(9\right)\left(0.0085\right)$$
$$D = 8000\left(0.0765\right)$$
$$D = \$612$$

La cantidad que recibe el señor Porfirio es de
$$C = M - D$$
$$C = M - D$$
$$C = \$7388$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-III-3.8

El arquitecto Mario Aguilar adquirió una deuda de $2 000 hace 6 meses y vence dentro de 12 meses a partir de la contratación. Además hace 4 meses contrajo una nueva deuda de $8 000 a pagarse dentro de 4 meses a partir del día de hoy. Asimismo, también adquirió otra deuda hace 1 mes por $3 000 a pagarse en 6 meses. El día de hoy el acreedor acepta un pago único en efectivo equivalente a las tres deudas, a una tasa de interés de 24%. Si la fecha focal se establece el día de hoy, ¿cuál debe ser el valor del pago único para cancelar sus deudas?

$$X = 2000\left[1+(0.24)(12/12)\right]\left[1+(0.24)(6/12)\right]^{-1}$$
$$+8000\left[1+(0.24)(8/12)\right]\left[1+(0.24)(4/12)\right]^{-1}$$
$$+3000\left[1+(0.24)(6/12)\right]\left[1+(0.24)(5/12)\right]^{-1}$$
$$X = 2000[1.24][1.12]^{-1} + 8000[1.16][1.08]^{-1} + 3000[1.12][1.1]^{-1}$$
$$X = 2000[1.24][0.8928] + 8000[1.16][0.9259] + 3000[1.12][0.9091]$$
$$X = 2000[1.1071] + 8000[1.0740] + 3000[1.0182]$$
$$X = 2214.20 + 8592.00 + 3054.60$$
$$X = \$13860.80$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

GLOSARIO

Acreedor. Es la persona o razón social a la que se debe pagar el dinero que nos han prestado.

Actividad financiera. Costumbre de pagar un rédito por el uso de dinero prestado.

Capital. En términos financieros es una determinada cantidad de dinero que permite ganar más (dinero) en operaciones de préstamo, llamada esta última interés.

Cuentas de inversión. También conocidas como cuentas de ahorro. En estas cuentas las personas pueden hacer depósitos y retiros del capital en cualquier momento (con tan sólo solicitarlo) y los intereses son bajos.

Compra. Acción de adquirir algo a cambio de dinero. También se refiere a un conjunto de bienes y servicios adquiridos en el acto de compra.

Compra a crédito. Compra cuyo importe no se paga en efectivo en el momento de la adquisición, sino que en la propia entidad vendedora o una tercera entidad concede crédito por la suma debida. En bolsa es la adquisición de acciones financiada a través de créditos por una autoridad bursátil.

Compra de contado. Compra cuyo importe se paga en el momento de la adquisición.

Compra a plazos. Contrato de compraventa en el cual el vendedor entrega el bien objeto de la transacción en el momento en que ésta se produce, y el comprador puede postergar sus pagos a futuras cuotas o plazos, pudiendo efectuar uno de estos pagos en el momento de la compra.

Comprador. Persona que adquiere un bien o derecho producto de una operación de compraventa.

Compraventa. Contrato por el que uno de los contratantes (vendedor) se obliga a entregar una cosa determinada y el otro (comprador) a pagar por ella un precio determinado. Asimismo, negocio de objetos que se revenden.

Contado. Procedimiento de cobro o pago que implica la entrega del bien o servicio con contrapartida monetaria en ese mismo momento.

Contrato. Negocio jurídico bilateral por el que dos o más personas físicas o jurídicas se obligan mutuamente a dar, hacer o no hacer algo, surgiendo entre ellas una relación obligatoria.

Crédito. Reputación, fama, prestigio que tiene una persona respecto al cumplimiento de sus obligaciones financieras.

Crédito a clientes. Cantidad que los clientes de una empresa le adeudan en función de los suministros que reciben.

Debe..Adeudar, estar en deuda con otra persona, estar obligado a cumplir una obligación o realizar un pago.

Demora. Retraso en el cumplimiento de una obligación de pago de una deuda, desde el momento en que ésta venció.

Depósito a plazo. Es el dinero depositado en una cuenta bancaria por la persona o razón social; su retiro es en una sola fecha determinada, de común acuerdo por ambas partes.

Descuento. Descuento concedido por las empresas a sus clientes por diversas causas: por pronto pago, por volumen de venta, etc.

Descuento en precios. Reducción en el precio de venta de un producto o servicio por motivos muy diversos: campañas de promoción, ferias, rebajas

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

estacionales, fidelidad del comprador, liquidación de existencias.

Descuento financiero. Operación financiera realizada por las entidades de crédito. Consistente en abonar al prestatario el importe, con rebaja de intereses, de una letra de cambio u otro mercantil antes de la fecha de su vencimiento.

Descuento por pronto pago. Descuento concedido por pagar las mercancías adquiridas al contado o en un plazo menor al establecido en la transacción comercial. Se trata de un porcentaje sobre las ventas que compensan el menor riesgo de insolvencia y la inmediata obtención de liquidez por parte de la empresa. Cuando se trata de descuento sobre compras por pronto pago, se refiere a una modalidad de descuento de proveedores en el que es la empresa la que reduce la cantidad a pagar a sus proveedores por realizar el pago dentro de unos días determinados por estos. Estos descuentos se registran en las cuentas de pérdidas y ganancias bajo el epígrafe de ingresos financieros.

Descuento por volumen de compra. Descuento concedido a la empresa cuando su volumen de compras con un determinado proveedor en un periodo, excede de una cierta cuantía, independientemente del tamaño de los pedidos que haya ido realizando con anterioridad. Estos descuentos se registran en la cuenta de pérdidas y ganancias como un menor importe de la compra que los origina.

Descuento por volumen de venta. Descuento que la empresa concede a sus clientes cuando su volumen de ventas con ellos en un periodo determinado supera una cierta cuantía.

Descuento sobre compras. Descuento concedido a las empresas por sus proveedores por diversas causas: volumen de compras, por pronto pago, etc.

Deuda. Obligación que se ha contraído con un tercero y que se ha de satisfacer. En general, es una obligación de pagar cierta cantidad de dinero.

Deudor. Es la persona o razón social que solicita un dinero prestado y se compromete a pagarlo posteriormente, extendiendo para ello un pagaré.

Dinero. Todo aquello aceptado como medio de pago o medición del valor. Las monedas y billetes de circulación son la forma final adoptadas por las economías como dinero. Es la suma de moneda circulante.

Dinero circulante. Dinero en efectivo, es decir, tesorería que la empresa en un momento determinado tiene como consecuencia de su funcionamiento. Una gestión eficiente de tesorería que maximice su rentabilidad evitando fondos ociosos incrementará el valor de la empresa.

Dinero de plástico. Tarjetas (de crédito, débito, de prepago, etc.) que se utilizan como medio de pago sustituyendo al dinero.

Dinero en circulación. Suma del efectivo en manos del público compuesto de billetes y moneda metálica de curso legal más los depósitos de todo tipo en el sistema bancario.

Empeñar. Entregar algo en prenda como garantía del pago de una deuda.

Empresa. Unidad económica de producción y decisión que, mediante la organización y coordinación de una serie de factores (capital y trabajo), persigue obtener un beneficio produciendo y comercializando productos o prestando servicios en el mercado.

Fábrica. Recinto en el que se instalan máquinas y otro tipo de equipos conjunta y ordenadamente para producción en masa de un determinado producto u objeto o para la transformación industrial de una fuente de energía.

Fabricar. Producir bienes o servicios mediante la transformación de materias primas o productos intermedios, valiéndose de una maquinaria y organización determinadas, de unos sistemas respectivos y haciéndolo en gran volumen.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Factura. Documento o recibo entregado por el vendedor al comprador como prueba de que éste ha adquirido una mercancía determinada o recibo de un servicio a un precio dado, y que representa, por tanto, el derecho de cobro a favor del vendedor. En la factura se especifican datos personales de ambos, las características de los productos, así como la fecha y el precio de compra.

Moneda en circulación. Son las monedas constantes y sonantes (aleaciones de metales). También a los billetes se les llama papel moneda.

Rédito. Renta de un capital.

Tanto por uno. Es el rendimiento que produce una moneda.

Tasa. También llamada tipo de interés o tanto por ciento, es el rendimiento que producen 100 unidades de moneda en una unidad de tiempo.

Tiempo. Es el número de periodos (tiempo predeterminado) que dura el préstamo de un capital.

En el país las tasas de interés que se utilizan en las operaciones comerciales y financieras no permanecen constantes por periodos grandes, por lo que es necesario fijar tasas de referencia. Las tasas de referencia más utilizadas son la Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE), el Costo Porcentual Promedio de Capitalización (CPP), el Costo de Capitalización a Plazo (CCP) y la tasa de los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES).

- **Tasa de interés activas**. Son las tasas que los bancos *cobran* por los diferentes tipos de crédito a los usuarios de éstos.

- **Tasa de interés pasivas**. Son las tasas de interés que los bancos *pagan* a los ahorradores e inversionistas.

- **Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE)**. Es el punto de equilibrio entre las tasas de interés pasivas y activas. Se obtienen a partir de la información que proporciona diariamente al Banco de México (BANXICO) de las diferentes instituciones bancarias del país (por lo menos seis), a las 12:00 horas de la ciudad de México. Las tasas son precios reales que los bancos están dispuestos a pedir prestado o prestar a BANXICO. Existen diferentes plazos de la TIIE, el más usual es de 28 días.

- **Costo Porcentual Promedio de Capitalización (CPP)**. Mide el costo al cual se fondean los bancos para cubrir sus pasivos. El Banco de México es el encargado de calcularlo y publicarlo el día 20 de cada mes en el *Diario Oficial de la Federación*.

- **Costo de Capitalización a Plazo (CCP)**. Es la estimación mensual del costo de capitalización a plazo por concepto de la tasa de interés de los pasivos a plazo en la moneda nacional a cargo de la banca múltiple y éste se utiliza para la tasa de interés de créditos en pesos. El Banco de México es el encargado de calcularlo y publicarlo los días 21 y 25 de cada mes en el *Diario Oficial de la Federación*.

- **Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES)**. Son instrumentos financieros de inversión cuya tasa de interés tiene un plazo de 28, 90 o 180 días y por lo regular, dicha tasa se utiliza como tasa de referencia.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.1
$7.50

3.2
$367 500

3.3
a) $530.83
b) $523.56

3.4
2.83% mensual

3.5
1.9% mensual

3.6
$3 220

3.7
$2 537 333.20

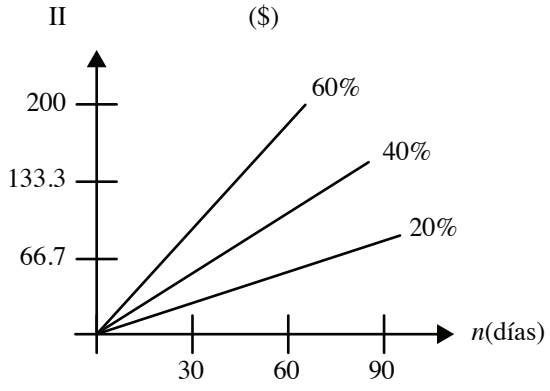
3.8
$9 195.40

3.9
$27 743

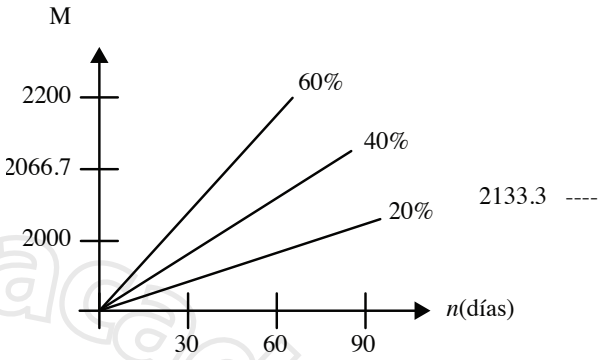
3.10
10 años

3.11
2 años, 9 meses y 10 días

3.12



3.13



3.14
$2 663 175

3.15
a) $ 284.93
b) $ 288.89
c) $ 280.55
d) $ 284.89

3.1
a) 335 días
b) 324 días

3.17
a) 176 días
c) 175 días

3.18
$425

3.19
$5 138

3.20
$14 356.21

3.21
$3 942

3.22
I = $1 440
M = $13 440

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.23
$22 720

3.24
$100 329.00

3.25
$1 200

3.26
$161.87

3.27
$1 208.05

3.28
$5 219.35

3.29
$13 200

3.30
$2 994.12

3.31
$153.57

3.32
$12 568

3.33
$697.66

3.34
a) $14 000
b) $11 000

3.35
$690

3.36
$543 630.47

3.37
$191 081.25

3.38
33.918% anual

3.39
76% anual

3.40
$21 686

3.41
$4 695.65

3.42
72.22% anual

3.43
25% anual

3.44
2 meses y 29 días

3.45
1 mes y 18 días

3.46
$1 912.50

3.47
El señor José Antonio Solís Díaz es el deudor y el señor Armando González Carrasco es el acreedor o beneficiario del pagaré. El valor nominal del documento es por $500 000. El 14 de febrero de 2007 es la fecha en que se expidió el documento y el 26 de diciembre de 2007 es la fecha de vencimiento. El plazo es de 315 días.

3.48
$631 250

3.49
Interés moratorio = $8 000,
Cantidad a pagar = $639 250

3.50
$33 312 y $33 438.34

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.51
1.7195% mensual

3.52
10.09% mensual

3.53
28.27%

3.54
$996.29

3.55
10%

3.56
45 días

3.57
$349.80

3.58
$1 830

3.59
$601.40

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas complementarios

Parte I

CD-I-3.1
¿Qué interés produce un capital de $76 600 a pagarse dentro de 13 semanas a una tasa de interés simple de 12% anual?

CD-I-3.2
Encontrar el interés exacto que se paga por un préstamo de $16 350, a 11.52% en 240 días.

CD-I-3.3
El arquitecto Juárez recibe un préstamo de $48 750 a 2 años. Si la tasa de interés es de 1.2% bimestral, ¿cuánto pagará dentro de 2 años?

CD-I-3.4
Un banco entrega al señor Juan Álvarez la cantidad de $2 255 000 por un préstamo a 1 año, 3 meses y 15 días, con una tasa de 27% de interés simple. ¿Cuál es el capital inicial del préstamo?

CD-I-3.5
Una deuda de $8 400 se liquidó el 29 de junio de este año con un cheque cuyo importe es de $9 080. Si la tasa de interés simple es de 11.75%, ¿cuánto tiempo estuvo prestado el dinero?

CD-I-3.6
Se descuenta al profesor Gómez un préstamo de $350 870 a un plazo de 180 días y con una tasa de descuento de 13% anual. Determinar:
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad de dinero recibe?

CD-I-3.7
Una compañía desea descontar un documento el 30 de abril con un valor de $683 656 y con una tasa de descuento de 10% anual. Si la fecha de vencimiento es el 30 de junio de este año, ¿cuánto dinero recibirá la compañía?

CD-I-3.8
Juan Torres recibe la cantidad de $100 000 por un préstamo a pagar en 10 meses y con una tasa de descuento de 10.5% anual. ¿Qué cantidad de dinero debió solicitar prestada?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte II

CD-II-3.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) El interés significa lo mismo que la tasa de interés _____
b) El capital es mayor que el monto _____
c) Valor descontado significa lo mismo que descuento _____
d) El deudor es la persona que cobra el pagaré _____
e) Se depositan $100 el 15 de marzo y se retira el 15 de octubre, entonces el plazo es de 199 días _____

CD-II-3.2
Un capital de $5 000 se duplica en 4 años con un tipo de interés simple de:

CD-II-3.3
Pedro solicita un préstamo de $38 000 a 2 años. Si la tasa de interés simple es de 3% mensual, ¿cuánto deberá pagar dentro de 2 años? La tasa y el tiempo se expresan en forma bimestral.

CD-II-3.4
Calcular el valor presente de $30 000, pagaderos a 18 meses, con tasa de interés simple del 12%.

CD-II-3.5
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $26 500, si el capital invertido es de $18 700 a una tasa de 6.8% anual?

CD-II-3.6
Una compañía solicita $500 000 de préstamo a un banco, a 2 años con una tasa de descuento de 12% anual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad la compañía por el préstamo?

CD-II-3.7
¿Cuánto recibe la señora Josefina por un pagaré de $45 600, 4 meses antes de su vencimiento, con una tasa de descuento del 15% anual?

CD-II-3.8
Calcular la tasa de rendimiento, si el valor descontado a los 12 meses es de $12 948, y el monto de $15 000

CD-II-3.9
Hallar el valor de un pagaré, si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $6 540, a una tasa de descuento del 18% anual.

CD-II-3.10
Una persona vendió a un banco un pagaré 3 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $8 355 y recibió del banco la cantidad de $6 835. Encontrar la tasa de descuento.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte III

CD-III-3.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) La tasa de interés activa es la que cobran los bancos _____
b) La tasa de interés pasiva es la que pagan los bancos _____
c) El valor de vencimiento es igual al valor nominal más los intereses _____
d) El pagaré es un compromiso por escrito para el pago de una determinada cantidad de dinero _____
e) El deudor u otorgante es la persona que cobra el pagaré _____

CD-III-3.2
Don Pablo abre una cuenta de inversión en Bansur por la cantidad de $2 000. Después de un año recibe $2 960. Por su inversión calcula:
a) El interés
b) La tasa de interés
c) El tipo de interés

CD-III-3.3
La señora Prudencia solicita a una institución financiera un préstamo de $6 500 a una tasa de interés simple de 18% con un plazo de 55 días. Calcula el interés comercial y exacto.

CD-III-3.4
Fernando Barrales depositó en su cuenta de ahorros $8 000 el 5 de marzo y el 27 marzo lo retiró. La tasa de interés simple es de 7.7% anual. ¿Qué cantidad recibió?

CD-III-3.5
Hallar el valor presente de $48 230 de un pagaré que vence dentro de 6 meses, si la tasa de interés simple es de 6%.

CD-III-3.6
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $35 650, si el capital invertido es de $29 780 a una tasa de 5.4% anual?

CD-III-3.7
El señor Porfirio solicita un préstamo de $8 000 a una institución bancaria, a un plazo de 9 meses, con una tasa de descuento de 0.85% mensual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad el señor Porfirio por el préstamo?

CD-III-3.8
El arquitecto Mario Aguilar adquirió una deuda de $2 000 hace 6 meses y vence dentro de 12 meses a partir de la contratación. Además hace 4 meses contrajo una nueva deuda de $8 000 a pagarse dentro de 4 meses a partir del día de hoy. Asimismo, también adquirió otra deuda hace 1 mes por $3 000 a pagarse en 6 meses. El día de hoy el acreedor acepta un pago único en efectivo equivalente a las tres deudas, a una tasa de interés de 24%. Si la fecha focal se establece el día de hoy, ¿cuál debe ser el valor del pago único para cancelar sus deudas?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Respuestas

¿Qué sabes?

En seguida aparecen las operaciones y las soluciones de los problemas enunciados al principio de la unidad.

3.1

¿Qué interés simple produce un capital de $15 600, a pagarse dentro de 13 semanas a una tasa de interés de 11.9% anual?

Datos
C = $ 15,600
T = 11.9% anual
n = 13 semanas
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/52)$$
$$I = 15600(0.119)(13/52)$$
$$I = 15600(0.119)(0.25)$$
$$I = 15600(0.02975)$$
$$I = \$464.10$$

3.2

Encontrar el interés exacto que se paga por un préstamo de $25 350 a 9.52% en 240 días.

Datos
C = $25 350
T = 9.52% anual
n = 240 días
Incógnita: Ie

$$Ie = C(T/100)(n/365)$$
$$Ie = 25350(0.0952)(240/365)$$
$$Ie = 25350(0.0952)(0.6575)$$
$$Ie = 25350(0.6575)$$
$$Ie = \$1586.84$$

3.3

El dueño de la tlapalería del pueblo recibe un préstamo de $18 650 a dos años. Si la tasa de interés es de 1.5% trimestral, ¿cuánto pagará dentro de dos años?

La tasa y el tiempo se expresan en forma trimestral.

Datos
C = $18 650
T = 1.5% trimestral
t = 0.015 trimestral
n = 2 años
n = 8 trimestres

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 18650[1+(0.015)(8)]$$
$$M = 18650[1+(0.12)]$$
$$M = 18650[1.12]$$
$$M = \$20888$$

3.4

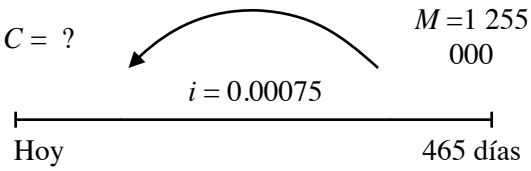
Un banco entrega al licenciado Aldama la cantidad $1 255 000 por un préstamo a un año, 3 meses y 15 días, con una tasa de 27%, ¿cuál es el capital inicial del préstamo?

Datos
M = $1 255 000
T = 27% anual
i = 0.00075 diario
n = 1 año, 3 meses y 15 días
n = 360 + 90 + 15
n = 465 días
Incógnita: C

$$C = 1255000[1+(0.00075)(465)]^{-1}$$
$$C = 1255000[1.34875]^{-1}$$
$$C = 1255000(0.741427)$$
$$C = \$930491.19$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.4 cont.



3.5

Una deuda de $7 545 se liquidó el 29 de junio de este año con un cheque cuyo importe es de $8 880. Si la tasa de interés simple es de 11.75%, ¿cuánto tiempo estuvo prestado?

Datos
$C = \$7\,545$
$M = \$8\,880$
$T = 11.75\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i}$$

$$n = \frac{\frac{8\,880}{7\,545} - 1}{0.1175} = \frac{1.176938 - 1}{0.1175} = 1.505858 \text{ años}$$

n = 1 año, 6 meses y 2 días

Cálculo de los meses y los días

$$\text{Años} = 1$$
$$\text{Meses} = 1.505858 - 1 = 0.505858$$
$$\text{Meses} = (0.505858)(12)$$
$$\text{Meses} = 6.0703$$
$$\text{Días} = 6.0703 - 6$$
$$\text{Días} = (0.0703)(30)$$
$$\text{Días} = 2.109$$
$$\text{Días} = 2$$

Como la tasa se da en forma anual, el periodo también es anual, entonces el resultado está expresado en años.

3.6

Se descuenta al profesor Gómez un préstamo de $150 000 a un plazo de 91 días, con una tasa de descuento de 13% anual.

a) ¿De cuánto es el descuento al momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad recibe?

Datos
$M = \$150\,000$
$n = 91$ días
$d = 13\%$ anual
$d =$ diario
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd$$
$$D = 150000(91)(0.0003611)$$
$$D = \$4929.16$$

La cantidad que recibe el profesor Gómez es de:

$$C = M - D$$
$$C = 150000 - 4929$$
$$C = \$145070.83$$

El profesor Gómez recibe $145 070.83, en lugar de los $150 000 solicitados, pero dentro de 91 días debe pagar $150 000, porque la institución financiera le aplicó el descuento comercial.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.7
Una compañía decide descontar un documento el 30 de abril con valor de $368 056, con una tasa de descuento de 13% anual. Si la fecha de vencimiento es el 30 de junio de este año. ¿Cuánto dinero recibirá la compañía?

Datos
$M = \$368\ 056$
$n = 61$ días
$d = 13\%$ anual
Incógnita: C

$$C = M(1 - nd)$$
$$C = 368056\left[1 - (61/360)(0.13)\right]$$
$$C = 368056\left[1 - (0.1694)(0.13)\right]$$
$$C = 368056(1 - 0.0220277)$$
$$C = 368056(0.97797)$$
$$C = \$359947.72$$

3.8
La señora Mendoza solicita un préstamo por una determinada cantidad de dinero. El plazo es de 7 meses y la tasa de descuento de 12%. Calcular la tasa mensual de rendimiento

Datos
$n = 7$ meses
$d = 12\%$ anual
d = 0.12 / 12 = 0.01 mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{d}{1 - dn}$$
$$R = \frac{0.01}{1 - (0.01)(7)}$$
$$R = \frac{0.01}{1 - 0.7}$$
$$R = \frac{0.01}{0.93}$$

3.8 cont.
$R = 0.0107527$ mensual
$R = 1.07527\%$ mensual
$R = 12.90\%$ anual

3.9
El arquitecto Rodríguez recibe la cantidad de $80 500 por un préstamo a pagar en 8 meses, con una tasa de descuento de 15% anual. ¿Qué cantidad de dinero debió solicitar prestada?

Datos
$C = \$80\ 500$
$n = 8$ meses
$d = 15\%$ anual
d = 0.15 / 12 = 0.0125 mensual
Incógnita: M

$$M = \frac{C}{1 - nd}$$
$$M = \frac{80\ 500}{1 - (8)(0.0125)}$$
$$M = \frac{80\ 500}{1 - 0.1}$$
$$M = \frac{80\ 500}{0.9}$$
$$M = \$89444.44$$

3.10
El señor Martínez firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $12 245. ¿Cuál es la tasa de descuento?

Datos
$C = \$200\ 000$
$D = \$12\ 245$
Incógnita: d

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.10 cont.

$$d = \frac{D}{Mn}$$

$$d = \frac{12245}{(200000)(8)}$$

$$d = \frac{12245}{1600000}$$

$$d = 0.007653 \text{ mensual}$$

$$d = 9.18\% \text{ anual}$$

3.11

El señor Martínez firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial de 18%, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $12 245. ¿Cuál es la tasa de rendimiento?

Datos
n = 9 meses
d = 18% anual
d = 0.18 / 12 = 0.015 mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{d}{1 - dn}$$

$$R = \frac{0.015}{1 - (0.015)(9)}$$

$$R = \frac{0.01}{1 - 0.135}$$

$$R = \frac{0.01}{0.865}$$

$$R = 0.01734 \text{ mensual}$$

$$R = 20.81\% \text{ anual}$$

Problemas a resolver

Interés

CD3.1

La contadora Alma invierte $5 000 y al término de un año recibe $5 250 por su inversión. Calcular:
a) El interés
b) La tasa de interés
c) El tipo de interés

a) El interés se obtiene sustituyendo el valor del capital y el monto en la ecuación 3.1.

Datos
C = $5 000
M = $5 250
n = Un año
Incógnita: I

$$I = M - C$$

$$I = 5250 - 5000$$

$$I = \$\ 250$$

b) La tasa de interés
Incógnita: i.

$$i = \frac{I}{Cn}$$

$$i = \frac{250}{5\,000}$$

$$i = 0.05 \text{ anual}$$

c) El tipo de interés
Incógnita: T

$$T = (0.05)(100)$$

$$T = 5\% \text{ anual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.2
El señor Martínez solicitó un préstamo al ISSSTE de $18 500 al 9% anual durante un año. Calcular el interés simple a pagar.

Datos
C =$18 500
T = 9% anual
i = 0.09 anual
n = 1 año
Incógnita: I

$$I = Cni$$
$$I = 18500(1)(0.09)$$
$$I = \$1665$$

CD3.3
¿Cuál es la tasa de interés por un préstamo de $15 000 a un año, si se pagaron intereses de $1 900?

Datos
I = $1 900
C = $15 000
n = un año
Incógnita: i

$$i = I/C$$
$$i = 1900/15000$$
$$i = 0.1266 \text{ anual}$$
$$T = 12.66\% \text{ anual}$$

CD3.4
Se prestó un capital de $4 950 000 a un fabricante de juguetes durante tres años con un interés preferencial de $1 860 000.
¿Cuál fue la tasa de interés pactada?

Datos
C =$4 950 000
I =$1 860 000
n = 3 años
Incógnita: T

CD3.4 cont.
$$i = I/Cn$$
$$i = 1860000/[(4950000)(3)]$$
$$i = 0.1252 \text{ anual}$$
$$T = 12.52\% \text{ anual}$$

CD3.5
El señor Tomas Baroja le prestó a su cuñado la cantidad de $3 550 a una tasa de interés simple de 1.5% mensual, por 21 días.
¿Cuánto recibirá de intereses?

Datos
C = $3 550
T = 1.5% mensual
n = 21 días
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/30)$$
$$I = 3550(0.015)(21/30)$$
$$I = \$37.28$$

CD3.6
Usted compra un automóvil en $399 999 a pagarse en un año, a una tasa de interés simple de 12.4%. Calcular el interés correspondiente al primer mes de pago.

Datos
C = $399 999
T = 12.4% anual
n = 1 mes
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/12)$$
$$I = 399999(0.124)(1/12)$$
$$I = \$4133.32$$

Recursos académicos en línea · Grupo Editorial Patria

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Interés comercial y real

CD3.7
¿Qué interés produce un capital de $1 500 al 4% durante el mes de marzo?

a) Interés simple, comercial y tiempo exacto.
Año comercial de 360 días.
Tiempo exacto, el mes tiene 31 días.
$Io = 1500(0.04)(360/360) = \$5.16$

b) Interés simple, comercial y tiempo aproximado.
Año comercial de 360 días.
Tiempo aproximado, el mes tiene 30 días.
$Io = 1500(0.04)(30/360) = \$5.00$

c) Interés simple, real y tiempo exacto.
Año real de 365 días.
Tiempo exacto, el mes tiene 31 días.
$Ie = 1500(0.04)(31/365) = \$5.09$

d) Interés simple, real y tiempo aproximado.
Año real de 365 días.
Tiempo aproximado, el mes tiene 30 días.
$Ie = 1500(0.04)(30/365) = \$4.93$

CD3.8
¿Qué interés produce un capital de $8 500, al 4.6% de interés simple, del 18 de mayo de 2012 al 8 de abril de 2013?

a) Interés simple, comercial y tiempo exacto.
$Io = 8500(0.046)(325/360) = \$352.99$

b) Interés simple, comercial y tiempo aproximado.
$Io = 8500(0.046)(320/360) = \$347.55$

c) Interés simple, real y tiempo exacto.
$Ie = 8500(0.0.46)(325/365) = \$348.15$

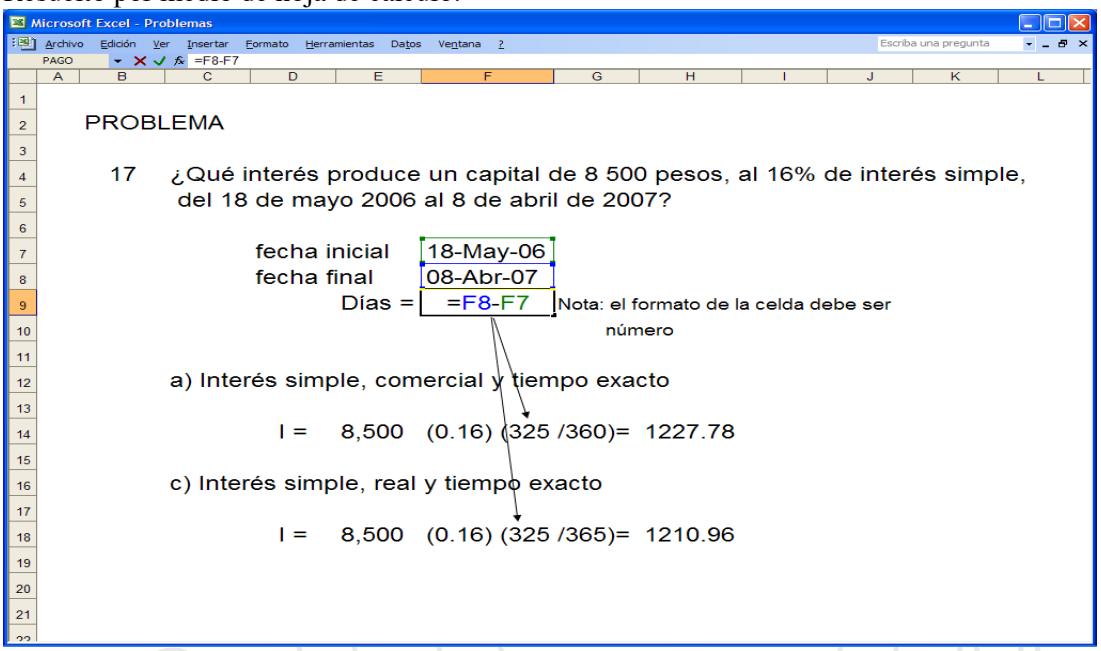
d) Interés simple, real y tiempo aproximado.
$Ie = 8500(0.4.6)(320/365) = \$342.79$

cursos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.9
¿Qué interés produce un capital de 8 500 pesos, al 16% de interés simple, del 18 de mayo de 2006 al 8 de abril de 2007?

Resuelto por medio de hoja de cálculo:



CD3.10
Calcular el interés exacto si el interés ordinario es de $189.25.

$$Ie = 0.9863\ Io$$
$$Ie = 0.9863(189.25)$$
$$Ie = \$186.65$$

CD3.11
Calcular el interés ordinario si el interés exacto es de $385.15.

$$Io = 1.0139\ Ie$$
$$Io = 1.0139(385.15)$$
$$Io = \$390.5$$

CD3.12
Calcular el interés ordinario con tiempo exacto de $18 500 al 25% anual prestado durante 60 días.

$$Io = Cn(i/365)$$
$$Io = 18500(0.25)(60/365)$$
$$Io = \$760.27$$

CD3.13
Calcular el interés ordinario con tiempo aproximado de $24 750 al 27% anual prestado durante 180 días.

$$Io = Cn(i/360)$$
$$Io = 24750(180)(0.27/360)$$
$$Io = \$3341.25$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.14
Calcular el interés exacto de $385.15 con una tasa de interés de 24.32% durante 154 días.

Datos:
C = $385.15
T = 24.32%
n = 154 días
Incógnita: Ie

$$Ie = Cn(i/365)$$
$$Ie = 385.15(0.2432)(154/365)$$
$$Ie = \$39.52$$

CD3.15
Jesús Martínez depositó en su cuenta de ahorros $3 000 el día 5 de marzo y el día 27 de marzo lo retira. La tasa de interés simple es de 5.7% anual. Calcular el interés comercial y exacto, considerando que el año es bisiesto.

Datos
C = $3 000
T = 5.7% anual
Incógnitas:
n
Io
Ie
Los días transcurridos n = 27 – 5 = 22 días

a) Interés comercial
$$Io = 3\,000\left[\frac{0.057}{360}\right](22)$$
$$Io = \$10.45$$

b) Interés exacto
$$Io = 3\,000\left[\frac{0.057}{366}\right](22)$$
$$Io = \$10.27$$

CD3.16
Katia Rodríguez depositó en su cuenta de ahorro $5 000 el 5 de junio y el 27 de junio lo retiró. La tasa de interés simple es de 4.05% anual. Calcular el interés comercial y exacto, considerando el año bisiesto.

a) Datos
C = $5 000
T = 4.05%
n = 27 – 5 = 22 días
Incógnita: Io

$$Io = Cni/360$$
$$Io = 5000(22)(0.405/360)$$
$$Io = \$12.38$$

b) Datos
C = $35 042
T = 32.42%
n = 154 días
Incógnita: Ie

$$Ie = Cni/365$$
$$Ie = 5000(22)(0.405/365)$$
$$Ie = \$12.21$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.17
Calcular el interés que se debe pagar por un préstamo de $8 000 al 25.2% durante 340 días.

Como no se indica el tipo de interés a calcular, se debe entender que el tipo de interés es el comercial u ordinario, a menos que se indique lo contrario.

Datos
$C = \$8\,000$
$T = 25.2\%$
$n = 340$ días
Incógnita: Io

$$Io = Cni/360$$
$$Io = 8000(0.252)(340/360)$$
$$Io = \$1904$$

Cálculo del monto

CD3.18
Calcular el monto de un préstamo de $3 150 al 16% de interés simple, durante 1.5 años.

Datos:
$C = \$3\,150$
$T = 16\%$ anual
$n = 1.5$ años
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 3150[1+(0.16)(1.5)]$$
$$M = 3150(1.24)$$
$$M = \$3906$$

CD3.19
El arquitecto Ignacio Aguilera Hernández consigue un préstamo de $9 000 a 15 bimestres, para comprar una computadora. La tasa de interés simple es del 2% bimestral. ¿Cuánto pagará dentro de 15 bimestres?

Datos:
$C = \$9\,000$
$T = 2\%$ bimestral
$n = 15$ bimestres
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 9000[1+(0.02)(15)]$$
$$M = 9000[1+(0.30)]$$
$$M = \$11700$$

CD3.20
El alumno Eduardo Arteaga Mora depositó en su cuenta de ahorros $3 000 el 5 de enero y el 31 de enero lo retiró para comprarse un teléfono celular. La tasa de interés simple es de 4.7% anual. Calcular el monto, considerando que el año es bisiesto.

Datos:
$C = \$3\,000$
$T = 4.7\%$ anual
Los días transcurridos $n = 31 - 5 = 26$ días
Incógnitas: n y M

$$M = 3000\left[1+\left(\frac{0.047}{366}\right)(26)\right] = \$3010$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.21
Calcular el monto de un préstamo personal al banco del ejército de $5 500 a una tasa de interés simple de 24% anual del 3 de septiembre al 28 de diciembre del mismo año, considerando que el año es bisiesto.

Datos
C = $5 500
T = 24% anual
Incógnitas:
n
M

Los días transcurridos

Tabla 1

Mes	Días
Septiembre	30 – 3 = 27
Octubre	31
Noviembre	30
Diciembre	28
Total	116

$$M = 5500\left[1+\left(\frac{0.24}{366}\right)(116)\right] = \$5918.36$$

CD3.22
Calcular el monto de un préstamo de $18 000 al 26% de interés simple, durante dos años.

Datos
C = $18 000
T = 26% anual
n = 2 años

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 18000\left[1+(0.26)(2)\right]$$
$$M = \$27360$$

CD3.23
¿Qué monto hay que pagar al ISSSTE por un crédito de corto plazo de $49 000 al 9% anual, después de 1 año y 6 meses?

Datos
C = $49 000
n = 18 meses
T = 9% anual
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 49000\left[1+\left(\frac{0.09}{12}\right)(18)\right]$$
$$M = \$55615$$

CD3.24
Magaly recibe un préstamo de Alexa para adquirir calzado con valor de $32 500. Acuerda pagar la deuda 4 meses después con una tasa de interés de 24% anual. ¿Cuánto deberá pagar Magaly después de 4 meses?

Datos
C =$ 32 500
T = 24% anual
n = 4 meses
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 32500\left[1+(0.24)\left(\frac{4}{12}\right)\right]$$
$$M = 32500\left[1.08\right]$$
$$M = \$35100$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.25
El comunicador Jesús Miguel deposita $55 000 en un fondo de inversión, que da un rendimiento de 0.9% mensual. Para comprar más equipo para su negocio, decide retirar el depósito 28 días después.
¿Cuánto le entregarán al retirar capital e intereses?

Datos
$C = \$55\,000$
$T = 0.9\%$ mensual
$n = 28$ días
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 55000\left[1+(0.009)(28/30)\right]$$
$$M = 55000\left[1+(0.0014)\right]$$
$$M = \$55462$$

CD3.26
El ingeniero Tomas Aguirre consigue un préstamo de $26 000 a 2 años, para comprar una computadora. La tasa de interés simple es de 3% bimestral ¿Cuánto deberá pagar dentro de 2 años?

Datos
$C = \$26\,000$
$T = 3\%$ bimestral
$n = 2$ años
$n = 12$ bimestres

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 26000\left[1+(0.03)(12)\right]$$
$$M = 26000\left[1.36\right]$$
$$M = \$35360$$

CD3.27
Calcular el monto acumulado al 24 de marzo del 2014, de un depósito de $22 600 realizado el 14 de octubre de 2013 en una cuenta que abona una TIIE de 25.5% anual más 5.8 puntos porcentuales. Para solucionar el problema utilice el interés simple ordinario con tiempo aproximado.

Datos
$C = \$22\,600$
TIIE = 25.5% anual
5.8 puntos porcentuales
$T = 31.3\%$ anual
$n = 160$ días

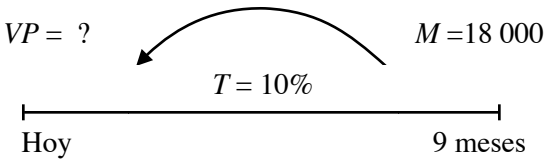
$$M = 22600\left[1+160\left(\frac{0.313}{360}\right)\right] = \$25743.91$$

Valor presente o actual

CD3.28
Encontrar el valor presente de $18 000, pagaderos a 9 meses, con tasa de interés simple de 10%.

Datos
$M = \$18\,000$
$T = 10\%$ anual
$n = 9$ meses
Incógnita: VP

$$VP = 18000\left[1+(0.1)(9/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 18000\left[0.93023\right]$$
$$VP = \$16744.18$$

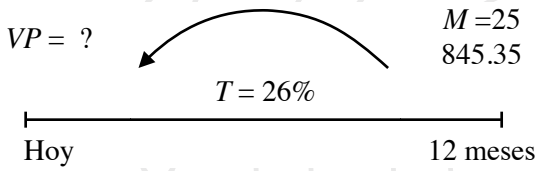


D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.29
¿Cuál será el valor presente de $25 845.35, pagaderos a 12 meses, con tasa de interés simple del 26%?

Datos
M = $25 845.35
T = 26% anual
n = 12 meses
Incógnita: VP

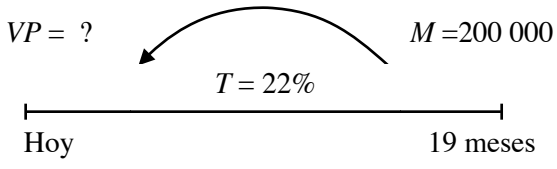
$$VP = 25845.35\left[1+(0.26)(12/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 25845.35\left[0.79365\right]$$
$$VP = \$20512.18$$



CD3.30
Calcular el valor presente de $200 000, pagaderos a 19 meses, con tasa de interés simple del 22%.

Datos
M = $200 000
T = 22% anual
n = 19 meses

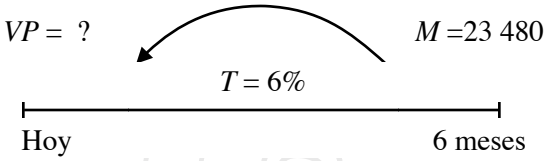
$$VP = 200000\left[1+(0.22)(19/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 200000.00\left[0.741656\right]$$
$$VP = \$148331.27$$



CD3.31
Encontrar el valor presente de $23 480 de un pagaré que vence dentro de 6 meses y si la tasa de interés simple es del 6%.

Datos
M = $23 480
T = 6% anual
n = 6 meses
Incógnita: VP

$$VP = 23480\left[1+(0.06)(6/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 23480\left[1.03\right]^{-1}$$
$$VP = 23480\left[0.9709\right]$$
$$VP = \$22796.12$$



Los $22 796.12 son el valor presente de $23 480, lo que significa que si el día de hoy invertimos $22 796.12, durante 6 meses a una tasa del 6%, obtendríamos $23 480.

CD3.32
¿Cuánto debe invertir una psicóloga el día de hoy, si la tasa de interés es de 1.75% trimestral, para disponer de $450 000 dentro de tres años?

Datos
M = $450 000
T = 1.75% trimestral
n = 12 trimestres

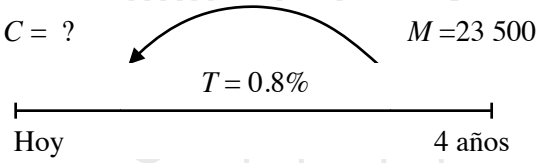
$$C = 450000\left[1+(12)(0.0175)\right]^{-1}$$
$$C = 18000\left[0.82645\right]$$
$$C = \$371900.83$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.33
¿Cuánto debe invertir la señora Andrea Portos el día de hoy, a una tasa de 0.8% simple trimestral para disponer de $23 500 dentro de 4 años?

Datos
$M = \$23\,500$
$T = 0.8\%$ trimestral
$n = 4$ años
$n = 16$ trimestres

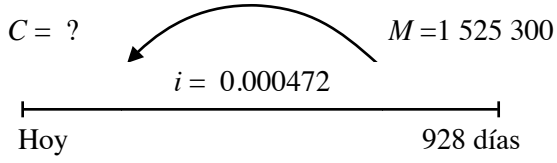
$$C = 23500\left[1+(16)(0.008)\right]^{-1}$$
$$C = 23500\left[1.128\right]^{-1}$$
$$C = 23500(0.887)$$
$$C = \$20883.30$$



CD3.34
Don Jacinto pagó $1 525 300, por un préstamo bancario con un plazo a 2 años, 6 meses y 28 días, a una tasa de 17% por la compra de un camión de carga. Encontrar el capital inicial del préstamo.

Datos
$M = \$1\,525\,300$
$T = 17\%$ anual
$i = 0.000472$ diario
$n = 720 + 180 + 28$

$$C = 1525300\left[1+(0.000472)(928)\right]^{-1}$$
$$C = 1525300\left[1.438\right]^{-1}$$
$$C = 1525300(0.6954)$$
$$C = \$1060697.52$$

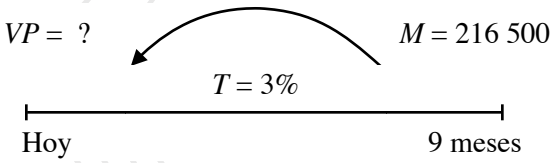


CD3.35
Una persona compró un automóvil compacto por el cual pagó $212 480 el primero de diciembre y lo vendió el 31 de agosto del año siguiente en $216 500 ¿Es conveniente la compra realizada si la tasa de interés que ofrece el banco es de 0.9% mensual?

Para evaluarla la conveniencia se debe calcular el valor presente de la cantidad que pagó por el automóvil.

Datos
Pago el primero de diciembre = $212 480
$M = \$216\,500$
$T = 0.9\%$ mensual
$n = 9$ meses
Incógnita: VP

$$VP = 216500\left[1+(0.009)(9)\right]^{-1}$$
$$VP = 216500\left[1.081\right]^{-1}$$
$$VP = 216500(0.92506)$$
$$VP = \$200277.52$$



Si la tasa de inversión fuera igual a la tasa de interés en el mercado por la compra de automóviles, la persona dejaría de ganar:
216 500.00 – 200 277.52 = $16 222.48
por haber invertido en el automóvil. Una mejor alternativa hubiera sido una inversión bancaria.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tiempo o plazo

CD3.36
El primero de septiembre se depositan $9 500 en una cuenta bancaria. ¿En cuánto tiempo se acumularían $11 000 a una tasa de interés del 6%?

Datos
$C = \$9\,500$
$M = \$11\,000$
$T = 6\%$ Anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i} = \frac{\frac{11000}{9500} - 1}{0.06} = \frac{1.15789 - 1}{0.06} = 2.6315 \text{ años}$$

Cálculo de los meses y los días

$$\text{Años} = 2$$
$$\text{Meses} = 2.6315 - 2 = 0.6315$$
$$\text{Meses} = (0.6315)(12)$$
$$\text{Meses} = 7.578$$
$$\text{Días} = 7.578 - 7$$
$$\text{Días} = (0.578)(30)$$
$$\text{Días} = 17.34$$

$n = 2$ años, 7 meses y 17 días

CD3.37
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $34 500, si el capital invertido es de $28 800 a una tasa de 5.1% anual?

Datos
$C = \$28\,800$
$M = \$34\,500$
$T = 5.1\%$ anual

$$n = \frac{\frac{34\,500}{28\,800} - 1}{0.051} = \frac{1.179772 - 1}{0.051} = 3.88$$

$n = 3$ años, 10 meses y 17 días

CD3.38
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $5 740, si el capital invertido es de $4 287 a una tasa de 4.5% anual?

Datos
$C = \$4\,287$
$M = \$5\,740$
$T = 4.5\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{5\,740}{4\,287} - 1}{0.045} = \frac{1.33893 - 1}{0.045} = 7.5318$$

$n = 7$ años, 6 meses y 11 días

CD3.39
Una deuda de $48 000 se liquidó el 11 de octubre con un cheque cuyo importe es de $50 800, y la tasa de interés aplicada de 23.73% ¿Cuánto tiempo estuvo prestado el dinero?

Datos
$C = \$48\,000$
$M = \$50\,800$
$T = 23.73\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{50\,800}{48\,000} - 1}{0.2373} = \frac{1.05833 - 1}{0.2373} = 0.2458$$

$n = 2$ meses y 28 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.40

¿Cuánto tiempo debe de transcurrir para que un capital se duplique si la tasa de interés es de 8.5% anual? Como el capital inicial es C; entonces el monto al final del plazo es el doble de C ($M = 2C$).

$$M = C(1+ni)$$
$$2C = C(1+ni)$$
$$\frac{2C}{C} = 1+ni$$
$$2 = 1+ni$$
$$2-1 = ni$$
$$\frac{1}{i} = n$$
$$n = \frac{1}{0.085} = 11.7647 \text{ años}$$

n = 11 años, 9 meses y 5 días

CD3.41

¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que un capital de $1 500 alcance un monto de $3 000 si la tasa de interés es de 25% anual?

Ahora, si M = pesos, entonces, M es el doble de C = $1 500, por tanto:

$$3\,000 = 1\,500\left[1+n(0.25)\right]$$
$$\frac{3\,000}{1\,500} = 1+n(0.25)$$
$$2 = 1+n(0.25)$$
$$n = \frac{1}{0.25} = 4 \text{ años}$$

CD3.42

Encontrar el tiempo exacto y aproximado, del día 4 de mayo al 20 septiembre del mismo año.

Para encontrar el tiempo exacto nos auxiliamos de la columna cuatro de la siguiente tabla 2 (para encontrar el día del año ver el apéndice A).

Tabla 2

Fecha	Mes	Día del año
4 de mayo	5	124
20 de septiembre	9	263
Diferencia	4	**139**

Tiempo exacto = 263 – 124 = 139 días
Otra forma de calcularlo se muestra en la tabla 3.

Tabla 3

Mes	Días del mes	Días
Mayo	31	31– 4 = 27
Junio	30	30
Julio	31	31
Agosto	31	31
Septiembre	30	20
Total		**139**

El tiempo aproximado se calcula considerando los meses de 30 días y en el caso de México no se cuenta el primer día pero si el último del plazo. Para encontrar el tiempo exacto nos auxiliamos de la columna cuatro de la siguiente tabla 4 (para encontrar el día del año ver el apéndice C).

Tabla 4

Fecha	Mes	Día	Día del año
4de mayo	5	40	124
20 de septiembre	9	28	260
Diferencia	4	12	136

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Descuento simple

CD3.43
¿Cuál es el descuento que se hace a un préstamo de $3 500, a un plazo de 6 meses, con una tasa de descuento simple de 20% anual?

Datos
M = $3 500
n = 6 meses
d = 20 % anual
d = 0.20/12 = 0.0166
Incógnita: D

$$D = Mnd = 3500(6)(0.20/12) = \$350$$

CD3.44
¿Cuál es el descuento que hace Banorte a un préstamo de $19 500, a un plazo de 13 meses, con una tasa de descuento simple de 1.8% mensual?

Datos
M = $19 500
n = 13 meses
d = 1.8% mensual
d = 0.018 mensual
Incógnita: D

$$D = Mnd = 19500(13)(0.018) = \$4563$$

CD3.45
¿Cuál es el descuento que se hace a un préstamo de $8 300, a un plazo de 8 meses, con una tasa de descuento simple de 24% anual?

Datos
M = $3 500
n = 8 meses
d = 24 % anual
d = 0.24/12 = 0.02
Incógnita: D

$$D = Mnd = 8300(8)(0.24/12) = \$1328$$

CD3.46
¿Cuál es el descuento que hace Banorte a un préstamo de $7 500, a un plazo de 16 meses, con una tasa de descuento simple de 1.5% mensual?

Datos
M = $7 500
n = 16 meses
d = 1.5 % mensual
d = 0.015 mensual
Incógnita: D

$$D = Mnd = 7500(16)(0.015) = \$1800$$

CD3.47
Un banco cobra el 26% de interés por adelantado al señor Cabrera por un préstamo a corto plazo, de $10 000 del 2 de mayo al 30 de octubre del presente año. Calcular el descuento que aplica el banco al señor Cabrera.

Datos
M = $10 000
n = 181 días
T = 26% anual (es el 26% de descuento bancario)
Incógnita: D

$$D = Mnd = 10000(181)(0.26/360) = \$1307.22$$

CD3.48
Calcular el valor presente de $2 000 a 24% de interés simple a un plazo de 9 meses. ¿Cuál es el descuento que realizó Invemex Banco por el préstamo?

Datos
M = $2 000
n = 9 meses
T = 24% anual
i = 0.02 mensual
Incógnitas: VP y D

$$D = M - VP = 2000 - 1694.91 = \$305.09$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Valor descontado o ganancia

CD3.49
El profesor Arriaga solicita un préstamo a Bansur de $12 000 a un plazo de 13 meses, con una tasa de descuento de 2.2% mensual.
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad en realidad recibe el profesor Arriaga?

Datos
$M = \$12\,000$
$n = 13$ meses
$d = 2.2\%$ mensual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 12000(13)(0.022) = \$3432$$

La cantidad que recibe el profesor Arriaga es de:
$$C = M - D = 12000 - 3432 = \$8568$$

CD3.50
La Compañía Electrohogar S.A. solicita $3 500 000 de préstamo al banco de Sonora, a 2 años con una tasa de descuento de 12% anual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad la Compañía Electrohogar S.A., por el préstamo?

Datos
$M = \$3\,500\,000$
$d = 12\%$ anual
$n = 2$ años
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 3500000(2)(0.12) = \$840000$$

La cantidad recibida por la Compañía Electrohogar S.A., es de:
$$C = M - D = 3500000 - 840000 = \$2660000$$

La compañía recibe $2 660 000 en lugar de los $3 500 000 solicitados, y en 2 años tendrá que pagar $3 500 000, ya que el Banco de Sonora le aplicó un descuento comercial.

CD3.51
El administrador de la compañía papelera Gabo S.A. solicita un préstamo al banco INVURSA de $13 500 000 a un plazo de 18 meses, con una tasa de descuento de 1.2% mensual.
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad en realidad recibe el administrador?

Datos
$M = \$13\,500\,000$
$n = 18$ meses
$d = 1.2\%$ mensual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 13500000(18)(0.012) = \$2916000$$

La cantidad que recibe el administrador es de:
$$C = M - D = 13500000 - 2916000 = \$10584000$$

CD3.52
El banco Invursa cobra 7% de descuento bancario en préstamos a largo plazo. Juan Luis Trejo necesita $40 000, para pagarlos con intereses en 6 años. ¿Qué cantidad debe solicitar en préstamo y cuánto paga de interés?

Datos
$T = 7\%$ anual
$M = \$40\,000$
$n = 6$ años
Incógnitas: C e I

$$C = M(1 - nd)^{-1} = 40000[1 - (0.07)(6)]^{-1} = \$68965.52$$
$$I = M - C = 68965.52 - 40000 = \$28965.52$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tasa de rendimiento

CD3.53
Bansur aplica un descuento de $640 120 a la contadora Pamela Alfaro por un préstamo a 6 meses con una tasa de descuento de 19% anual, por la compra de remodelación de su despacho. ¿Cuál es la tasa de rendimiento?

a) Calculamos el monto
Datos
$d = 19\%$ anual
$D = \$640\ 120$
$n = 6$ meses

$$M = \frac{D}{dn} = \frac{640120}{0.19(6/12)} = \frac{640120}{0.095} = \$6\,738105.26$$

b) Calculamos el valor descontado:

$$C = M - D$$
$$C = 6\,738105.26 - 640120$$
$$C = \$6097985.26$$

c) Se calcula el valor de la tasa de rendimiento

$$R = \frac{M - C}{Cn}$$
$$R = \frac{6\,738105.26 - 6097\,985.26}{6097\,985.26(6)}$$
$$R = \frac{640119.99}{3840\,719.98}$$
$$R = 0.0175$$
$$R = 1.75\% \text{ mensual}$$
$$R = 20.99\% \text{ anual}$$

CD3.54
¿Cuál es la tasa de rendimiento, si el valor descontado a los 11 meses es de $22 948, y el monto de $24 000?

Datos
$M = \$24\ 000$
$C = \$22\ 948$
$n = 11$ meses
Incógnita: R

$$R = \frac{M - C}{Cn}$$
$$R = \frac{24000 - 22948}{22948(11)}$$
$$R = \frac{1052}{252428}$$
$$R = 0.0041675$$
$$R = 0.417\% \text{ mensual}$$
$$R = 5.0\% \text{ anual}$$

CD3.55
El abogado Amando Suárez Copel solicita un préstamo por una determinada cantidad de dinero. El plazo es de 9 meses y la tasa de descuento de 19%. Calcular la tasa mensual de rendimiento

Datos
$d = 19\%$
$n = 9$ meses
Incógnita: R

$$R = \frac{1}{1 - nd}$$
$$R = \frac{0.19/12}{(0.19/12)(9)}$$
$$R = \frac{0.0158333}{0.8575}$$
$$R = 0.0184645$$
$$R = 1.84645\% \text{ mensual}$$
$$R = 22.157\% \text{ anual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.56
El Banco IXE-MEX cobra el 12% de descuento bancario en préstamos a corto plazo. ¿Qué interés simple le cobra el Banco IXE-MEX, a la señora Ana Lucía Vega por un préstamo de $14 000 a un plazo de 6 meses?

Datos
d =12%
n = 6 meses
Incógnita: R

$$R = \frac{1}{1 - nd}$$
$$R = \frac{0.12/12}{(0.12/12)(6)}$$
$$R = \frac{0.01}{0.94}$$
$$R = 0.01064$$

Solución alternativa:
$$M = \frac{C}{1 - dn}$$
$$M = \frac{14000}{1 - (0.12)(6/12)}$$
$$M = \frac{14000}{0.94}$$
$$M = \$14893.61$$
$$I = M - C$$
$$I = 14893.61 - 14000$$
$$I = \$893.61$$
$$R = \frac{I}{Cn}$$
$$R = \frac{893.61}{14000(6)}$$
$$R = 0.010638 \cong 0.01064$$

Valor de vencimiento

CD3.57
El doctor Jerry Alfaro descontó en el banco un pagaré por el cual recibió la cantidad de $19 167, a una tasa de descuento de 20% anual. El vencimiento del pagaré fue 6 meses después de su descuento. ¿Cuál sería el valor del documento en la fecha de su vencimiento?

a) Calculamos el descuento
C = $19 167
n = 6 meses
d = 20% anual
d = 0.20/12= 0.0166

$$D = \frac{Cnd}{1 - dn}$$
$$D = \frac{(19\,167)(6)(0.01666)}{1 - (6)(0.0166)}$$
$$D = \frac{1916.7}{0.9}$$
$$D = \$21472.53$$

b) Calcular el valor del monto
$M = C + D = 19167 + 2129.66 = \$21296.66$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.58
Encontrar el valor de un pagaré si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $19 540, a una tasa de descuento de 18% anual.

Datos
$C = \$19\,540$
$n = 6$ meses
$d = 18\%$ anual
$d = 0.015$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{19\,540}{1-(6)(0.015)}$$
$$M = \frac{19\,540}{0.91}$$
$$M = \$214\,72.53$$

CD3.59
Calcular el valor de un pagaré, si 8 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $8 450, a una tasa de descuento de 20% anual.

Datos
$C = \$8\,450$
$n = 8$ meses
$d = 20\%$ anual
$d = 0.016666$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{8\,450}{1-(8)(0.016666)}$$
$$M = \frac{8\,450}{0.866}$$
$$M = \$9\,750$$

CD3.60
La señora Lucia Vega solicita un préstamo a un banco y éste le entrega la cantidad de $10 000, para pagar en 13 meses, a una tasa de descuento de 22% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

Datos
$C = \$10\,000$
$n = 13$ meses
$d = 22\%$ anual
$d = 0.01833$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{10\,000}{1-(13)(0.01833)}$$
$$M = \frac{10\,000}{0.76166}$$
$$M = \$13129.10$$

CD3.61
El señor Duran solicita un préstamo al banco BANCA y éste le entrega la cantidad de $20 000, para pagar en 12 meses, a una tasa de descuento de 23% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

Datos
$C = \$20\,000$
$n = 12$ meses
$d = 23\%$ anual
$d = 0.019166$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{20\,000}{1-(12)(0.019166)}$$
$$M = \frac{20\,000}{0.77}$$
$$M = \$25\,974.03$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.62
El profesor de matemáticas descontó en el banco un pagaré por el cual recibió la cantidad de $16 766, a una tasa de descuento de 23% anual. El vencimiento del pagaré es 6 meses después de su descuento. ¿Cuál sería el valor del documento en la fecha de su vencimiento?

Primero calculamos el descuento

$C = \$16\,766$
$d = 23\%$ anual
$d = 0.23/12 = 0.019166$
$n = 6$ meses
Incógnita: D

$$D = \frac{Cnd}{1 - dn}$$
$$D = \frac{(16\,766)(6)(0.019166)}{1 - (6)(0.019166)}$$
$$D = \$2\,178.63$$

Ahora se calcula el valor del monto
$$M = C + D$$
$$M = 16766.00 + 2177.77$$
$$M = \$18\ 944.63$$

CD3.63
Encontrar el valor de un pagaré, si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $9 540, a una tasa de descuento de 20% anual.

Datos
$C = \$9\,540$
$n = 6$ meses
$d = 20\%$ anual
$d = 0.016667$ mensual
Incógnita: M

$$C = M(1 - nd)$$

CD3.63 cont.
Despejando M de la ecuación anterior se obtiene:

$$M = \frac{C}{1 - nd}$$
$$M = \frac{9\,540}{1 - (6)(0.016667)} = \$10\,600$$

CD3.64
La publicista Antonia Villagrán solicita un préstamo a un banco y éste le entrega la cantidad de $8 000, para pagar en 12 meses, a una tasa de descuento de 23% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

Datos
$C = \$8\,000$
$n = 12$ meses
$d = 23\%$ anual
$d = 0.23/12 = 0.019166$

$$M = \frac{C}{1 - nd} = \frac{8000}{1 - (12)(0.019166)} = \$10389.61$$

Tasa de descuento

CD3.65
El dueño de la tintorería De Héctor vendió a un banco un pagaré 3 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $18 355 y recibió del banco la cantidad de $16 835. Encontrar la tasa de descuento.

Datos
$C = \$16\,835$
$M = \$18\,355$
$n = 3$ meses

$$D = M - C = 18355 - 16835 = \$1\,520$$
$$d = \frac{D}{Mn} = \frac{1\,520}{(18\,355)(3)} = \frac{1\,520}{55\,065} = 0.0276$$
$$d = 2.76\% \text{ mensual}$$
$$d = 33.12\% \text{ anual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.66
El dueño de la panificadora Trigo vendió a un banco un pagaré 6 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $19 355 y recibió del banco la cantidad de $17 855. Encontrar la tasa de descuento.

Datos
$C = \$17\,855$
$M = \$19\,355$
$n = 6$ meses

$$D = M - C = 19355 - 17855 = \$1500$$

$$d = \frac{D}{Mn} = \frac{1\,500}{(19355)(6)} = \frac{1500}{116\,130} = 0.0129$$

$$d = 1.29\% \text{ mensual}$$

$$d = 15.5\% \text{ anual}$$

CD3.67
El señor Chavarría firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $21 240.50. ¿Cuál es la tasa de descuento?

Datos
$M = \$200\,000$
$D = \$21\,240.50$
$n = 8$ meses
Incógnita: d

$$d = \frac{D}{Mn} = \frac{21240.50}{(200000)(8)} = 0.0118$$

$$d = 1.18\% \text{ mensual}$$

$$d = 14.16\ \% \text{ anual}$$

CD3.68
Encontrar la tasa de rendimiento de un préstamo solicitado por el administrador. Adrián Salvatorio, a pagar en 6 meses, con una tasa de descuento de 18% anual.

Datos
$d = 18\%$ anual
$d = 0.18/12 = 0.015$ mensual
$n = 6$ meses

$$R = \frac{d}{1 - dn} = \frac{(0.015)}{1 - (0.015)(6)} = 0.01648$$

$$R = 1.648\% \text{ mensual}$$

$$R = 19.78\% \text{ anual}$$

CD3.69
Un banco descuenta un pagaré de $55 000, con vencimiento en 7 meses y una tasa de descuento de 22%. ¿Qué tasa de rendimiento obtiene en realidad el banco?

Datos
$d = 22\%$ anual
$n = 7$ meses

$$R = \frac{d}{1 - dn} = \frac{(0.22/12)}{1 - (0.22/12)(7)} = 0.02103$$

$$R = 2.103\% \text{ mensual}$$

$$R = 25.23\% \text{ anual}$$

CD3.70
Un banco del Bajío descuenta un pagaré de $150 000, con vencimiento en 9 meses y una tasa de descuento de 24%. ¿Qué tasa de rendimiento obtiene en realidad el banco?

Datos
$d = 24\%$ anual
$n = 9$ meses

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.70 cont.

$$R = \frac{d}{1 - dn} = \frac{(0.24/12)}{1 - (0.24/12)(9)} = 0.02439$$

$R = 2.439\%$ mensual

$R = 29.27\ \%$ anual

Plazo

CD3.71

La compañía Londres S. A. descuenta un pagaré por el cual recibe $28 879, a una tasa de descuento del 30% anual. ¿Cuánto tiempo falta para el vencimiento del pagaré, si éste tiene valor nominal de $70 000?

Datos
$M = \$70\ 000$
$C = \$28\ 879$
$d = 30\%$ anual

$$D = M - C = 70000 - 28879 = \$41\,121$$

$$n = \frac{D}{Md} = \frac{41121.00}{70000(0.30)} = 1.95814$$

Plazo = 1 año, 11 meses y 15 días

CD3.72

La casa de ropa Adrianos descuenta un pagaré por el cual recibe $29 887, a una tasa de descuento del 26% anual. ¿Cuánto tiempo falta para el vencimiento del pagaré si éste tiene valor nominal de $60 000?

Datos
$M = \$60\ 000$
$C = \$29\ 887$
$d = 26\%$ anual

$$D = M - C = 60000 - 29887 = \$30113$$

$$n = \frac{D}{Md} = \frac{30\,113}{60000(0.26)} = 1.93$$

Plazo = 1 año, 11 meses y 5 días

CD3.73

Encontrar la fecha en que se descontó un pagaré de $34 000 con vencimiento el 12 de julio del presente año. Como el descuento es comercial el banco descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $3 670, con una tasa de descuento del 26% anual.

Datos
$M = \$34\ 000$
$D = \$3\ 670$
$d = 26\%$ anual

$$n = \frac{D}{Md} = \frac{3\,670}{34\,000(0.26)} = 0.4151$$

$n = (0.4151)(360)$

$n = 149.45$ días $\cong$ 149

$n = 4$ meses 29 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Pagaré

CD3.74
Encontrar el valor descontado del siguiente pagaré a Hielo del Atlántico S. A., el 15 de julio de 2006 en un banco que ofrece una tasa de descuento del 14%.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 15 de Marzo de 2014 $900 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
Hielo del Atlántico S.A. en México D.F.
el día 15 de Septiembre de 2014 la cantidad de Novecientos mil
pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción en mercancía
La suma anterior causará intereses 24% anual hasta la fecha de vencimiento.
En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir
48% anual **por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.**

Nombre Oscar Calva Montes
Domicilio Av. Pacífico 56481
Colonia Cafetalera
Ciudad México D.F. Acepto (amos)
C. P. 04836

a) Calcular el valor de vencimiento del pagaré
Datos
$C = \$900\,000$
$n = 6$ meses
$T = 24\%$ anual
$i = 0.02$
Incógnitas: I y M

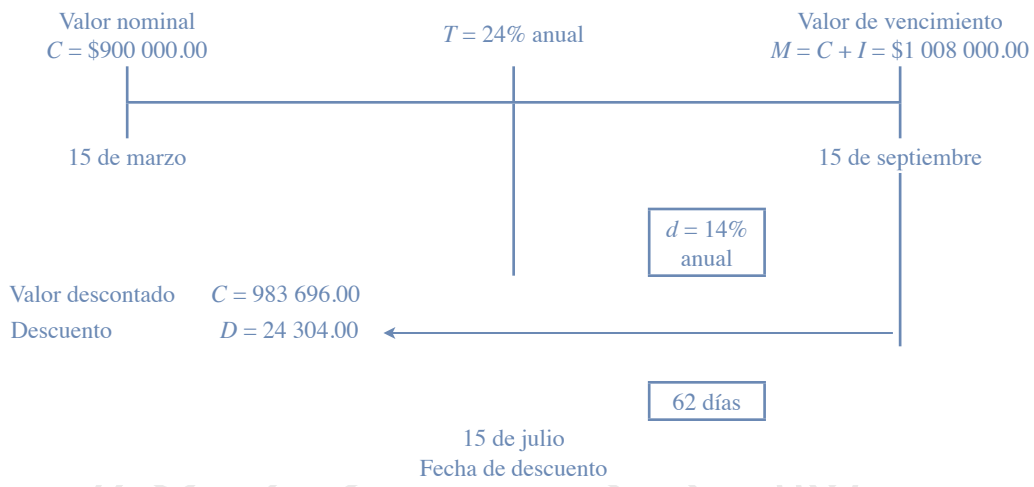
$$I = Cni = 900000(6)(0.24/12) = \$108000$$
$$M = C + I = 900000 + 108000 = \$1008000$$

b) Calcular el descuento y el valor descontado (valor efectivo)
Datos
$M = \$1\,008\,000$
$d = 14\%$ anual
$n = 62$ días
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 1008000(62/360)(0.14) = \$24304$$
$$C = M - D = 1008000 - 24304 = \$983696$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.74 cont.



CD3.75

Encontrar el valor descontado del siguiente pagaré, a la compañía Kolvi S.A., el 30 de agosto de 2006 en un banco que ofrece una tasa de descuento de 18%.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 30 de Marzo de 20 13 $1 300 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
Compañía de Kolvi S.A. en Puebla, Pue.
el día 30 de Noviembre de 20 13 la cantidad de
Un millón trescientos mil pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción en material
La suma anterior causará intereses 18 % anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 48 % anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Mauricio Solís Martínez
Domicilio Calle 57 Oriente
Colonia Centro
Ciudad Puebla, Pue.
C. P. 08765

Acepto (amos)

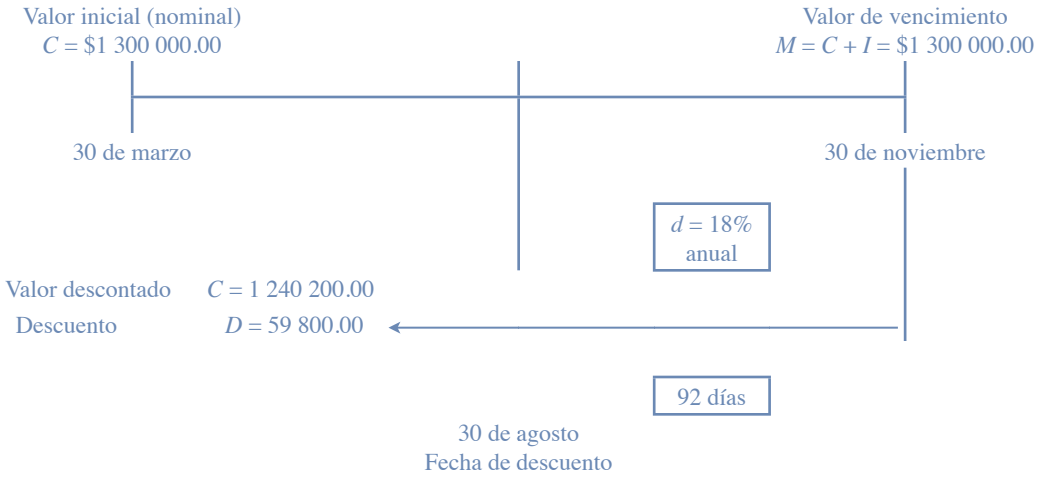
No es necesario calcular el valor de vencimiento del pagaré, porque éste no indica la tasa de interés a pagar. Entonces se procede a calcular el descuento y el valor descontado (valor efecto), sabiendo que el valor de vencimiento es igual al valor nominal.

Datos
$M = \$1\ 300\ 000$
$d = 18\%$ anual
$n = 92$ días
Incógnitas: D y C

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.75 cont.

$$D = Mnd = 1300000(92/360)(0.18) = \$59800$$
$$C = M - D = 1300000 - 59800 = \$1240200$$



CD3.76
El agrónomo Javier Domínguez Pedrosa firmó un pagaré a la tienda de fertilizantes Viarsa con valor de $800 000 pagaderos a 9 meses, con una tasa de interés de 20%. ¿Cuál es el valor descontado del pagaré 2 meses antes de su vencimiento con la misma tasa de descuento?

Datos
C = $800 000
n = 9 meses
T = 20 % anual
Incógnita: M

a) $M = C(1+ni) = 800000\left[1+(9/12)(0.20)\right] = \$920000$

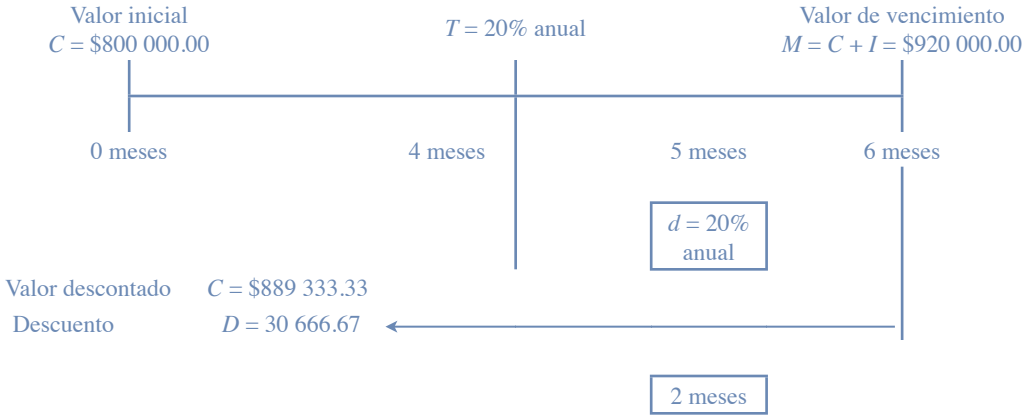
b) Calcular el descuento y el valor descontado.

Datos
M = $920 000
n = 2 meses
d = 20% anual

$$D = Mnd = 920000(2/12)(0.20) = \$30666.67$$
$$C = M - D = 920000 - 30666.67 = \$889333.33$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.76 cont.



CD3.77

Del siguiente pagaré encontrar el valor de vencimiento. Si este pagaré se liquidó 12 días después de su vencimiento, calcular el interés moratorio y la cantidad a pagar.

Documento 1 de 1 Núm._____

México D.F. a 14 de enero de 2014 $ 348 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de Sr. Juan Barreda Suarez en México D.F.
el día 26 de Noviembre de 2014 la cantidad de
trescientos cuarenta y ocho mil pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción

La suma anterior causará intereses 20% anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 45% anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Juan Luis Herrera Rosales
Domicilio Av. Coyoacán 56481
Colonia Árbol de Fuego
Ciudad México D.F.
C. P. 04814

Acepto (amos)

Datos
C = $348 000
n = 316 días
d = 20% anual
Incógnitas: M y Im

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.77 cont.

a) El valor de vencimiento del pagaré es:

$$M = 348000\left[1+\left(\frac{0.20}{360}\right)(316)\right] = \$\ 409093.33$$

b) Interés moratorio

$$Im = 409\,093.33\left[\left(\frac{0.45}{360}\right)(12)\right] = \$6\,136.40$$

Cantidad a pagar = (capital + intereses ordinarios) + intereses moratorios
Cantidad a pagar = 409 093.33 + 6136.40 = $415 229.73

CD3.78
Del siguiente pagaré, calcular la cantidad que pidió prestada el señor Balboa a la señora Camargo y calcular el valor presente del documento al 20 de septiembre.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 14 de Febrero de 20 14 $ 1 200 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
la señora Sonia Camargo Dorantes en México D.F.
el día 26 de diciembre de 20 14 la cantidad de un millóm doscientos mil pesos 00/100

Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción _____
La suma anterior causará intereses 25% anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 48% anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Joaquín Balbia Gaytán
Domicilio Jacaranda 81
Colonia Arboledas
Ciudad México D.F.
C. P. 04814

Acepto (amos)

a) Del 14 de febrero (hoy) al 26 de diciembre transcurren 315 días.

$$C = 1\,200000\left[1+\left(\frac{0.25}{360}\right)(315)\right]^{-1} = \$984615.38$$

b) Del 20 de septiembre al 26 de diciembre hay 97 días.

$$VP = 1200000\left[1+\left(\frac{0.25}{360}\right)(97)\right]^{-1} = \$\,1124268.05$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas complementarios
Parte I

CD-I-3.1
¿Qué interés produce un capital de $76 600 a pagarse dentro de 13 semanas a una tasa de interés simple de 12% anual?

Datos
C = $76 600
T = 12% anual
n = 13 semanas
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/52)$$
$$I = 76600(0.12)(13/52)$$
$$I = 76600(0.12)(0.25)$$
$$I = 76600(0.03)$$
$$I = \$2298$$

CD-I-3.2
Encontrar el interés exacto que se paga por un préstamo de $16 350, a 11.52% en 240 días.

Datos
C = $16 350
T = 11.52% anual
n = 240 días
Incógnita: Ie

$$Ie = C(T/100)(n/365)$$
$$Ie = 16350(0.1152)(240/365)$$
$$Ie = 16350(0.1152)(0.00031561)$$
$$Ie = 16350(0.07574)$$
$$Ie = \$1238.48$$

CD-I-3.3
El arquitecto Juárez recibe un préstamo de $48 750 a 2 años. Si la tasa de interés es de 1.2% bimestral, ¿cuánto pagará dentro de 2 años?

La tasa y el tiempo se expresan en forma bimestral.

Datos
C = $48 750
T = 1.2% bimestral
t = 0.012 bimestral
n = 2 años
n = 12 bimestres

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 48750\left[1+(0.012)(12)\right]$$
$$M = 48750\left[1+(0.144)\right]$$
$$M = 48750\left[1.144\right]$$
$$M = \$55770$$

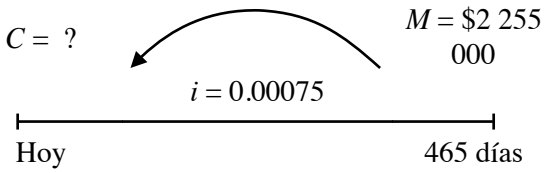
CD-I-3.4
Un banco entrega al señor Juan Álvarez la cantidad de $2 255 000 por un préstamo a 1 año, 3 meses y 15 días, con una tasa de 27% de interés simple. ¿Cuál es el capital inicial del préstamo?

Datos
M = $2 255 000
T = 27% anual
i = 0.00075 diario
n = 1 año, 3 meses y 15 días
n = 360 + 90 + 15
n = 465 días
Incógnita: C

$$C = 2255000\left[1+(0.00075)(465)\right]^{-1}$$
$$C = 2255000\left[1.34875\right]^{-1}$$
$$C = 2255000(0.741427)$$
$$C = \$1671917.88$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-I-3.4 cont.



CD-I-3.5

Una deuda de $8 400 se liquidó el 29 de junio de este año con un cheque cuyo importe es de $9 080. Si la tasa de interés simple es de 11.75%, ¿cuánto tiempo estuvo prestado el dinero?

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i}$$

Datos
C = $8 400
M = $9 080
T = 11.75% anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{9\,080}{8\,400} - 1}{0.1175} = \frac{1.0809 - 1}{0.1175} = 0.688 \text{ años}$$

n = 8 meses, 8 días

Como la tasa se da en forma anual, el periodo también es anual, entonces el resultado se expresa en años.

CD-I-3.6

Se descuenta al profesor Gómez un préstamo de $350 870 a un plazo de 180 días y con una tasa de descuento de 13% anual. Determinar:
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad de dinero recibe?

Datos
M = $350 870
n = 180 días
d = 13% anual
d = 0.0003611 diario
Incógnitas: D y C

CD-I-3.6 cont.

$$D = Mnd$$
$$D = 350870(180)(0.0003611)$$
$$D = 350870(0.065)$$
$$D = \$22806.55$$

La cantidad que recibe el profesor Gómez es de:
$$C = M - D$$
$$C = 350870 - 22806.55$$
$$C = \$328063.45$$

CD-I-3.7

Una compañía desea descontar un documento el 30 de abril con un valor de $683 656 y con una tasa de descuento de 10% anual. Si la fecha de vencimiento es el 30 de junio de este año, ¿cuánto dinero recibirá la compañía?

Datos
M = $683 656
n = 2 meses
d = 10% anual
d = 0.10 / 12 = 0.00833 mensual
Incógnita: C

$$C = M(1 - nd)$$
$$C = 683656[1 - (2)(0.00833)]$$
$$C = 683656(1 - 0.01666)$$
$$C = 683656(0.98334)$$
$$C = \$672266.29$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-I-3.8
Juan Torres recibe la cantidad de $100 000 por un préstamo a pagar en 10 meses y con una tasa de descuento de 10.5% anual. ¿Qué cantidad de dinero debió solicitar prestada?

Datos
C = $100 000
n = 10 meses
d = 10.5% anual
d = 0.15 / 12 = 0.00875 mensual
Incógnita: M

$$M = \frac{C}{1 - nd}$$

$$M = \frac{100000}{1 - (10)(0.00875)}$$

$$M = \frac{100000}{1 - 0.00875}$$

$$M = \frac{100000}{0.9125}$$

$$M = \$109589.04$$

Parte II

CD-II-3.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) El interés significa lo mismo que la tasa de interés FALSE
b) El capital es mayor que el monto FALSE
c) Valor descontado significa lo mismo que descuento FALSE
d) El deudor es la persona que cobra el pagaré FALSE
e) Se depositan $100 el 15 de marzo y se retira el 15 de octubre, entonces el plazo es de 199 días FALSE

Se considera año comercial por realizarse un depósito en una institución financiera (ver apéndice C).

Año comercial (365 días)

Fecha	Día del año
15 de marzo	73
15 de octubre	287
Total de días transcurridos	214

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-II-3.2
Un capital de $5 000 se duplica en 4 años con un tipo de interés simple de:

Datos
$C = \$5\,000$
$M = 2C$
$N = 4$ años
Incógnita: T

$$M = C(1+ni)$$
$$2C = C(1+ni)$$
$$\frac{2C}{C} = 1+ni$$
$$2 = 1+ni$$
$$2-1 = ni$$
$$\frac{1}{n} = i$$
$$i = \frac{1}{4} = 0.25$$

CD-II-3.3
Pedro solicita un préstamo de $38 000 a 2 años. Si la tasa de interés simple es de 3% mensual, ¿cuánto deberá pagar dentro de 2 años? La tasa y el tiempo se expresan en forma bimestral.

Datos
$C = \$38\,000$
$T = 3\%$ mensual
$t = 0.03$ mensual
$n = 2$ años
$n = 24$ meses
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 380000\left[1+(0.03)(24)\right]$$
$$M = 38000\left[1+(0.72)\right]$$
$$M = 38000\left[1.72\right]$$
$$M = \$65360$$

CD-II-3.4
Calcular el valor presente de $30 000, pagaderos a 18 meses, con tasa de interés simple del 12%.

Datos
$M = \$30\,000$
$T = 12\%$ anual
$i = 0.01$mensual
$n = 18$ meses
Incógnita: VP

$$VP = 30000\left[1+(0.12/12)(18)\right]^{-1}$$
$$VP = 30000\left[1+(0.01)(18)\right]^{-1}$$
$$VP = 30000(1.18)^{-1}$$
$$VP = 30000(0.8474)$$
$$VP = \$25423.73$$

CD-II-3.5
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $26 500, si el capital invertido es de $18 700 a una tasa de 6.8% anual?

Datos
$C = \$18\,700$
$M = \$26\,500$
$T = 6.8\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C}-1}{i}$$
$$n = \frac{\frac{26\,500}{18\,700}-1}{0.068} = \frac{1.4171-1}{0.068} = 6.134 \text{ años}$$

$n = 6$ años, 1 mes y 18 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-II-3.6
Una compañía solicita $500 000 de préstamo a un banco, a 2 años con una tasa de descuento de 12% anual.

a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad la compañía por el préstamo?

Datos
$M = \$500\,000$
$n = 2$ años
$d = 12\ \%$ anual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd$$
$$D = 500000(2)(0.12)$$
$$D = 500000(0.24)$$
$$D = \$120000$$

La cantidad que recibe la compañía es de:
$$C = M - D$$
$$C = 500000 - 120000$$
$$C = \$380000$$

CD-II-3.7
¿Cuánto recibe la señora Josefina por un pagaré de $45 600, 4 meses antes de su vencimiento, con una tasa de descuento del 15% anual?

Datos
$M = \$45\,600$
$n = 4$ meses
$d = 15\%$ anual
$$d = \frac{0.15}{12} = 0.0125 \text{ mensual}$$
Incógnita: C

CD-II-3.7 cont.
$$C = M(1 - nd)$$
$$C = 45600[1 - (4)(0.0125)]$$
$$C = 45600(1 - 0.05)$$
$$C = 45600(0.95)$$
$$C = \$43320$$

CD-II-3.8
Calcular la tasa de rendimiento, si el valor descontado a los 12 meses es de $12 948, y el monto de $15 000

Datos
$C = \$12\,948$
$n = 12$ meses
$M = \$15\,000$
Incógnita: R

$$R = \frac{M - C}{Cn}$$
$$R = \frac{15000 - 12948}{(12948)(12)}$$
$$R = \frac{2052}{155376} = 0.0132$$
$$R = 1.32\% \text{ mensual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-II-3.9
Hallar el valor de un pagaré, si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $6 540, a una tasa de descuento del 18% anual.

Datos
C = $6 540
d = 18% anual
d = 1.5% mensual
n = 6 meses
Incógnita: M

$$M = C(1+nd)$$
$$M = 6540\left[1+(6)(0.015)\right]$$
$$M = 6540\left[1+(0.09)\right]$$
$$M = 6540\left[1.09\right]$$
$$M = \$7128.60$$

CD-II-3.10
Una persona vendió a un banco un pagaré 3 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $8 355 y recibió del banco la cantidad de $6 835. Encontrar la tasa de descuento.

Datos
M = $8 355
C = $6 835
n = 3 meses
Incógnita: D y d

$$D = M - C$$
$$D = 8355 - 6835$$
$$D = 1520$$

CD-II-3.10 cont.

$$d = \frac{D}{Mn}$$
$$d = \frac{1520}{(8355)(3)}$$
$$d = \frac{1520}{25065}$$
$$d = 0.0606 \text{ mensual}$$
$$d = 6.06\% \text{ mensual}$$

Recursos académicos en línea ©

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte III

CD-III-3.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) La tasa de interés activa es la que cobran los bancos ____TRUE____
b) La tasa de interés pasiva es la que pagan los bancos ____TRUE____
c) El valor de vencimiento es igual al valor nominal más los intereses ____TRUE____
d) El pagaré es un compromiso por escrito para el pago de una determinada cantidad de dinero ____TRUE____
e) El deudor u otorgante es la persona que cobra el pagaré ____TRUE____

CD-III-3.2
Don Pablo abre una cuenta de inversión en Bansur por la cantidad de $2 000. Después de un año recibe $2 960. Por su inversión calcula:
a) El interés
b) La tasa de interés
c) El tipo de interés

Datos
$C = \$2\,000$
$M = \$2\,960$
$n = 1$ año
Incógnitas: I, i y T
a)

$$I = M - C$$
$$I = 2960 - 2000$$
$$I = \$960$$

b)

$$i = \frac{I}{Cn}$$
$$i = \frac{960}{(2000)(1)}$$
$$i = 0.48 \text{ anual}$$

c)

$$T = 48\% \text{ anual}$$

CD-III-3.3
La señora Prudencia solicita a una institución financiera un préstamo de $6 500 a una tasa de interés simple de 18% con un plazo de 55 días. Calcula el interés comercial y exacto.

Datos
$C = \$6\,500$
$T = 18\%$ anual
$n = 55$ días
Incógnitas: Io e Ie

$$Io = C\left(\frac{T}{360}\right)(n)$$
$$Io = 6500\left(\frac{0.18}{360}\right)(55)$$
$$Io = 6500(0.0005)(55)$$
$$Io = 6500(0.0275)$$
$$Io = \$178.75$$

$$Ie = C\left(\frac{T}{365}\right)(n)$$
$$Ie = 6500\left(\frac{0.18}{365}\right)(55)$$
$$Ie = 6500(0.000493)(55)$$
$$Ie = 6500(0.02712)$$
$$Ie = \$176.28$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-III-3.4
Fernando Barrales depositó en su cuenta de ahorros $8 000 el 5 de marzo y el 27 marzo lo retiró. La tasa de interés simple es de 7.7% anual. ¿Qué cantidad recibió?

Datos
C = $8 000
T = 7.7% anual
i = 0.000213888
n = 22 días
Incógnita: M

$$M = 8000\left[1+\left(0.077/360\right)\left(22\right)\right]$$
$$M = 8000\left[1+\left(0.00021388\right)\left(22\right)\right]$$
$$M = 8000\left(1+0.004705555\right)$$
$$M = \ 8000.00\left(1.004705556\right)$$
$$M = \$8037.64$$

CD-III-3.5
Hallar el valor presente de $48 230 de un pagaré que vence dentro de 6 meses, si la tasa de interés simple es de 6%.

Datos
M = $48 230
T = 6% anual
i = 0.005 mensual
n = 6 meses
Incógnita: VP

$$VP = 48230\left[1+\left(0.06/12\right)\left(6\right)\right]^{-1}$$
$$VP = 48230\left[1+\left(0.05\right)\left(6\right)\right]^{-1}$$
$$VP = 48230\left(1.03\right)^{-1}$$
$$VP = 48230\left(0.9708\right)$$
$$VP = \$46825.24$$

CD-III-3.6
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $35 650, si el capital invertido es de $29 780 a una tasa de 5.4% anual?

Datos
M = $35 650
C = $29 780
T = 5.4% anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C}-1}{i}$$
$$n = \frac{\frac{35\,650}{29\,780}-1}{0.054} = \frac{1.1971-1}{0.054} = 3.65 \text{ años}$$

n = 3 años, 7 meses y 24 días

CD-III-3.7
El señor Porfirio solicita un préstamo de $8 000 a una institución bancaria, a un plazo de 9 meses, con una tasa de descuento de 0.85% mensual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad el señor Porfirio por el préstamo?

Datos
M = $8 000
n = 9 meses
d = 0.85 % mensual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd$$
$$D = 8000\left(9\right)\left(0.0085\right)$$
$$D = 8000\left(0.0765\right)$$
$$D = \$612$$

La cantidad que recibe el señor Porfirio es de
$$C = M - D$$
$$C = M - D$$
$$C = \$7388$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-III-3.8

El arquitecto Mario Aguilar adquirió una deuda de $2 000 hace 6 meses y vence dentro de 12 meses a partir de la contratación. Además hace 4 meses contrajo una nueva deuda de $8 000 a pagarse dentro de 4 meses a partir del día de hoy. Asimismo, también adquirió otra deuda hace 1 mes por $3 000 a pagarse en 6 meses. El día de hoy el acreedor acepta un pago único en efectivo equivalente a las tres deudas, a una tasa de interés de 24%. Si la fecha focal se establece el día de hoy, ¿cuál debe ser el valor del pago único para cancelar sus deudas?

$$X = 2000\left[1+(0.24)(12/12)\right]\left[1+(0.24)(6/12)\right]^{-1}$$
$$+8000\left[1+(0.24)(8/12)\right]\left[1+(0.24)(4/12)\right]^{-1}$$
$$+3000\left[1+(0.24)(6/12)\right]\left[1+(0.24)(5/12)\right]^{-1}$$
$$X = 2000[1.24][1.12]^{-1} + 8000[1.16][1.08]^{-1} + 3000[1.12][1.1]^{-1}$$
$$X = 2000[1.24][0.8928] + 8000[1.16][0.9259] + 3000[1.12][0.9091]$$
$$X = 2000[1.1071] + 8000[1.0740] + 3000[1.0182]$$
$$X = 2214.20 + 8592.00 + 3054.60$$
$$X = \$13860.80$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

GLOSARIO

Acreedor. Es la persona o razón social a la que se debe pagar el dinero que nos han prestado.

Actividad financiera. Costumbre de pagar un rédito por el uso de dinero prestado.

Capital. En términos financieros es una determinada cantidad de dinero que permite ganar más (dinero) en operaciones de préstamo, llamada esta última interés.

Cuentas de inversión. También conocidas como cuentas de ahorro. En estas cuentas las personas pueden hacer depósitos y retiros del capital en cualquier momento (con tan sólo solicitarlo) y los intereses son bajos.

Compra. Acción de adquirir algo a cambio de dinero. También se refiere a un conjunto de bienes y servicios adquiridos en el acto de compra.

Compra a crédito. Compra cuyo importe no se paga en efectivo en el momento de la adquisición, sino que en la propia entidad vendedora o una tercera entidad concede crédito por la suma debida. En bolsa es la adquisición de acciones financiada a través de créditos por una autoridad bursátil.

Compra de contado. Compra cuyo importe se paga en el momento de la adquisición.

Compra a plazos. Contrato de compraventa en el cual el vendedor entrega el bien objeto de la transacción en el momento en que ésta se produce, y el comprador puede postergar sus pagos a futuras cuotas o plazos, pudiendo efectuar uno de estos pagos en el momento de la compra.

Comprador. Persona que adquiere un bien o derecho producto de una operación de compraventa.

Compraventa. Contrato por el que uno de los contratantes (vendedor) se obliga a entregar una cosa determinada y el otro (comprador) a pagar por ella un precio determinado. Asimismo, negocio de objetos que se revenden.

Contado. Procedimiento de cobro o pago que implica la entrega del bien o servicio con contrapartida monetaria en ese mismo momento.

Contrato. Negocio jurídico bilateral por el que dos o más personas físicas o jurídicas se obligan mutuamente a dar, hacer o no hacer algo, surgiendo entre ellas una relación obligatoria.

Crédito. Reputación, fama, prestigio que tiene una persona respecto al cumplimiento de sus obligaciones financieras.

Crédito a clientes. Cantidad que los clientes de una empresa le adeudan en función de los suministros que reciben.

Debe..Adeudar, estar en deuda con otra persona, estar obligado a cumplir una obligación o realizar un pago.

Demora. Retraso en el cumplimiento de una obligación de pago de una deuda, desde el momento en que ésta venció.

Depósito a plazo. Es el dinero depositado en una cuenta bancaria por la persona o razón social; su retiro es en una sola fecha determinada, de común acuerdo por ambas partes.

Descuento. Descuento concedido por las empresas a sus clientes por diversas causas: por pronto pago, por volumen de venta, etc.

Descuento en precios. Reducción en el precio de venta de un producto o servicio por motivos muy diversos: campañas de promoción, ferias, rebajas

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

estacionales, fidelidad del comprador, liquidación de existencias.

Descuento financiero. Operación financiera realizada por las entidades de crédito. Consistente en abonar al prestatario el importe, con rebaja de intereses, de una letra de cambio u otro mercantil antes de la fecha de su vencimiento.

Descuento por pronto pago. Descuento concedido por pagar las mercancías adquiridas al contado o en un plazo menor al establecido en la transacción comercial. Se trata de un porcentaje sobre las ventas que compensan el menor riesgo de insolvencia y la inmediata obtención de liquidez por parte de la empresa. Cuando se trata de descuento sobre compras por pronto pago, se refiere a una modalidad de descuento de proveedores en el que es la empresa la que reduce la cantidad a pagar a sus proveedores por realizar el pago dentro de unos días determinados por estos. Estos descuentos se registran en las cuentas de pérdidas y ganancias bajo el epígrafe de ingresos financieros.

Descuento por volumen de compra. Descuento concedido a la empresa cuando su volumen de compras con un determinado proveedor en un periodo, excede de una cierta cuantía, independientemente del tamaño de los pedidos que haya ido realizando con anterioridad. Estos descuentos se registran en la cuenta de pérdidas y ganancias como un menor importe de la compra que los origina.

Descuento por volumen de venta. Descuento que la empresa concede a sus clientes cuando su volumen de ventas con ellos en un periodo determinado supera una cierta cuantía.

Descuento sobre compras. Descuento concedido a las empresas por sus proveedores por diversas causas: volumen de compras, por pronto pago, etc.

Deuda. Obligación que se ha contraído con un tercero y que se ha de satisfacer. En general, es una obligación de pagar cierta cantidad de dinero.

Deudor. Es la persona o razón social que solicita un dinero prestado y se compromete a pagarlo posteriormente, extendiendo para ello un pagaré.

Dinero. Todo aquello aceptado como medio de pago o medición del valor. Las monedas y billetes de circulación son la forma final adoptadas por las economías como dinero. Es la suma de moneda circulante.

Dinero circulante. Dinero en efectivo, es decir, tesorería que la empresa en un momento determinado tiene como consecuencia de su funcionamiento. Una gestión eficiente de tesorería que maximice su rentabilidad evitando fondos ociosos incrementará el valor de la empresa.

Dinero de plástico. Tarjetas (de crédito, débito, de prepago, etc.) que se utilizan como medio de pago sustituyendo al dinero.

Dinero en circulación. Suma del efectivo en manos del público compuesto de billetes y moneda metálica de curso legal más los depósitos de todo tipo en el sistema bancario.

Empeñar. Entregar algo en prenda como garantía del pago de una deuda.

Empresa. Unidad económica de producción y decisión que, mediante la organización y coordinación de una serie de factores (capital y trabajo), persigue obtener un beneficio produciendo y comercializando productos o prestando servicios en el mercado.

Fábrica. Recinto en el que se instalan máquinas y otro tipo de equipos conjunta y ordenadamente para producción en masa de un determinado producto u objeto o para la transformación industrial de una fuente de energía.

Fabricar. Producir bienes o servicios mediante la transformación de materias primas o productos intermedios, valiéndose de una maquinaria y organización determinadas, de unos sistemas respectivos y haciéndolo en gran volumen.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Factura. Documento o recibo entregado por el vendedor al comprador como prueba de que éste ha adquirido una mercancía determinada o recibo de un servicio a un precio dado, y que representa, por tanto, el derecho de cobro a favor del vendedor. En la factura se especifican datos personales de ambos, las características de los productos, así como la fecha y el precio de compra.

Moneda en circulación. Son las monedas constantes y sonantes (aleaciones de metales). También a los billetes se les llama papel moneda.

Rédito. Renta de un capital.

Tanto por uno. Es el rendimiento que produce una moneda.

Tasa. También llamada tipo de interés o tanto por ciento, es el rendimiento que producen 100 unidades de moneda en una unidad de tiempo.

Tiempo. Es el número de periodos (tiempo predeterminado) que dura el préstamo de un capital.

En el país las tasas de interés que se utilizan en las operaciones comerciales y financieras no permanecen constantes por periodos grandes, por lo que es necesario fijar tasas de referencia. Las tasas de referencia más utilizadas son la Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE), el Costo Porcentual Promedio de Capitalización (CPP), el Costo de Capitalización a Plazo (CCP) y la tasa de los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES).

- **Tasa de interés activas**. Son las tasas que los bancos *cobran* por los diferentes tipos de crédito a los usuarios de éstos.

- **Tasa de interés pasivas**. Son las tasas de interés que los bancos *pagan* a los ahorradores e inversionistas.

- **Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE)**. Es el punto de equilibrio entre las tasas de interés pasivas y activas. Se obtienen a partir de la información que proporciona diariamente al Banco de México (BANXICO) de las diferentes instituciones bancarias del país (por lo menos seis), a las 12:00 horas de la ciudad de México. Las tasas son precios reales que los bancos están dispuestos a pedir prestado o prestar a BANXICO. Existen diferentes plazos de la TIIE, el más usual es de 28 días.

- **Costo Porcentual Promedio de Capitalización (CPP)**. Mide el costo al cual se fondean los bancos para cubrir sus pasivos. El Banco de México es el encargado de calcularlo y publicarlo el día 20 de cada mes en el *Diario Oficial de la Federación*.

- **Costo de Capitalización a Plazo (CCP)**. Es la estimación mensual del costo de capitalización a plazo por concepto de la tasa de interés de los pasivos a plazo en la moneda nacional a cargo de la banca múltiple y éste se utiliza para la tasa de interés de créditos en pesos. El Banco de México es el encargado de calcularlo y publicarlo los días 21 y 25 de cada mes en el *Diario Oficial de la Federación*.

- **Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES)**. Son instrumentos financieros de inversión cuya tasa de interés tiene un plazo de 28, 90 o 180 días y por lo regular, dicha tasa se utiliza como tasa de referencia.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.1
$7.50

3.2
$367 500

3.3
a) $530.83
b) $523.56

3.4
2.83% mensual

3.5
1.9% mensual

3.6
$3 220

3.7
$2 537 333.20

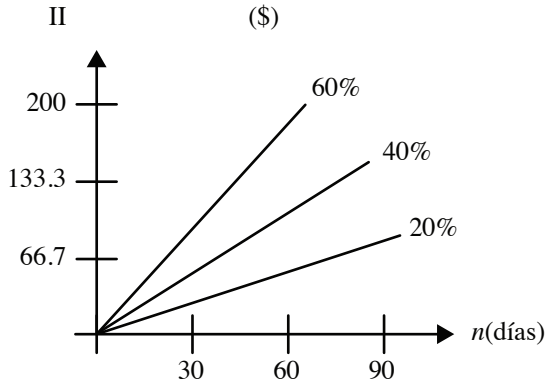
3.8
$9 195.40

3.9
$27 743

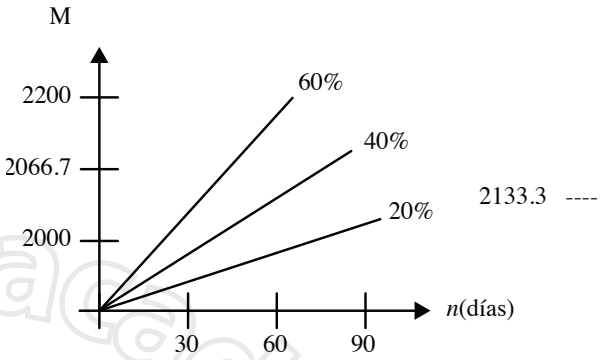
3.10
10 años

3.11
2 años, 9 meses y 10 días

3.12



3.13



3.14
$2 663 175

3.15
a) $ 284.93
b) $ 288.89
c) $ 280.55
d) $ 284.89

3.1
a) 335 días
b) 324 días

3.17
a) 176 días
c) 175 días

3.18
$425

3.19
$5 138

3.20
$14 356.21

3.21
$3 942

3.22
I = $1 440
M = $13 440

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.23
$22 720

3.24
$100 329.00

3.25
$1 200

3.26
$161.87

3.27
$1 208.05

3.28
$5 219.35

3.29
$13 200

3.30
$2 994.12

3.31
$153.57

3.32
$12 568

3.33
$697.66

3.34
a) $14 000
b) $11 000

3.35
$690

3.36
$543 630.47

3.37
$191 081.25

3.38
33.918% anual

3.39
76% anual

3.40
$21 686

3.41
$4 695.65

3.42
72.22% anual

3.43
25% anual

3.44
2 meses y 29 días

3.45
1 mes y 18 días

3.46
$1 912.50

3.47
El señor José Antonio Solís Díaz es el deudor y el señor Armando González Carrasco es el acreedor o beneficiario del pagaré. El valor nominal del documento es por $500 000. El 14 de febrero de 2007 es la fecha en que se expidió el documento y el 26 de diciembre de 2007 es la fecha de vencimiento. El plazo es de 315 días.

3.48
$631 250

3.49
Interés moratorio = $8 000,
Cantidad a pagar = $639 250

3.50
$33 312 y $33 438.34

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.51
1.7195% mensual

3.52
10.09% mensual

3.53
28.27%

3.54
$996.29

3.55
10%

3.56
45 días

3.57
$349.80

3.58
$1 830

3.59
$601.40

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Respuestas

¿Qué sabes?

En seguida aparecen las operaciones y las soluciones de los problemas enunciados al principio de la unidad.

3.1

¿Qué interés simple produce un capital de $15 600, a pagarse dentro de 13 semanas a una tasa de interés de 11.9% anual?

Datos
C = $ 15,600
T = 11.9% anual
n = 13 semanas
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/52)$$
$$I = 15600(0.119)(13/52)$$
$$I = 15600(0.119)(0.25)$$
$$I = 15600(0.02975)$$
$$I = \$464.10$$

3.2

Encontrar el interés exacto que se paga por un préstamo de $25 350 a 9.52% en 240 días.

Datos
C = $25 350
T = 9.52% anual
n = 240 días
Incógnita: Ie

$$Ie = C(T/100)(n/365)$$
$$Ie = 25350(0.0952)(240/365)$$
$$Ie = 25350(0.0952)(0.6575)$$
$$Ie = 25350(0.6575)$$
$$Ie = \$1586.84$$

3.3

El dueño de la tlapalería del pueblo recibe un préstamo de $18 650 a dos años. Si la tasa de interés es de 1.5% trimestral, ¿cuánto pagará dentro de dos años?

La tasa y el tiempo se expresan en forma trimestral.

Datos
C = $18 650
T = 1.5% trimestral
t = 0.015 trimestral
n = 2 años
n = 8 trimestres

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 18650[1+(0.015)(8)]$$
$$M = 18650[1+(0.12)]$$
$$M = 18650[1.12]$$
$$M = \$20888$$

3.4

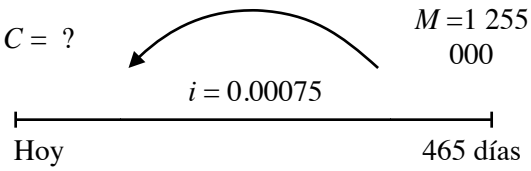
Un banco entrega al licenciado Aldama la cantidad $1 255 000 por un préstamo a un año, 3 meses y 15 días, con una tasa de 27%, ¿cuál es el capital inicial del préstamo?

Datos
M = $1 255 000
T = 27% anual
i = 0.00075 diario
n = 1 año, 3 meses y 15 días
n = 360 + 90 + 15
n = 465 días
Incógnita: C

$$C = 1255000[1+(0.00075)(465)]^{-1}$$
$$C = 1255000[1.34875]^{-1}$$
$$C = 1255000(0.741427)$$
$$C = \$930491.19$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.4 cont.



3.5

Una deuda de $7 545 se liquidó el 29 de junio de este año con un cheque cuyo importe es de $8 880. Si la tasa de interés simple es de 11.75%, ¿cuánto tiempo estuvo prestado?

Datos
$C = \$7\,545$
$M = \$8\,880$
$T = 11.75\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i}$$

$$n = \frac{\frac{8\,880}{7\,545} - 1}{0.1175} = \frac{1.176938 - 1}{0.1175} = 1.505858 \text{ años}$$

n = 1 año, 6 meses y 2 días

Cálculo de los meses y los días

$$\text{Años} = 1$$
$$\text{Meses} = 1.505858 - 1 = 0.505858$$
$$\text{Meses} = (0.505858)(12)$$
$$\text{Meses} = 6.0703$$
$$\text{Días} = 6.0703 - 6$$
$$\text{Días} = (0.0703)(30)$$
$$\text{Días} = 2.109$$
$$\text{Días} = 2$$

Como la tasa se da en forma anual, el periodo también es anual, entonces el resultado está expresado en años.

3.6

Se descuenta al profesor Gómez un préstamo de $150 000 a un plazo de 91 días, con una tasa de descuento de 13% anual.

a) ¿De cuánto es el descuento al momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad recibe?

Datos
$M = \$150\,000$
$n = 91$ días
$d = 13\%$ anual
$d =$ diario
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd$$
$$D = 150000(91)(0.0003611)$$
$$D = \$4929.16$$

La cantidad que recibe el profesor Gómez es de:

$$C = M - D$$
$$C = 150000 - 4929$$
$$C = \$145070.83$$

El profesor Gómez recibe $145 070.83, en lugar de los $150 000 solicitados, pero dentro de 91 días debe pagar $150 000, porque la institución financiera le aplicó el descuento comercial.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.7
Una compañía decide descontar un documento el 30 de abril con valor de $368 056, con una tasa de descuento de 13% anual. Si la fecha de vencimiento es el 30 de junio de este año. ¿Cuánto dinero recibirá la compañía?

Datos
$M = \$368\ 056$
$n = 61$ días
$d = 13\%$ anual
Incógnita: C

$$C = M(1 - nd)$$
$$C = 368056\left[1 - (61/360)(0.13)\right]$$
$$C = 368056\left[1 - (0.1694)(0.13)\right]$$
$$C = 368056(1 - 0.0220277)$$
$$C = 368056(0.97797)$$
$$C = \$359947.72$$

3.8
La señora Mendoza solicita un préstamo por una determinada cantidad de dinero. El plazo es de 7 meses y la tasa de descuento de 12%. Calcular la tasa mensual de rendimiento

Datos
$n = 7$ meses
$d = 12\%$ anual
d = 0.12 / 12 = 0.01 mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{d}{1 - dn}$$
$$R = \frac{0.01}{1 - (0.01)(7)}$$
$$R = \frac{0.01}{1 - 0.7}$$
$$R = \frac{0.01}{0.93}$$

3.8 cont.
$$R = 0.0107527 \text{ mensual}$$
$$R = 1.07527\% \text{ mensual}$$
$$R = 12.90\% \text{ anual}$$

3.9
El arquitecto Rodríguez recibe la cantidad de $80 500 por un préstamo a pagar en 8 meses, con una tasa de descuento de 15% anual. ¿Qué cantidad de dinero debió solicitar prestada?

Datos
$C = \$80\ 500$
$n = 8$ meses
$d = 15\%$ anual
d = 0.15 / 12 = 0.0125 mensual
Incógnita: M

$$M = \frac{C}{1 - nd}$$
$$M = \frac{80\ 500}{1 - (8)(0.0125)}$$
$$M = \frac{80\ 500}{1 - 0.1}$$
$$M = \frac{80\ 500}{0.9}$$
$$M = \$89444.44$$

3.10
El señor Martínez firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $12 245. ¿Cuál es la tasa de descuento?

Datos
$C = \$200\ 000$
$D = \$12\ 245$
Incógnita: d

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.10 cont.

$$d = \frac{D}{Mn}$$

$$d = \frac{12245}{(200000)(8)}$$

$$d = \frac{12245}{1600000}$$

$$d = 0.007653 \text{ mensual}$$

$$d = 9.18\% \text{ anual}$$

3.11

El señor Martínez firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial de 18%, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $12 245. ¿Cuál es la tasa de rendimiento?

Datos
n = 9 meses
d = 18% anual
d = 0.18 / 12 = 0.015 mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{d}{1 - dn}$$

$$R = \frac{0.015}{1 - (0.015)(9)}$$

$$R = \frac{0.01}{1 - 0.135}$$

$$R = \frac{0.01}{0.865}$$

$$R = 0.01734 \text{ mensual}$$

$$R = 20.81\% \text{ anual}$$

Problemas a resolver

Interés

CD3.1

La contadora Alma invierte $5 000 y al término de un año recibe $5 250 por su inversión. Calcular:
a) El interés
b) La tasa de interés
c) El tipo de interés

a) El interés se obtiene sustituyendo el valor del capital y el monto en la ecuación 3.1.

Datos
C = $5 000
M = $5 250
n = Un año
Incógnita: I

$$I = M - C$$

$$I = 5250 - 5000$$

$$I = \$\ 250$$

b) La tasa de interés
Incógnita: i.

$$i = \frac{I}{Cn}$$

$$i = \frac{250}{5\,000}$$

$$i = 0.05 \text{ anual}$$

c) El tipo de interés
Incógnita: T

$$T = (0.05)(100)$$

$$T = 5\% \text{ anual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.2
El señor Martínez solicitó un préstamo al ISSSTE de $18 500 al 9% anual durante un año. Calcular el interés simple a pagar.

Datos
C =$18 500
T = 9% anual
i = 0.09 anual
n = 1 año
Incógnita: I

$$I = Cni$$
$$I = 18500(1)(0.09)$$
$$I = \$1665$$

CD3.3
¿Cuál es la tasa de interés por un préstamo de $15 000 a un año, si se pagaron intereses de $1 900?

Datos
I = $1 900
C = $15 000
n = un año
Incógnita: i

$$i = I/C$$
$$i = 1900/15000$$
$$i = 0.1266 \text{ anual}$$
$$T = 12.66\% \text{ anual}$$

CD3.4
Se prestó un capital de $4 950 000 a un fabricante de juguetes durante tres años con un interés preferencial de $1 860 000.
¿Cuál fue la tasa de interés pactada?

Datos
C =$4 950 000
I =$1 860 000
n = 3 años
Incógnita: T

CD3.4 cont.
$$i = I/Cn$$
$$i = 1860000/[(4950000)(3)]$$
$$i = 0.1252 \text{ anual}$$
$$T = 12.52\% \text{ anual}$$

CD3.5
El señor Tomas Baroja le prestó a su cuñado la cantidad de $3 550 a una tasa de interés simple de 1.5% mensual, por 21 días.
¿Cuánto recibirá de intereses?

Datos
C = $3 550
T = 1.5% mensual
n = 21 días
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/30)$$
$$I = 3550(0.015)(21/30)$$
$$I = \$37.28$$

CD3.6
Usted compra un automóvil en $399 999 a pagarse en un año, a una tasa de interés simple de 12.4%. Calcular el interés correspondiente al primer mes de pago.

Datos
C = $399 999
T = 12.4% anual
n = 1 mes
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/12)$$
$$I = 399999(0.124)(1/12)$$
$$I = \$4133.32$$

Recursos académicos en línea · Grupo Editorial Patria

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Interés comercial y real

CD3.7
¿Qué interés produce un capital de $1 500 al 4% durante el mes de marzo?

a) Interés simple, comercial y tiempo exacto.
Año comercial de 360 días.
Tiempo exacto, el mes tiene 31 días.
$Io = 1500(0.04)(360/360) = \$5.16$

b) Interés simple, comercial y tiempo aproximado.
Año comercial de 360 días.
Tiempo aproximado, el mes tiene 30 días.
$Io = 1500(0.04)(30/360) = \$5.00$

c) Interés simple, real y tiempo exacto.
Año real de 365 días.
Tiempo exacto, el mes tiene 31 días.
$Ie = 1500(0.04)(31/365) = \$5.09$

d) Interés simple, real y tiempo aproximado.
Año real de 365 días.
Tiempo aproximado, el mes tiene 30 días.
$Ie = 1500(0.04)(30/365) = \$4.93$

CD3.8
¿Qué interés produce un capital de $8 500, al 4.6% de interés simple, del 18 de mayo de 2012 al 8 de abril de 2013?

a) Interés simple, comercial y tiempo exacto.
$Io = 8500(0.046)(325/360) = \$352.99$

b) Interés simple, comercial y tiempo aproximado.
$Io = 8500(0.046)(320/360) = \$347.55$

c) Interés simple, real y tiempo exacto.
$Ie = 8500(0.0.46)(325/365) = \$348.15$

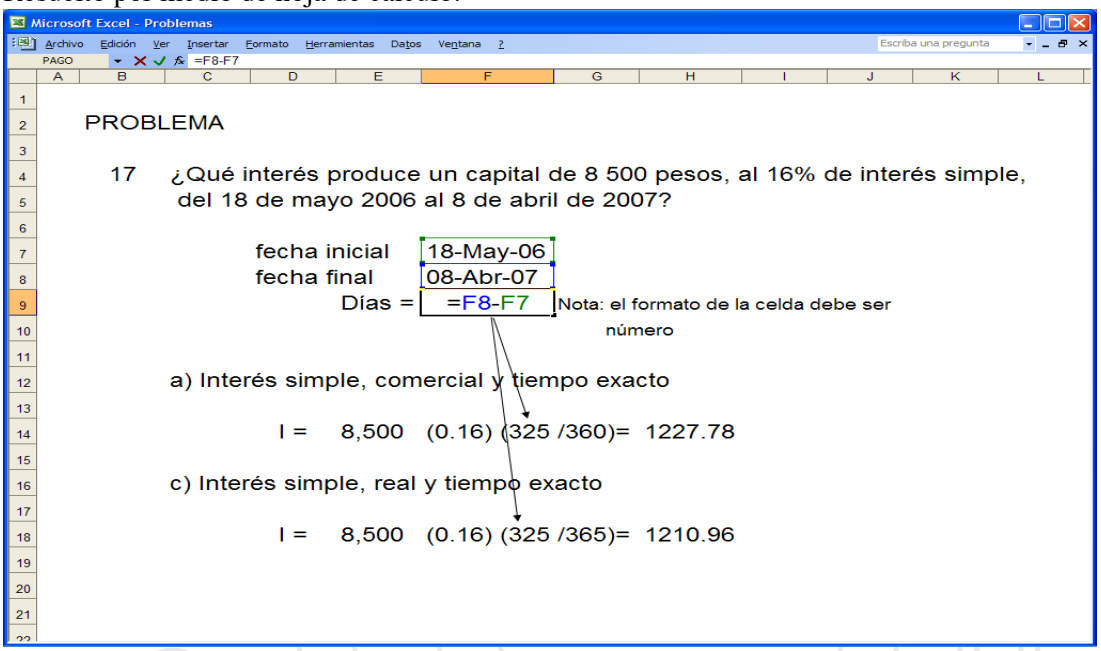
d) Interés simple, real y tiempo aproximado.
$Ie = 8500(0.4.6)(320/365) = \$342.79$

cursos · en · línea · Grupo Editorial Patria

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.9
¿Qué interés produce un capital de 8 500 pesos, al 16% de interés simple, del 18 de mayo de 2006 al 8 de abril de 2007?

Resuelto por medio de hoja de cálculo:



CD3.10
Calcular el interés exacto si el interés ordinario es de $189.25.

$$Ie = 0.9863\ Io$$
$$Ie = 0.9863(189.25)$$
$$Ie = \$186.65$$

CD3.11
Calcular el interés ordinario si el interés exacto es de $385.15.

$$Io = 1.0139\ Ie$$
$$Io = 1.0139(385.15)$$
$$Io = \$390.5$$

CD3.12
Calcular el interés ordinario con tiempo exacto de $18 500 al 25% anual prestado durante 60 días.

$$Io = Cn(i/365)$$
$$Io = 18500(0.25)(60/365)$$
$$Io = \$760.27$$

CD3.13
Calcular el interés ordinario con tiempo aproximado de $24 750 al 27% anual prestado durante 180 días.

$$Io = Cn(i/360)$$
$$Io = 24750(180)(0.27/360)$$
$$Io = \$3341.25$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.14
Calcular el interés exacto de $385.15 con una tasa de interés de 24.32% durante 154 días.

Datos:
C = $385.15
T = 24.32%
n = 154 días
Incógnita: Ie

$$Ie = Cn(i/365)$$
$$Ie = 385.15(0.2432)(154/365)$$
$$Ie = \$39.52$$

CD3.15
Jesús Martínez depositó en su cuenta de ahorros $3 000 el día 5 de marzo y el día 27 de marzo lo retira. La tasa de interés simple es de 5.7% anual. Calcular el interés comercial y exacto, considerando que el año es bisiesto.

Datos
C = $3 000
T = 5.7% anual
Incógnitas:
n
Io
Ie
Los días transcurridos $n = 27 - 5 = 22$ días

a) Interés comercial
$$Io = 3\,000\left[\frac{0.057}{360}\right](22)$$
$$Io = \$10.45$$

b) Interés exacto
$$Io = 3\,000\left[\frac{0.057}{366}\right](22)$$
$$Io = \$10.27$$

CD3.16
Katia Rodríguez depositó en su cuenta de ahorro $5 000 el 5 de junio y el 27 de junio lo retiró. La tasa de interés simple es de 4.05% anual. Calcular el interés comercial y exacto, considerando el año bisiesto.

a) Datos
C = $5 000
T = 4.05%
$n = 27 - 5 = 22$ días
Incógnita: Io

$$Io = Cni/360$$
$$Io = 5000(22)(0.405/360)$$
$$Io = \$12.38$$

b) Datos
C = $35 042
T = 32.42%
n = 154 días
Incógnita: Ie

$$Ie = Cni/365$$
$$Ie = 5000(22)(0.405/365)$$
$$Ie = \$12.21$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.17
Calcular el interés que se debe pagar por un préstamo de $8 000 al 25.2% durante 340 días.

Como no se indica el tipo de interés a calcular, se debe entender que el tipo de interés es el comercial u ordinario, a menos que se indique lo contrario.

Datos
$C = \$8\,000$
$T = 25.2\%$
$n = 340$ días
Incógnita: Io

$$Io = Cni/360$$
$$Io = 8000(0.252)(340/360)$$
$$Io = \$1904$$

Cálculo del monto

CD3.18
Calcular el monto de un préstamo de $3 150 al 16% de interés simple, durante 1.5 años.

Datos:
$C = \$3\,150$
$T = 16\%$ anual
$n = 1.5$ años
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 3150[1+(0.16)(1.5)]$$
$$M = 3150(1.24)$$
$$M = \$3906$$

CD3.19
El arquitecto Ignacio Aguilera Hernández consigue un préstamo de $9 000 a 15 bimestres, para comprar una computadora. La tasa de interés simple es del 2% bimestral. ¿Cuánto pagará dentro de 15 bimestres?

Datos:
$C = \$9\,000$
$T = 2\%$ bimestral
$n = 15$ bimestres
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 9000[1+(0.02)(15)]$$
$$M = 9000[1+(0.30)]$$
$$M = \$11700$$

CD3.20
El alumno Eduardo Arteaga Mora depositó en su cuenta de ahorros $3 000 el 5 de enero y el 31 de enero lo retiró para comprarse un teléfono celular. La tasa de interés simple es de 4.7% anual. Calcular el monto, considerando que el año es bisiesto.

Datos:
$C = \$3\,000$
$T = 4.7\%$ anual
Los días transcurridos $n = 31 - 5 = 26$ días
Incógnitas: n y M

$$M = 3000\left[1+\left(\frac{0.047}{366}\right)(26)\right] = \$3010$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.21
Calcular el monto de un préstamo personal al banco del ejército de $5 500 a una tasa de interés simple de 24% anual del 3 de septiembre al 28 de diciembre del mismo año, considerando que el año es bisiesto.

Datos
C = $5 500
T = 24% anual
Incógnitas:
n
M

Los días transcurridos

Tabla 1

Mes	Días
Septiembre	30 – 3 = 27
Octubre	31
Noviembre	30
Diciembre	28
Total	116

$$M = 5500\left[1+\left(\frac{0.24}{366}\right)(116)\right] = \$5918.36$$

CD3.22
Calcular el monto de un préstamo de $18 000 al 26% de interés simple, durante dos años.

Datos
C = $18 000
T = 26% anual
n = 2 años

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 18000\left[1+(0.26)(2)\right]$$
$$M = \$27360$$

CD3.23
¿Qué monto hay que pagar al ISSSTE por un crédito de corto plazo de $49 000 al 9% anual, después de 1 año y 6 meses?

Datos
C = $49 000
n = 18 meses
T = 9% anual
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 49000\left[1+\left(\frac{0.09}{12}\right)(18)\right]$$
$$M = \$55615$$

CD3.24
Magaly recibe un préstamo de Alexa para adquirir calzado con valor de $32 500. Acuerda pagar la deuda 4 meses después con una tasa de interés de 24% anual. ¿Cuánto deberá pagar Magaly después de 4 meses?

Datos
C =$ 32 500
T = 24% anual
n = 4 meses
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 32500\left[1+(0.24)\left(\frac{4}{12}\right)\right]$$
$$M = 32500\left[1.08\right]$$
$$M = \$35100$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.25
El comunicador Jesús Miguel deposita $55 000 en un fondo de inversión, que da un rendimiento de 0.9% mensual. Para comprar más equipo para su negocio, decide retirar el depósito 28 días después.
¿Cuánto le entregarán al retirar capital e intereses?

Datos
$C = \$55\,000$
$T = 0.9\%$ mensual
$n = 28$ días
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 55000\left[1+(0.009)(28/30)\right]$$
$$M = 55000\left[1+(0.0014)\right]$$
$$M = \$55462$$

CD3.26
El ingeniero Tomas Aguirre consigue un préstamo de $26 000 a 2 años, para comprar una computadora. La tasa de interés simple es de 3% bimestral ¿Cuánto deberá pagar dentro de 2 años?

Datos
$C = \$26\,000$
$T = 3\%$ bimestral
$n = 2$ años
$n = 12$ bimestres

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 26000\left[1+(0.03)(12)\right]$$
$$M = 26000\left[1.36\right]$$
$$M = \$35360$$

CD3.27
Calcular el monto acumulado al 24 de marzo del 2014, de un depósito de $22 600 realizado el 14 de octubre de 2013 en una cuenta que abona una TIIE de 25.5% anual más 5.8 puntos porcentuales. Para solucionar el problema utilice el interés simple ordinario con tiempo aproximado.

Datos
$C = \$22\,600$
TIIE = 25.5% anual
5.8 puntos porcentuales
$T = 31.3\%$ anual
$n = 160$ días

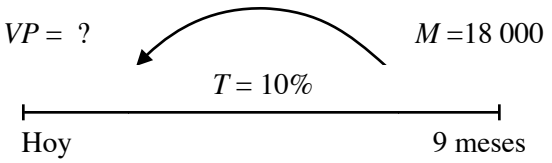
$$M = 22600\left[1+160\left(\frac{0.313}{360}\right)\right] = \$25743.91$$

Valor presente o actual

CD3.28
Encontrar el valor presente de $18 000, pagaderos a 9 meses, con tasa de interés simple de 10%.

Datos
$M = \$18\,000$
$T = 10\%$ anual
$n = 9$ meses
Incógnita: VP

$$VP = 18000\left[1+(0.1)(9/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 18000\left[0.93023\right]$$
$$VP = \$16744.18$$

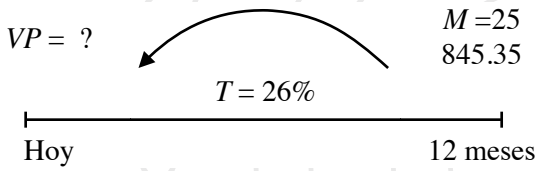


D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.29
¿Cuál será el valor presente de $25 845.35, pagaderos a 12 meses, con tasa de interés simple del 26%?

Datos
M = $25 845.35
T = 26% anual
n = 12 meses
Incógnita: VP

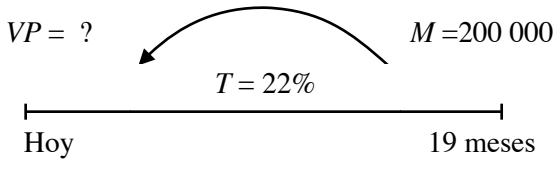
$$VP = 25845.35\left[1+(0.26)(12/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 25845.35\left[0.79365\right]$$
$$VP = \$20512.18$$



CD3.30
Calcular el valor presente de $200 000, pagaderos a 19 meses, con tasa de interés simple del 22%.

Datos
M = $200 000
T = 22% anual
n = 19 meses

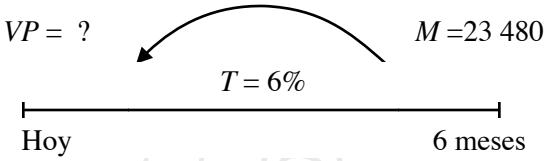
$$VP = 200000\left[1+(0.22)(19/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 200000.00\left[0.741656\right]$$
$$VP = \$148331.27$$



CD3.31
Encontrar el valor presente de $23 480 de un pagaré que vence dentro de 6 meses y si la tasa de interés simple es del 6%.

Datos
M = $23 480
T = 6% anual
n = 6 meses
Incógnita: VP

$$VP = 23480\left[1+(0.06)(6/12)\right]^{-1}$$
$$VP = 23480\left[1.03\right]^{-1}$$
$$VP = 23480\left[0.9709\right]$$
$$VP = \$22796.12$$



Los $22 796.12 son el valor presente de $23 480, lo que significa que si el día de hoy invertimos $22 796.12, durante 6 meses a una tasa del 6%, obtendríamos $23 480.

CD3.32
¿Cuánto debe invertir una psicóloga el día de hoy, si la tasa de interés es de 1.75% trimestral, para disponer de $450 000 dentro de tres años?

Datos
M = $450 000
T = 1.75% trimestral
n = 12 trimestres

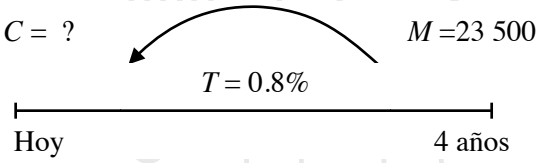
$$C = 450000\left[1+(12)(0.0175)\right]^{-1}$$
$$C = 18000\left[0.82645\right]$$
$$C = \$371900.83$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.33
¿Cuánto debe invertir la señora Andrea Portos el día de hoy, a una tasa de 0.8% simple trimestral para disponer de $23 500 dentro de 4 años?

Datos
$M = \$23\,500$
$T = 0.8\%$ trimestral
$n = 4$ años
$n = 16$ trimestres

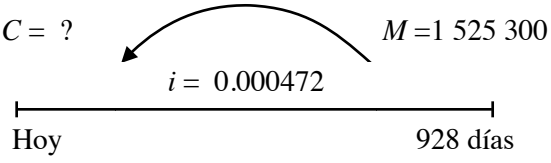
$$C = 23500\left[1+(16)(0.008)\right]^{-1}$$
$$C = 23500\left[1.128\right]^{-1}$$
$$C = 23500(0.887)$$
$$C = \$20883.30$$



CD3.34
Don Jacinto pagó $1 525 300, por un préstamo bancario con un plazo a 2 años, 6 meses y 28 días, a una tasa de 17% por la compra de un camión de carga. Encontrar el capital inicial del préstamo.

Datos
$M = \$1\,525\,300$
$T = 17\%$ anual
$i = 0.000472$ diario
$n = 720 + 180 + 28$

$$C = 1525300\left[1+(0.000472)(928)\right]^{-1}$$
$$C = 1525300\left[1.438\right]^{-1}$$
$$C = 1525300(0.6954)$$
$$C = \$1060697.52$$

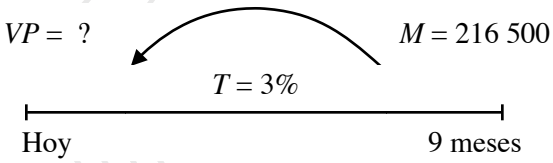


CD3.35
Una persona compró un automóvil compacto por el cual pagó $212 480 el primero de diciembre y lo vendió el 31 de agosto del año siguiente en $216 500 ¿Es conveniente la compra realizada si la tasa de interés que ofrece el banco es de 0.9% mensual?

Para evaluarla la conveniencia se debe calcular el valor presente de la cantidad que pagó por el automóvil.

Datos
Pago el primero de diciembre = $212 480
$M = \$216\,500$
$T = 0.9\%$ mensual
$n = 9$ meses
Incógnita: VP

$$VP = 216500\left[1+(0.009)(9)\right]^{-1}$$
$$VP = 216500\left[1.081\right]^{-1}$$
$$VP = 216500(0.92506)$$
$$VP = \$200277.52$$



Si la tasa de inversión fuera igual a la tasa de interés en el mercado por la compra de automóviles, la persona dejaría de ganar:
216 500.00 – 200 277.52 = $16 222.48
por haber invertido en el automóvil. Una mejor alternativa hubiera sido una inversión bancaria.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tiempo o plazo

CD3.36
El primero de septiembre se depositan $9 500 en una cuenta bancaria. ¿En cuánto tiempo se acumularían $11 000 a una tasa de interés del 6%?

Datos
$C = \$9\,500$
$M = \$11\,000$
$T = 6\%$ Anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i} = \frac{\frac{11000}{9500} - 1}{0.06} = \frac{1.15789 - 1}{0.06} = 2.6315 \text{ años}$$

Cálculo de los meses y los días

$$\text{Años} = 2$$
$$\text{Meses} = 2.6315 - 2 = 0.6315$$
$$\text{Meses} = (0.6315)(12)$$
$$\text{Meses} = 7.578$$
$$\text{Días} = 7.578 - 7$$
$$\text{Días} = (0.578)(30)$$
$$\text{Días} = 17.34$$

$n = 2$ años, 7 meses y 17 días

CD3.37
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $34 500, si el capital invertido es de $28 800 a una tasa de 5.1% anual?

Datos
$C = \$28\,800$
$M = \$34\,500$
$T = 5.1\%$ anual

$$n = \frac{\frac{34\,500}{28\,800} - 1}{0.051} = \frac{1.179772 - 1}{0.051} = 3.88$$

$n = 3$ años, 10 meses y 17 días

CD3.38
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $5 740, si el capital invertido es de $4 287 a una tasa de 4.5% anual?

Datos
$C = \$4\,287$
$M = \$5\,740$
$T = 4.5\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{5\,740}{4\,287} - 1}{0.045} = \frac{1.33893 - 1}{0.045} = 7.5318$$

$n = 7$ años, 6 meses y 11 días

CD3.39
Una deuda de $48 000 se liquidó el 11 de octubre con un cheque cuyo importe es de $50 800, y la tasa de interés aplicada de 23.73% ¿Cuánto tiempo estuvo prestado el dinero?

Datos
$C = \$48\,000$
$M = \$50\,800$
$T = 23.73\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{50\,800}{48\,000} - 1}{0.2373} = \frac{1.05833 - 1}{0.2373} = 0.2458$$

$n = 2$ meses y 28 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.40

¿Cuánto tiempo debe de transcurrir para que un capital se duplique si la tasa de interés es de 8.5% anual? Como el capital inicial es C; entonces el monto al final del plazo es el doble de C ($M = 2C$).

$$M = C(1+ni)$$
$$2C = C(1+ni)$$
$$\frac{2C}{C} = 1+ni$$
$$2 = 1+ni$$
$$2-1 = ni$$
$$\frac{1}{i} = n$$
$$n = \frac{1}{0.085} = 11.7647 \text{ años}$$

n = 11 años, 9 meses y 5 días

CD3.41

¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que un capital de $1 500 alcance un monto de $3 000 si la tasa de interés es de 25% anual?

Ahora, si M = pesos, entonces, M es el doble de C = $1 500, por tanto:

$$3\,000 = 1\,500\left[1+n(0.25)\right]$$
$$\frac{3\,000}{1\,500} = 1+n(0.25)$$
$$2 = 1+n(0.25)$$
$$n = \frac{1}{0.25} = 4 \text{ años}$$

CD3.42

Encontrar el tiempo exacto y aproximado, del día 4 de mayo al 20 septiembre del mismo año.

Para encontrar el tiempo exacto nos auxiliamos de la columna cuatro de la siguiente tabla 2 (para encontrar el día del año ver el apéndice A).

Tabla 2

Fecha	Mes	Día del año
4 de mayo	5	124
20 de septiembre	9	263
Diferencia	4	**139**

Tiempo exacto = 263 – 124 = 139 días
Otra forma de calcularlo se muestra en la tabla 3.

Tabla 3

Mes	Días del mes	Días
Mayo	31	31– 4 = 27
Junio	30	30
Julio	31	31
Agosto	31	31
Septiembre	30	20
Total		**139**

El tiempo aproximado se calcula considerando los meses de 30 días y en el caso de México no se cuenta el primer día pero si el último del plazo. Para encontrar el tiempo exacto nos auxiliamos de la columna cuatro de la siguiente tabla 4 (para encontrar el día del año ver el apéndice C).

Tabla 4

Fecha	Mes	Día	Día del año
4de mayo	5	40	124
20 de septiembre	9	28	260
Diferencia	4	12	136

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Descuento simple

CD3.43
¿Cuál es el descuento que se hace a un préstamo de $3 500, a un plazo de 6 meses, con una tasa de descuento simple de 20% anual?

Datos
M = $3 500
n = 6 meses
d = 20 % anual
d = 0.20/12 = 0.0166
Incógnita: D

$$D = Mnd = 3500(6)(0.20/12) = \$350$$

CD3.44
¿Cuál es el descuento que hace Banorte a un préstamo de $19 500, a un plazo de 13 meses, con una tasa de descuento simple de 1.8% mensual?

Datos
M = $19 500
n = 13 meses
d = 1.8% mensual
d = 0.018 mensual
Incógnita: D

$$D = Mnd = 19500(13)(0.018) = \$4563$$

CD3.45
¿Cuál es el descuento que se hace a un préstamo de $8 300, a un plazo de 8 meses, con una tasa de descuento simple de 24% anual?

Datos
M = $3 500
n = 8 meses
d = 24 % anual
d = 0.24/12 = 0.02
Incógnita: D

$$D = Mnd = 8300(8)(0.24/12) = \$1328$$

CD3.46
¿Cuál es el descuento que hace Banorte a un préstamo de $7 500, a un plazo de 16 meses, con una tasa de descuento simple de 1.5% mensual?

Datos
M = $7 500
n = 16 meses
d = 1.5 % mensual
d = 0.015 mensual
Incógnita: D

$$D = Mnd = 7500(16)(0.015) = \$1800$$

CD3.47
Un banco cobra el 26% de interés por adelantado al señor Cabrera por un préstamo a corto plazo, de $10 000 del 2 de mayo al 30 de octubre del presente año. Calcular el descuento que aplica el banco al señor Cabrera.

Datos
M = $10 000
n = 181 días
T = 26% anual (es el 26% de descuento bancario)
Incógnita: D

$$D = Mnd = 10000(181)(0.26/360) = \$1307.22$$

CD3.48
Calcular el valor presente de $2 000 a 24% de interés simple a un plazo de 9 meses. ¿Cuál es el descuento que realizó Invemex Banco por el préstamo?

Datos
M = $2 000
n = 9 meses
T = 24% anual
i = 0.02 mensual
Incógnitas: VP y D

$$D = M - VP = 2000 - 1694.91 = \$305.09$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Valor descontado o ganancia

CD3.49
El profesor Arriaga solicita un préstamo a Bansur de $12 000 a un plazo de 13 meses, con una tasa de descuento de 2.2% mensual.
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad en realidad recibe el profesor Arriaga?

Datos
$M = \$12\,000$
$n = 13$ meses
$d = 2.2\%$ mensual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 12000(13)(0.022) = \$3432$$

La cantidad que recibe el profesor Arriaga es de:
$$C = M - D = 12000 - 3432 = \$8568$$

CD3.50
La Compañía Electrohogar S.A. solicita $3 500 000 de préstamo al banco de Sonora, a 2 años con una tasa de descuento de 12% anual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad la Compañía Electrohogar S.A., por el préstamo?

Datos
$M = \$3\,500\,000$
$d = 12\%$ anual
$n = 2$ años
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 3500000(2)(0.12) = \$840000$$

La cantidad recibida por la Compañía Electrohogar S.A., es de:
$$C = M - D = 3500000 - 840000 = \$2660000$$

La compañía recibe $2 660 000 en lugar de los $3 500 000 solicitados, y en 2 años tendrá que pagar $3 500 000, ya que el Banco de Sonora le aplicó un descuento comercial.

CD3.51
El administrador de la compañía papelera Gabo S.A. solicita un préstamo al banco INVURSA de $13 500 000 a un plazo de 18 meses, con una tasa de descuento de 1.2% mensual.
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad en realidad recibe el administrador?

Datos
$M = \$13\,500\,000$
$n = 18$ meses
$d = 1.2\%$ mensual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 13500000(18)(0.012) = \$2916000$$

La cantidad que recibe el administrador es de:
$$C = M - D = 13500000 - 2916000 = \$10584000$$

CD3.52
El banco Invursa cobra 7% de descuento bancario en préstamos a largo plazo. Juan Luis Trejo necesita $40 000, para pagarlos con intereses en 6 años. ¿Qué cantidad debe solicitar en préstamo y cuánto paga de interés?

Datos
$T = 7\%$ anual
$M = \$40\,000$
$n = 6$ años
Incógnitas: C e I

$$C = M(1 - nd)^{-1} = 40000[1 - (0.07)(6)]^{-1} = \$68965.52$$
$$I = M - C = 68965.52 - 40000 = \$28965.52$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tasa de rendimiento

CD3.53
Bansur aplica un descuento de $640 120 a la contadora Pamela Alfaro por un préstamo a 6 meses con una tasa de descuento de 19% anual, por la compra de remodelación de su despacho. ¿Cuál es la tasa de rendimiento?

a) Calculamos el monto
Datos
$d = 19\%$ anual
$D = \$640\ 120$
$n = 6$ meses

$$M = \frac{D}{dn} = \frac{640120}{0.19(6/12)} = \frac{640120}{0.095} = \$6\,738105.26$$

b) Calculamos el valor descontado:

$$C = M - D$$
$$C = 6\,738105.26 - 640120$$
$$C = \$6097985.26$$

c) Se calcula el valor de la tasa de rendimiento

$$R = \frac{M - C}{Cn}$$
$$R = \frac{6\,738105.26 - 6097\,985.26}{6097\,985.26(6)}$$
$$R = \frac{640119.99}{3840\,719.98}$$
$$R = 0.0175$$
$$R = 1.75\% \text{ mensual}$$
$$R = 20.99\% \text{ anual}$$

CD3.54
¿Cuál es la tasa de rendimiento, si el valor descontado a los 11 meses es de $22 948, y el monto de $24 000?

Datos
$M = \$24\ 000$
$C = \$22\ 948$
$n = 11$ meses
Incógnita: R

$$R = \frac{M - C}{Cn}$$
$$R = \frac{24000 - 22948}{22948(11)}$$
$$R = \frac{1052}{252428}$$
$$R = 0.0041675$$
$$R = 0.417\% \text{ mensual}$$
$$R = 5.0\% \text{ anual}$$

CD3.55
El abogado Amando Suárez Copel solicita un préstamo por una determinada cantidad de dinero. El plazo es de 9 meses y la tasa de descuento de 19%. Calcular la tasa mensual de rendimiento

Datos
$d = 19\%$
$n = 9$ meses
Incógnita: R

$$R = \frac{1}{1 - nd}$$
$$R = \frac{0.19/12}{(0.19/12)(9)}$$
$$R = \frac{0.0158333}{0.8575}$$
$$R = 0.0184645$$
$$R = 1.84645\% \text{ mensual}$$
$$R = 22.157\% \text{ anual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.56
El Banco IXE-MEX cobra el 12% de descuento bancario en préstamos a corto plazo. ¿Qué interés simple le cobra el Banco IXE-MEX, a la señora Ana Lucía Vega por un préstamo de $14 000 a un plazo de 6 meses?

Datos
d =12%
n = 6 meses
Incógnita: R

$$R = \frac{1}{1 - nd}$$
$$R = \frac{0.12/12}{(0.12/12)(6)}$$
$$R = \frac{0.01}{0.94}$$
$$R = 0.01064$$

Solución alternativa:
$$M = \frac{C}{1 - dn}$$
$$M = \frac{14000}{1 - (0.12)(6/12)}$$
$$M = \frac{14000}{0.94}$$
$$M = \$14893.61$$
$$I = M - C$$
$$I = 14893.61 - 14000$$
$$I = \$893.61$$
$$R = \frac{I}{Cn}$$
$$R = \frac{893.61}{14000(6)}$$
$$R = 0.010638 \cong 0.01064$$

Valor de vencimiento

CD3.57
El doctor Jerry Alfaro descontó en el banco un pagaré por el cual recibió la cantidad de $19 167, a una tasa de descuento de 20% anual. El vencimiento del pagaré fue 6 meses después de su descuento. ¿Cuál sería el valor del documento en la fecha de su vencimiento?

a) Calculamos el descuento
C = $19 167
n = 6 meses
d = 20% anual
d = 0.20/12= 0.0166

$$D = \frac{Cnd}{1 - dn}$$
$$D = \frac{(19\,167)(6)(0.01666)}{1 - (6)(0.0166)}$$
$$D = \frac{1916.7}{0.9}$$
$$D = \$21472.53$$

b) Calcular el valor del monto
$M = C + D = 19167 + 2129.66 = \$21296.66$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.58
Encontrar el valor de un pagaré si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $19 540, a una tasa de descuento de 18% anual.

Datos
$C = \$19\,540$
$n = 6$ meses
$d = 18\%$ anual
$d = 0.015$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{19\,540}{1-(6)(0.015)}$$
$$M = \frac{19\,540}{0.91}$$
$$M = \$214\,72.53$$

CD3.59
Calcular el valor de un pagaré, si 8 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $8 450, a una tasa de descuento de 20% anual.

Datos
$C = \$8\,450$
$n = 8$ meses
$d = 20\%$ anual
$d = 0.016666$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{8\,450}{1-(8)(0.016666)}$$
$$M = \frac{8\,450}{0.866}$$
$$M = \$9\,750$$

CD3.60
La señora Lucia Vega solicita un préstamo a un banco y éste le entrega la cantidad de $10 000, para pagar en 13 meses, a una tasa de descuento de 22% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

Datos
$C = \$10\,000$
$n = 13$ meses
$d = 22\%$ anual
$d = 0.01833$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{10\,000}{1-(13)(0.01833)}$$
$$M = \frac{10\,000}{0.76166}$$
$$M = \$13129.10$$

CD3.61
El señor Duran solicita un préstamo al banco BANCA y éste le entrega la cantidad de $20 000, para pagar en 12 meses, a una tasa de descuento de 23% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

Datos
$C = \$20\,000$
$n = 12$ meses
$d = 23\%$ anual
$d = 0.019166$ mensual

$$M = \frac{C}{1-nd}$$
$$M = \frac{20\,000}{1-(12)(0.019166)}$$
$$M = \frac{20\,000}{0.77}$$
$$M = \$25\,974.03$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.62
El profesor de matemáticas descontó en el banco un pagaré por el cual recibió la cantidad de $16 766, a una tasa de descuento de 23% anual. El vencimiento del pagaré es 6 meses después de su descuento. ¿Cuál sería el valor del documento en la fecha de su vencimiento?

Primero calculamos el descuento

$C = \$16\,766$
$d = 23\%$ anual
$d = 0.23/12 = 0.019166$
$n = 6$ meses
Incógnita: D

$$D = \frac{Cnd}{1 - dn}$$
$$D = \frac{(16\,766)(6)(0.019166)}{1 - (6)(0.019166)}$$
$$D = \$2\,178.63$$

Ahora se calcula el valor del monto
$$M = C + D$$
$$M = 16766.00 + 2177.77$$
$$M = \$18\ 944.63$$

CD3.63
Encontrar el valor de un pagaré, si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $9 540, a una tasa de descuento de 20% anual.

Datos
$C = \$9\,540$
$n = 6$ meses
$d = 20\%$ anual
$d = 0.016667$ mensual
Incógnita: M

$$C = M(1 - nd)$$

CD3.63 cont.
Despejando M de la ecuación anterior se obtiene:

$$M = \frac{C}{1 - nd}$$
$$M = \frac{9\,540}{1 - (6)(0.016667)} = \$10\,600$$

CD3.64
La publicista Antonia Villagrán solicita un préstamo a un banco y éste le entrega la cantidad de $8 000, para pagar en 12 meses, a una tasa de descuento de 23% anual. ¿Qué cantidad debió solicitar como préstamo?

Datos
$C = \$8\,000$
$n = 12$ meses
$d = 23\%$ anual
$d = 0.23/12 = 0.019166$

$$M = \frac{C}{1 - nd} = \frac{8000}{1 - (12)(0.019166)} = \$10389.61$$

Tasa de descuento

CD3.65
El dueño de la tintorería De Héctor vendió a un banco un pagaré 3 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $18 355 y recibió del banco la cantidad de $16 835. Encontrar la tasa de descuento.

Datos
$C = \$16\,835$
$M = \$18\,355$
$n = 3$ meses

$$D = M - C = 18355 - 16835 = \$1\,520$$
$$d = \frac{D}{Mn} = \frac{1\,520}{(18\,355)(3)} = \frac{1\,520}{55\,065} = 0.0276$$
$$d = 2.76\% \text{ mensual}$$
$$d = 33.12\% \text{ anual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.66
El dueño de la panificadora Trigo vendió a un banco un pagaré 6 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $19 355 y recibió del banco la cantidad de $17 855. Encontrar la tasa de descuento.

Datos
$C = \$17\,855$
$M = \$19\,355$
$n = 6$ meses

$$D = M - C = 19355 - 17855 = \$1500$$

$$d = \frac{D}{Mn} = \frac{1\,500}{(19355)(6)} = \frac{1500}{116\,130} = 0.0129$$

$$d = 1.29\% \text{ mensual}$$

$$d = 15.5\% \text{ anual}$$

CD3.67
El señor Chavarría firmó un pagaré el primero de diciembre del año pasado por la cantidad de $200 000, con vencimiento en agosto de este año. Como el descuento es comercial, el banco le descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $21 240.50. ¿Cuál es la tasa de descuento?

Datos
$M = \$200\,000$
$D = \$21\,240.50$
$n = 8$ meses
Incógnita: d

$$d = \frac{D}{Mn} = \frac{21240.50}{(200000)(8)} = 0.0118$$

$$d = 1.18\% \text{ mensual}$$

$$d = 14.16\ \% \text{ anual}$$

CD3.68
Encontrar la tasa de rendimiento de un préstamo solicitado por el administrador. Adrián Salvatorio, a pagar en 6 meses, con una tasa de descuento de 18% anual.

Datos
$d = 18\%$ anual
$d = 0.18/12 = 0.015$ mensual
$n = 6$ meses

$$R = \frac{d}{1 - dn} = \frac{(0.015)}{1 - (0.015)(6)} = 0.01648$$

$$R = 1.648\% \text{ mensual}$$

$$R = 19.78\% \text{ anual}$$

CD3.69
Un banco descuenta un pagaré de $55 000, con vencimiento en 7 meses y una tasa de descuento de 22%. ¿Qué tasa de rendimiento obtiene en realidad el banco?

Datos
$d = 22\%$ anual
$n = 7$ meses

$$R = \frac{d}{1 - dn} = \frac{(0.22/12)}{1 - (0.22/12)(7)} = 0.02103$$

$$R = 2.103\% \text{ mensual}$$

$$R = 25.23\% \text{ anual}$$

CD3.70
Un banco del Bajío descuenta un pagaré de $150 000, con vencimiento en 9 meses y una tasa de descuento de 24%. ¿Qué tasa de rendimiento obtiene en realidad el banco?

Datos
$d = 24\%$ anual
$n = 9$ meses

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.70 cont.

$$R = \frac{d}{1 - dn} = \frac{(0.24/12)}{1 - (0.24/12)(9)} = 0.02439$$

$R = 2.439\%$ mensual

$R = 29.27\ \%$ anual

Plazo

CD3.71

La compañía Londres S. A. descuenta un pagaré por el cual recibe $28 879, a una tasa de descuento del 30% anual. ¿Cuánto tiempo falta para el vencimiento del pagaré, si éste tiene valor nominal de $70 000?

Datos
$M = \$70\ 000$
$C = \$28\ 879$
$d = 30\%$ anual

$$D = M - C = 70000 - 28879 = \$41\,121$$

$$n = \frac{D}{Md} = \frac{41121.00}{70000(0.30)} = 1.95814$$

Plazo = 1 año, 11 meses y 15 días

CD3.72

La casa de ropa Adrianos descuenta un pagaré por el cual recibe $29 887, a una tasa de descuento del 26% anual. ¿Cuánto tiempo falta para el vencimiento del pagaré si éste tiene valor nominal de $60 000?

Datos
$M = \$60\ 000$
$C = \$29\ 887$
$d = 26\%$ anual

$$D = M - C = 60000 - 29887 = \$30113$$

$$n = \frac{D}{Md} = \frac{30\,113}{60000(0.26)} = 1.93$$

Plazo = 1 año, 11 meses y 5 días

CD3.73

Encontrar la fecha en que se descontó un pagaré de $34 000 con vencimiento el 12 de julio del presente año. Como el descuento es comercial el banco descontó en el momento de entregar el préstamo la cantidad de $3 670, con una tasa de descuento del 26% anual.

Datos
$M = \$34\ 000$
$D = \$3\ 670$
$d = 26\%$ anual

$$n = \frac{D}{Md} = \frac{3\,670}{34\,000(0.26)} = 0.4151$$

$n = (0.4151)(360)$

$n = 149.45$ días $\cong$ 149

$n = 4$ meses 29 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Pagaré

CD3.74
Encontrar el valor descontado del siguiente pagaré a Hielo del Atlántico S. A., el 15 de julio de 2006 en un banco que ofrece una tasa de descuento del 14%.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 15 de Marzo de 2014 $900 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
Hielo del Atlántico S.A. en México D.F.
el día 15 de Septiembre de 2014 la cantidad de Novecientos mil
pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción en mercancía
La suma anterior causará intereses 24% anual hasta la fecha de vencimiento.
En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir
48% anual **por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.**

Nombre Oscar Calva Montes
Domicilio Av. Pacífico 56481
Colonia Cafetalera
Ciudad México D.F.
C. P. 04836

Acepto (amos)

a) Calcular el valor de vencimiento del pagaré
Datos
$C = \$900\,000$
$n = 6$ meses
$T = 24\%$ anual
$i = 0.02$
Incógnitas: I y M

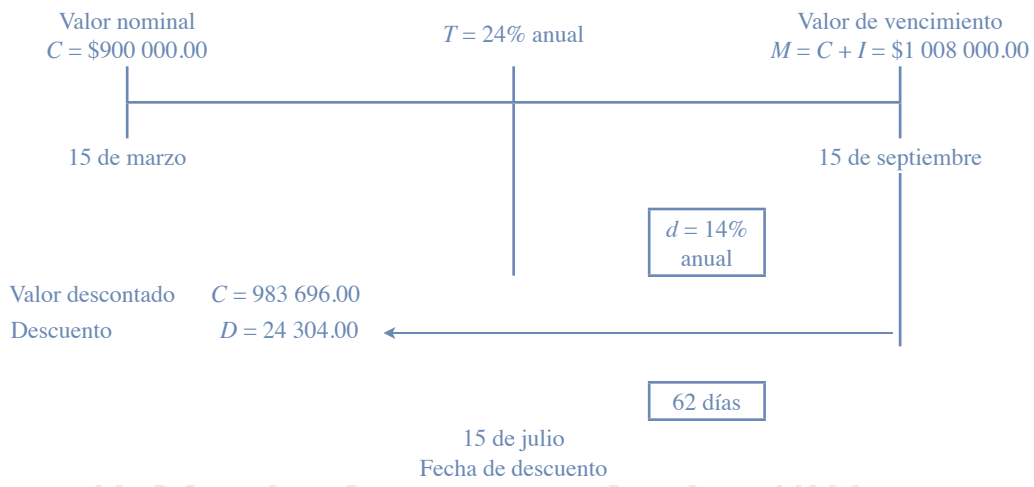
$$I = Cni = 900000(6)(0.24/12) = \$108000$$
$$M = C + I = 900000 + 108000 = \$1008000$$

b) Calcular el descuento y el valor descontado (valor efectivo)
Datos
$M = \$1\,008\,000$
$d = 14\%$ anual
$n = 62$ días
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd = 1008000(62/360)(0.14) = \$24304$$
$$C = M - D = 1008000 - 24304 = \$983696$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.74 cont.



CD3.75

Encontrar el valor descontado del siguiente pagaré, a la compañía Kolvi S.A., el 30 de agosto de 2006 en un banco que ofrece una tasa de descuento de 18%.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 30 de Marzo de 20 13 $1 300 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
Compañía de Kolvi S.A. en Puebla, Pue.
el día 30 de Noviembre de 20 13 la cantidad de
Un millón trescientos mil pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción en material
La suma anterior causará intereses 18 % anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 48 % anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Mauricio Solís Martínez
Domicilio Calle 57 Oriente
Colonia Centro
Ciudad Puebla, Pue.
C. P. 08765

Acepto (amos)

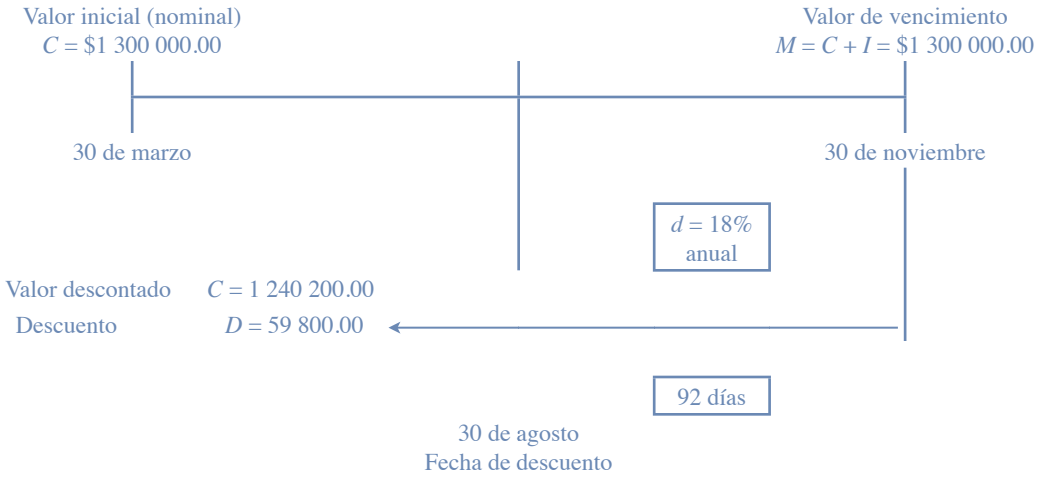
No es necesario calcular el valor de vencimiento del pagaré, porque éste no indica la tasa de interés a pagar. Entonces se procede a calcular el descuento y el valor descontado (valor efecto), sabiendo que el valor de vencimiento es igual al valor nominal.

Datos
$M = \$1\ 300\ 000$
$d = 18\%$ anual
$n = 92$ días
Incógnitas: D y C

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.75 cont.

$$D = Mnd = 1300000(92/360)(0.18) = \$59800$$
$$C = M - D = 1300000 - 59800 = \$1240200$$



CD3.76
El agrónomo Javier Domínguez Pedrosa firmó un pagaré a la tienda de fertilizantes Viarsa con valor de $800 000 pagaderos a 9 meses, con una tasa de interés de 20%. ¿Cuál es el valor descontado del pagaré 2 meses antes de su vencimiento con la misma tasa de descuento?

Datos
C = $800 000
n = 9 meses
T = 20 % anual
Incógnita: M

a) $M = C(1+ni) = 800000\left[1+(9/12)(0.20)\right] = \$920000$

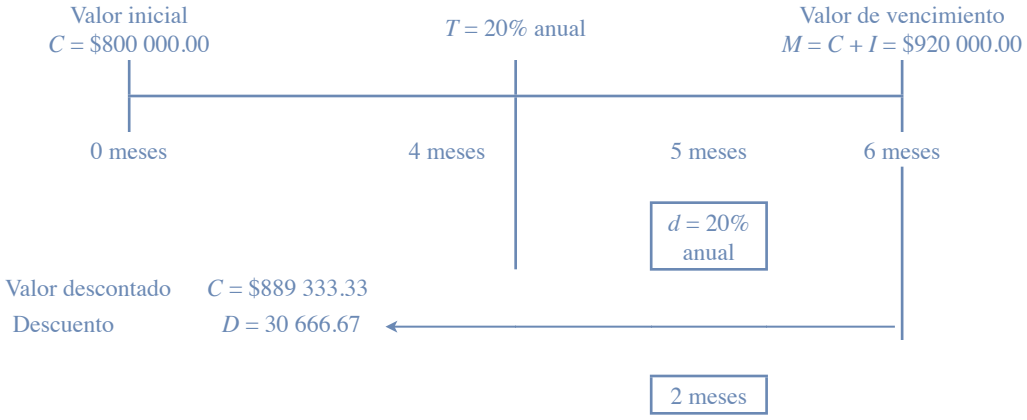
b) Calcular el descuento y el valor descontado.

Datos
M = $920 000
n = 2 meses
d = 20% anual

$$D = Mnd = 920000(2/12)(0.20) = \$30666.67$$
$$C = M - D = 920000 - 30666.67 = \$889333.33$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.76 cont.



CD3.77

Del siguiente pagaré encontrar el valor de vencimiento. Si este pagaré se liquidó 12 días después de su vencimiento, calcular el interés moratorio y la cantidad a pagar.

Documento 1 de 1 Núm._____

México D.F. a 14 de enero de 2014 $ 348 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de Sr. Juan Barreda Suarez en México D.F.
el día 26 de Noviembre de 2014 la cantidad de
trescientos cuarenta y ocho mil pesos 00/100
Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción

La suma anterior causará intereses 20% anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 45% anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Juan Luis Herrera Rosales
Domicilio Av. Coyoacán 56481
Colonia Árbol de Fuego
Ciudad México D.F.
C. P. 04814

Acepto (amos)

Datos
C = $348 000
n = 316 días
d = 20% anual
Incógnitas: M y Im

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD3.77 cont.

a) El valor de vencimiento del pagaré es:

$$M = 348000\left[1+\left(\frac{0.20}{360}\right)(316)\right] = \$\ 409093.33$$

b) Interés moratorio

$$Im = 409\,093.33\left[\left(\frac{0.45}{360}\right)(12)\right] = \$6\,136.40$$

Cantidad a pagar = (capital + intereses ordinarios) + intereses moratorios
Cantidad a pagar = 409 093.33 + 6136.40 = $415 229.73

CD3.78
Del siguiente pagaré, calcular la cantidad que pidió prestada el señor Balboa a la señora Camargo y calcular el valor presente del documento al 20 de septiembre.

Documento 1 de 1 Núm._____
México D.F. a 14 de Febrero de 20 14 $ 1 200 000.00

Por este pagaré me(nos) obligo(amos) a pagar incondicionalmente a la orden de
la señora Sonia Camargo Dorantes en México D.F.
el día 26 de diciembre de 20 14 la cantidad de un millóm doscientos mil pesos 00/100

Valor recibido a mi (nuestra) entera satisfacción _____
La suma anterior causará intereses 25% anual hasta la fecha de vencimiento. En caso de que no pague(mos) puntualmente, me(nos) obliga(mos) a cubrir 48% anual por concepto de intereses moratorios, sin que por esto se entienda como prorrogado el plazo.

Nombre Joaquín Balbia Gaytán
Domicilio Jacaranda 81
Colonia Arboledas
Ciudad México D.F.
C. P. 04814

Acepto (amos)

a) Del 14 de febrero (hoy) al 26 de diciembre transcurren 315 días.

$$C = 1\,200000\left[1+\left(\frac{0.25}{360}\right)(315)\right]^{-1} = \$984615.38$$

b) Del 20 de septiembre al 26 de diciembre hay 97 días.

$$VP = 1200000\left[1+\left(\frac{0.25}{360}\right)(97)\right]^{-1} = \$\,1124268.05$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas complementarios
Parte I

CD-I-3.1
¿Qué interés produce un capital de $76 600 a pagarse dentro de 13 semanas a una tasa de interés simple de 12% anual?

Datos
C = $76 600
T = 12% anual
n = 13 semanas
Incógnita: I

$$I = C(T/100)(n/52)$$
$$I = 76600(0.12)(13/52)$$
$$I = 76600(0.12)(0.25)$$
$$I = 76600(0.03)$$
$$I = \$2298$$

CD-I-3.2
Encontrar el interés exacto que se paga por un préstamo de $16 350, a 11.52% en 240 días.

Datos
C = $16 350
T = 11.52% anual
n = 240 días
Incógnita: Ie

$$Ie = C(T/100)(n/365)$$
$$Ie = 16350(0.1152)(240/365)$$
$$Ie = 16350(0.1152)(0.00031561)$$
$$Ie = 16350(0.07574)$$
$$Ie = \$1238.48$$

CD-I-3.3
El arquitecto Juárez recibe un préstamo de $48 750 a 2 años. Si la tasa de interés es de 1.2% bimestral, ¿cuánto pagará dentro de 2 años?

La tasa y el tiempo se expresan en forma bimestral.

Datos
C = $48 750
T = 1.2% bimestral
t = 0.012 bimestral
n = 2 años
n = 12 bimestres

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 48750\left[1+(0.012)(12)\right]$$
$$M = 48750\left[1+(0.144)\right]$$
$$M = 48750\left[1.144\right]$$
$$M = \$55770$$

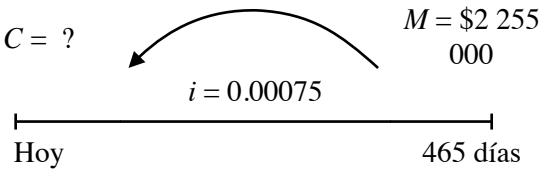
CD-I-3.4
Un banco entrega al señor Juan Álvarez la cantidad de $2 255 000 por un préstamo a 1 año, 3 meses y 15 días, con una tasa de 27% de interés simple. ¿Cuál es el capital inicial del préstamo?

Datos
M = $2 255 000
T = 27% anual
i = 0.00075 diario
n = 1 año, 3 meses y 15 días
n = 360 + 90 + 15
n = 465 días
Incógnita: C

$$C = 2255000\left[1+(0.00075)(465)\right]^{-1}$$
$$C = 2255000\left[1.34875\right]^{-1}$$
$$C = 2255000(0.741427)$$
$$C = \$1671917.88$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-I-3.4 cont.



CD-I-3.5

Una deuda de $8 400 se liquidó el 29 de junio de este año con un cheque cuyo importe es de $9 080. Si la tasa de interés simple es de 11.75%, ¿cuánto tiempo estuvo prestado el dinero?

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i}$$

Datos
C = $8 400
M = $9 080
T = 11.75% anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{9\,080}{8\,400} - 1}{0.1175} = \frac{1.0809 - 1}{0.1175} = 0.688 \text{ años}$$

n = 8 meses, 8 días

Como la tasa se da en forma anual, el periodo también es anual, entonces el resultado se expresa en años.

CD-I-3.6

Se descuenta al profesor Gómez un préstamo de $350 870 a un plazo de 180 días y con una tasa de descuento de 13% anual. Determinar:
a) ¿De cuánto es el descuento en el momento de recibir el préstamo?
b) ¿Qué cantidad de dinero recibe?

Datos
M = $350 870
n = 180 días
d = 13% anual
d = 0.0003611 diario
Incógnitas: D y C

CD-I-3.6 cont.

$$D = Mnd$$
$$D = 350870(180)(0.0003611)$$
$$D = 350870(0.065)$$
$$D = \$22806.55$$

La cantidad que recibe el profesor Gómez es de:

$$C = M - D$$
$$C = 350870 - 22806.55$$
$$C = \$328063.45$$

CD-I-3.7

Una compañía desea descontar un documento el 30 de abril con un valor de $683 656 y con una tasa de descuento de 10% anual. Si la fecha de vencimiento es el 30 de junio de este año, ¿cuánto dinero recibirá la compañía?

Datos
M = $683 656
n = 2 meses
d = 10% anual
d = 0.10 / 12 = 0.00833 mensual
Incógnita: C

$$C = M(1 - nd)$$
$$C = 683656[1 - (2)(0.00833)]$$
$$C = 683656(1 - 0.01666)$$
$$C = 683656(0.98334)$$
$$C = \$672266.29$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-I-3.8
Juan Torres recibe la cantidad de $100 000 por un préstamo a pagar en 10 meses y con una tasa de descuento de 10.5% anual. ¿Qué cantidad de dinero debió solicitar prestada?

Datos
C = $100 000
n = 10 meses
d = 10.5% anual
d = 0.15 / 12 = 0.00875 mensual
Incógnita: M

$$M = \frac{C}{1 - nd}$$

$$M = \frac{100000}{1 - (10)(0.00875)}$$

$$M = \frac{100000}{1 - 0.00875}$$

$$M = \frac{100000}{0.9125}$$

$$M = \$109589.04$$

Parte II

CD-II-3.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) El interés significa lo mismo que la tasa de interés FALSE
b) El capital es mayor que el monto FALSE
c) Valor descontado significa lo mismo que descuento FALSE
d) El deudor es la persona que cobra el pagaré FALSE
e) Se depositan $100 el 15 de marzo y se retira el 15 de octubre, entonces el plazo es de 199 días FALSE

Se considera año comercial por realizarse un depósito en una institución financiera (ver apéndice C).

Año comercial (365 días)

Fecha	Día del año
15 de marzo	73
15 de octubre	287
Total de días transcurridos	214

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-II-3.2
Un capital de $5 000 se duplica en 4 años con un tipo de interés simple de:

Datos
$C = \$5\,000$
$M = 2C$
$N = 4$ años
Incógnita: T

$$M = C(1+ni)$$
$$2C = C(1+ni)$$
$$\frac{2C}{C} = 1+ni$$
$$2 = 1+ni$$
$$2-1 = ni$$
$$\frac{1}{n} = i$$
$$i = \frac{1}{4} = 0.25$$

CD-II-3.3
Pedro solicita un préstamo de $38 000 a 2 años. Si la tasa de interés simple es de 3% mensual, ¿cuánto deberá pagar dentro de 2 años? La tasa y el tiempo se expresan en forma bimestral.

Datos
$C = \$38\,000$
$T = 3\%$ mensual
$t = 0.03$ mensual
$n = 2$ años
$n = 24$ meses
Incógnita: M

$$M = C(1+ni)$$
$$M = 380000\left[1+(0.03)(24)\right]$$
$$M = 38000\left[1+(0.72)\right]$$
$$M = 38000\left[1.72\right]$$
$$M = \$65360$$

CD-II-3.4
Calcular el valor presente de $30 000, pagaderos a 18 meses, con tasa de interés simple del 12%.

Datos
$M = \$30\,000$
$T = 12\%$ anual
$i = 0.01$mensual
$n = 18$ meses
Incógnita: VP

$$VP = 30000\left[1+(0.12/12)(18)\right]^{-1}$$
$$VP = 30000\left[1+(0.01)(18)\right]^{-1}$$
$$VP = 30000(1.18)^{-1}$$
$$VP = 30000(0.8474)$$
$$VP = \$25423.73$$

CD-II-3.5
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $26 500, si el capital invertido es de $18 700 a una tasa de 6.8% anual?

Datos
$C = \$18\,700$
$M = \$26\,500$
$T = 6.8\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C}-1}{i}$$
$$n = \frac{\frac{26\,500}{18\,700}-1}{0.068} = \frac{1.4171-1}{0.068} = 6.134 \text{ años}$$

$n = 6$ años, 1 mes y 18 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-II-3.6
Una compañía solicita $500 000 de préstamo a un banco, a 2 años con una tasa de descuento de 12% anual.

a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad la compañía por el préstamo?

Datos
$M = \$500\,000$
$n = 2$ años
$d = 12\ \%$ anual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd$$
$$D = 500000(2)(0.12)$$
$$D = 500000(0.24)$$
$$D = \$120000$$

La cantidad que recibe la compañía es de:
$$C = M - D$$
$$C = 500000 - 120000$$
$$C = \$380000$$

CD-II-3.7
¿Cuánto recibe la señora Josefina por un pagaré de $45 600, 4 meses antes de su vencimiento, con una tasa de descuento del 15% anual?

Datos
$M = \$45\,600$
$n = 4$ meses
$d = 15\%$ anual
$$d = \frac{0.15}{12} = 0.0125 \text{ mensual}$$
Incógnita: C

CD-II-3.7 cont.
$$C = M(1 - nd)$$
$$C = 45600[1 - (4)(0.0125)]$$
$$C = 45600(1 - 0.05)$$
$$C = 45600(0.95)$$
$$C = \$43320$$

CD-II-3.8
Calcular la tasa de rendimiento, si el valor descontado a los 12 meses es de $12 948, y el monto de $15 000

Datos
$C = \$12\,948$
$n = 12$ meses
$M = \$15\,000$
Incógnita: R

$$R = \frac{M - C}{Cn}$$
$$R = \frac{15000 - 12948}{(12948)(12)}$$
$$R = \frac{2052}{155376} = 0.0132$$
$$R = 1.32\% \text{ mensual}$$

Recursos Académicos en Línea

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-II-3.9
Hallar el valor de un pagaré, si 6 meses antes de su vencimiento se descontó en un banco y se recibió por él la cantidad de $6 540, a una tasa de descuento del 18% anual.

Datos
C = $6 540
d = 18% anual
d = 1.5% mensual
n = 6 meses
Incógnita: M

$$M = C(1+nd)$$
$$M = 6540\left[1+(6)(0.015)\right]$$
$$M = 6540\left[1+(0.09)\right]$$
$$M = 6540\left[1.09\right]$$
$$M = \$7128.60$$

CD-II-3.10
Una persona vendió a un banco un pagaré 3 meses antes de su vencimiento, con valor nominal de $8 355 y recibió del banco la cantidad de $6 835. Encontrar la tasa de descuento.

Datos
M = $8 355
C = $6 835
n = 3 meses
Incógnita: D y d

$$D = M - C$$
$$D = 8355 - 6835$$
$$D = 1520$$

CD-II-3.10 cont.

$$d = \frac{D}{Mn}$$
$$d = \frac{1520}{(8355)(3)}$$
$$d = \frac{1520}{25065}$$
$$d = 0.0606 \text{ mensual}$$
$$d = 6.06\% \text{ mensual}$$

Recursos académicos en línea

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Parte III

CD-III-3.1
Escribir en la línea si el enunciado es falso o verdadero.

a) La tasa de interés activa es la que cobran los bancos ____TRUE____
b) La tasa de interés pasiva es la que pagan los bancos ____TRUE____
c) El valor de vencimiento es igual al valor nominal más los intereses ____TRUE____
d) El pagaré es un compromiso por escrito para el pago de una determinada cantidad de dinero ____TRUE____
e) El deudor u otorgante es la persona que cobra el pagaré ____TRUE____

CD-III-3.2
Don Pablo abre una cuenta de inversión en Bansur por la cantidad de $2 000. Después de un año recibe $2 960. Por su inversión calcula:
a) El interés
b) La tasa de interés
c) El tipo de interés

Datos
$C = \$2\,000$
$M = \$2\,960$
$n = 1$ año
Incógnitas: I, i y T
a)

$$I = M - C$$
$$I = 2960 - 2000$$
$$I = \$960$$

b)

$$i = \frac{I}{Cn}$$
$$i = \frac{960}{(2000)(1)}$$
$$i = 0.48 \text{ anual}$$

c)

$$T = 48\% \text{ anual}$$

CD-III-3.3
La señora Prudencia solicita a una institución financiera un préstamo de $6 500 a una tasa de interés simple de 18% con un plazo de 55 días. Calcula el interés comercial y exacto.

Datos
$C = \$6\,500$
$T = 18\%$ anual
$n = 55$ días
Incógnitas: Io e Ie

$$Io = C\left(\frac{T}{360}\right)(n)$$
$$Io = 6500\left(\frac{0.18}{360}\right)(55)$$
$$Io = 6500(0.0005)(55)$$
$$Io = 6500(0.0275)$$
$$Io = \$178.75$$

$$Ie = C\left(\frac{T}{365}\right)(n)$$
$$Ie = 6500\left(\frac{0.18}{365}\right)(55)$$
$$Ie = 6500(0.000493)(55)$$
$$Ie = 6500(0.02712)$$
$$Ie = \$176.28$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-III-3.4
Fernando Barrales depositó en su cuenta de ahorros $8 000 el 5 de marzo y el 27 marzo lo retiró. La tasa de interés simple es de 7.7% anual. ¿Qué cantidad recibió?

Datos
C = $8 000
T = 7.7% anual
i = 0.000213888
n = 22 días
Incógnita: M

$$M = 8000\left[1+\left(0.077/360\right)\left(22\right)\right]$$
$$M = 8000\left[1+\left(0.00021388\right)\left(22\right)\right]$$
$$M = 8000\left(1+0.004705555\right)$$
$$M = \ 8000.00\left(1.004705556\right)$$
$$M = \$8037.64$$

CD-III-3.5
Hallar el valor presente de $48 230 de un pagaré que vence dentro de 6 meses, si la tasa de interés simple es de 6%.

Datos
M = $48 230
T = 6% anual
i = 0.005 mensual
n = 6 meses
Incógnita: VP

$$VP = 48230\left[1+\left(0.06/12\right)\left(6\right)\right]^{-1}$$
$$VP = 48230\left[1+\left(0.05\right)\left(6\right)\right]^{-1}$$
$$VP = 48230\left(1.03\right)^{-1}$$
$$VP = 48230\left(0.9708\right)$$
$$VP = \$46825.24$$

CD-III-3.6
¿En cuánto tiempo se acumula un monto de $35 650, si el capital invertido es de $29 780 a una tasa de 5.4% anual?

Datos
M = $35 650
C = $29 780
T = 5.4% anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\frac{M}{C}-1}{i}$$
$$n = \frac{\frac{35\,650}{29\,780}-1}{0.054} = \frac{1.1971-1}{0.054} = 3.65 \text{ años}$$

n = 3 años, 7 meses y 24 días

CD-III-3.7
El señor Porfirio solicita un préstamo de $8 000 a una institución bancaria, a un plazo de 9 meses, con una tasa de descuento de 0.85% mensual.
a) Calcular el descuento.
b) ¿Qué cantidad recibe en realidad el señor Porfirio por el préstamo?

Datos
M = $8 000
n = 9 meses
d = 0.85 % mensual
Incógnitas: D y C

$$D = Mnd$$
$$D = 8000\left(9\right)\left(0.0085\right)$$
$$D = 8000\left(0.0765\right)$$
$$D = \$612$$

La cantidad que recibe el señor Porfirio es de
$$C = M - D$$
$$C = M - D$$
$$C = \$7388$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD-III-3.8

El arquitecto Mario Aguilar adquirió una deuda de $2 000 hace 6 meses y vence dentro de 12 meses a partir de la contratación. Además hace 4 meses contrajo una nueva deuda de $8 000 a pagarse dentro de 4 meses a partir del día de hoy. Asimismo, también adquirió otra deuda hace 1 mes por $3 000 a pagarse en 6 meses. El día de hoy el acreedor acepta un pago único en efectivo equivalente a las tres deudas, a una tasa de interés de 24%. Si la fecha focal se establece el día de hoy, ¿cuál debe ser el valor del pago único para cancelar sus deudas?

$$X = 2000\left[1+(0.24)(12/12)\right]\left[1+(0.24)(6/12)\right]^{-1}$$
$$+8000\left[1+(0.24)(8/12)\right]\left[1+(0.24)(4/12)\right]^{-1}$$
$$+3000\left[1+(0.24)(6/12)\right]\left[1+(0.24)(5/12)\right]^{-1}$$
$$X = 2000[1.24][1.12]^{-1} + 8000[1.16][1.08]^{-1} + 3000[1.12][1.1]^{-1}$$
$$X = 2000[1.24][0.8928] + 8000[1.16][0.9259] + 3000[1.12][0.9091]$$
$$X = 2000[1.1071] + 8000[1.0740] + 3000[1.0182]$$
$$X = 2214.20 + 8592.00 + 3054.60$$
$$X = \$13860.80$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

GLOSARIO

Acreedor. Es la persona o razón social a la que se debe pagar el dinero que nos han prestado.

Actividad financiera. Costumbre de pagar un rédito por el uso de dinero prestado.

Capital. En términos financieros es una determinada cantidad de dinero que permite ganar más (dinero) en operaciones de préstamo, llamada esta última interés.

Cuentas de inversión. También conocidas como cuentas de ahorro. En estas cuentas las personas pueden hacer depósitos y retiros del capital en cualquier momento (con tan sólo solicitarlo) y los intereses son bajos.

Compra. Acción de adquirir algo a cambio de dinero. También se refiere a un conjunto de bienes y servicios adquiridos en el acto de compra.

Compra a crédito. Compra cuyo importe no se paga en efectivo en el momento de la adquisición, sino que en la propia entidad vendedora o una tercera entidad concede crédito por la suma debida. En bolsa es la adquisición de acciones financiada a través de créditos por una autoridad bursátil.

Compra de contado. Compra cuyo importe se paga en el momento de la adquisición.

Compra a plazos. Contrato de compraventa en el cual el vendedor entrega el bien objeto de la transacción en el momento en que ésta se produce, y el comprador puede postergar sus pagos a futuras cuotas o plazos, pudiendo efectuar uno de estos pagos en el momento de la compra.

Comprador. Persona que adquiere un bien o derecho producto de una operación de compraventa.

Compraventa. Contrato por el que uno de los contratantes (vendedor) se obliga a entregar una cosa determinada y el otro (comprador) a pagar por ella un precio determinado. Asimismo, negocio de objetos que se revenden.

Contado. Procedimiento de cobro o pago que implica la entrega del bien o servicio con contrapartida monetaria en ese mismo momento.

Contrato. Negocio jurídico bilateral por el que dos o más personas físicas o jurídicas se obligan mutuamente a dar, hacer o no hacer algo, surgiendo entre ellas una relación obligatoria.

Crédito. Reputación, fama, prestigio que tiene una persona respecto al cumplimiento de sus obligaciones financieras.

Crédito a clientes. Cantidad que los clientes de una empresa le adeudan en función de los suministros que reciben.

Debe..Adeudar, estar en deuda con otra persona, estar obligado a cumplir una obligación o realizar un pago.

Demora. Retraso en el cumplimiento de una obligación de pago de una deuda, desde el momento en que ésta venció.

Depósito a plazo. Es el dinero depositado en una cuenta bancaria por la persona o razón social; su retiro es en una sola fecha determinada, de común acuerdo por ambas partes.

Descuento. Descuento concedido por las empresas a sus clientes por diversas causas: por pronto pago, por volumen de venta, etc.

Descuento en precios. Reducción en el precio de venta de un producto o servicio por motivos muy diversos: campañas de promoción, ferias, rebajas

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

estacionales, fidelidad del comprador, liquidación de existencias.

Descuento financiero. Operación financiera realizada por las entidades de crédito. Consistente en abonar al prestatario el importe, con rebaja de intereses, de una letra de cambio u otro mercantil antes de la fecha de su vencimiento.

Descuento por pronto pago. Descuento concedido por pagar las mercancías adquiridas al contado o en un plazo menor al establecido en la transacción comercial. Se trata de un porcentaje sobre las ventas que compensan el menor riesgo de insolvencia y la inmediata obtención de liquidez por parte de la empresa. Cuando se trata de descuento sobre compras por pronto pago, se refiere a una modalidad de descuento de proveedores en el que es la empresa la que reduce la cantidad a pagar a sus proveedores por realizar el pago dentro de unos días determinados por estos. Estos descuentos se registran en las cuentas de pérdidas y ganancias bajo el epígrafe de ingresos financieros.

Descuento por volumen de compra. Descuento concedido a la empresa cuando su volumen de compras con un determinado proveedor en un periodo, excede de una cierta cuantía, independientemente del tamaño de los pedidos que haya ido realizando con anterioridad. Estos descuentos se registran en la cuenta de pérdidas y ganancias como un menor importe de la compra que los origina.

Descuento por volumen de venta. Descuento que la empresa concede a sus clientes cuando su volumen de ventas con ellos en un periodo determinado supera una cierta cuantía.

Descuento sobre compras. Descuento concedido a las empresas por sus proveedores por diversas causas: volumen de compras, por pronto pago, etc.

Deuda. Obligación que se ha contraído con un tercero y que se ha de satisfacer. En general, es una obligación de pagar cierta cantidad de dinero.

Deudor. Es la persona o razón social que solicita un dinero prestado y se compromete a pagarlo posteriormente, extendiendo para ello un pagaré.

Dinero. Todo aquello aceptado como medio de pago o medición del valor. Las monedas y billetes de circulación son la forma final adoptadas por las economías como dinero. Es la suma de moneda circulante.

Dinero circulante. Dinero en efectivo, es decir, tesorería que la empresa en un momento determinado tiene como consecuencia de su funcionamiento. Una gestión eficiente de tesorería que maximice su rentabilidad evitando fondos ociosos incrementará el valor de la empresa.

Dinero de plástico. Tarjetas (de crédito, débito, de prepago, etc.) que se utilizan como medio de pago sustituyendo al dinero.

Dinero en circulación. Suma del efectivo en manos del público compuesto de billetes y moneda metálica de curso legal más los depósitos de todo tipo en el sistema bancario.

Empeñar. Entregar algo en prenda como garantía del pago de una deuda.

Empresa. Unidad económica de producción y decisión que, mediante la organización y coordinación de una serie de factores (capital y trabajo), persigue obtener un beneficio produciendo y comercializando productos o prestando servicios en el mercado.

Fábrica. Recinto en el que se instalan máquinas y otro tipo de equipos conjunta y ordenadamente para producción en masa de un determinado producto u objeto o para la transformación industrial de una fuente de energía.

Fabricar. Producir bienes o servicios mediante la transformación de materias primas o productos intermedios, valiéndose de una maquinaria y organización determinadas, de unos sistemas respectivos y haciéndolo en gran volumen.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Factura. Documento o recibo entregado por el vendedor al comprador como prueba de que éste ha adquirido una mercancía determinada o recibo de un servicio a un precio dado, y que representa, por tanto, el derecho de cobro a favor del vendedor. En la factura se especifican datos personales de ambos, las características de los productos, así como la fecha y el precio de compra.

Moneda en circulación. Son las monedas constantes y sonantes (aleaciones de metales). También a los billetes se les llama papel moneda.

Rédito. Renta de un capital.

Tanto por uno. Es el rendimiento que produce una moneda.

Tasa. También llamada tipo de interés o tanto por ciento, es el rendimiento que producen 100 unidades de moneda en una unidad de tiempo.

Tiempo. Es el número de periodos (tiempo predeterminado) que dura el préstamo de un capital.

En el país las tasas de interés que se utilizan en las operaciones comerciales y financieras no permanecen constantes por periodos grandes, por lo que es necesario fijar tasas de referencia. Las tasas de referencia más utilizadas son la Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE), el Costo Porcentual Promedio de Capitalización (CPP), el Costo de Capitalización a Plazo (CCP) y la tasa de los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES).

- **Tasa de interés activas**. Son las tasas que los bancos *cobran* por los diferentes tipos de crédito a los usuarios de éstos.

- **Tasa de interés pasivas**. Son las tasas de interés que los bancos *pagan* a los ahorradores e inversionistas.

- **Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE)**. Es el punto de equilibrio entre las tasas de interés pasivas y activas. Se obtienen a partir de la información que proporciona diariamente al Banco de México (BANXICO) de las diferentes instituciones bancarias del país (por lo menos seis), a las 12:00 horas de la ciudad de México. Las tasas son precios reales que los bancos están dispuestos a pedir prestado o prestar a BANXICO. Existen diferentes plazos de la TIIE, el más usual es de 28 días.

- **Costo Porcentual Promedio de Capitalización (CPP)**. Mide el costo al cual se fondean los bancos para cubrir sus pasivos. El Banco de México es el encargado de calcularlo y publicarlo el día 20 de cada mes en el *Diario Oficial de la Federación*.

- **Costo de Capitalización a Plazo (CCP)**. Es la estimación mensual del costo de capitalización a plazo por concepto de la tasa de interés de los pasivos a plazo en la moneda nacional a cargo de la banca múltiple y éste se utiliza para la tasa de interés de créditos en pesos. El Banco de México es el encargado de calcularlo y publicarlo los días 21 y 25 de cada mes en el *Diario Oficial de la Federación*.

- **Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES)**. Son instrumentos financieros de inversión cuya tasa de interés tiene un plazo de 28, 90 o 180 días y por lo regular, dicha tasa se utiliza como tasa de referencia.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.1
$7.50

3.2
$367 500

3.3
a) $530.83
b) $523.56

3.4
2.83% mensual

3.5
1.9% mensual

3.6
$3 220

3.7
$2 537 333.20

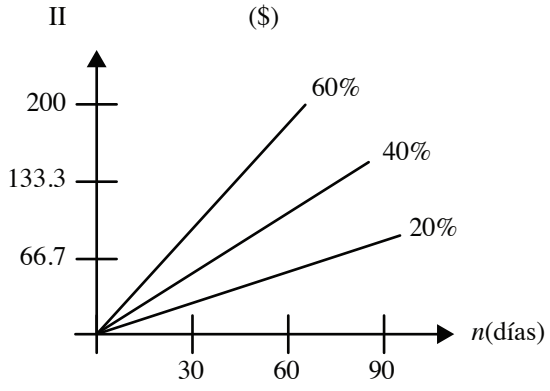
3.8
$9 195.40

3.9
$27 743

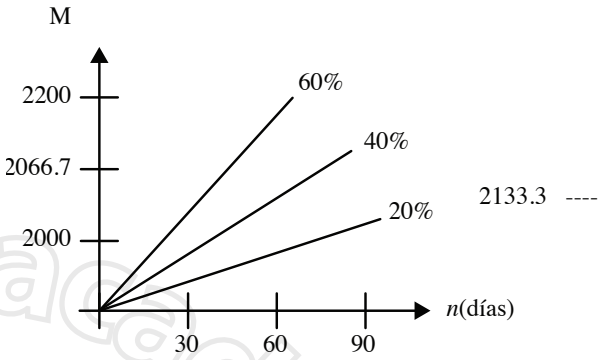
3.10
10 años

3.11
2 años, 9 meses y 10 días

3.12



3.13



3.14
$2 663 175

3.15
a) $ 284.93
b) $ 288.89
c) $ 280.55
d) $ 284.89

3.1
a) 335 días
b) 324 días

3.17
a) 176 días
c) 175 días

3.18
$425

3.19
$5 138

3.20
$14 356.21

3.21
$3 942

3.22
I = $1 440
M = $13 440

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.23
$22 720

3.24
$100 329.00

3.25
$1 200

3.26
$161.87

3.27
$1 208.05

3.28
$5 219.35

3.29
$13 200

3.30
$2 994.12

3.31
$153.57

3.32
$12 568

3.33
$697.66

3.34
a) $14 000
b) $11 000

3.35
$690

3.36
$543 630.47

3.37
$191 081.25

3.38
33.918% anual

3.39
76% anual

3.40
$21 686

3.41
$4 695.65

3.42
72.22% anual

3.43
25% anual

3.44
2 meses y 29 días

3.45
1 mes y 18 días

3.46
$1 912.50

3.47
El señor José Antonio Solís Díaz es el deudor y el señor Armando González Carrasco es el acreedor o beneficiario del pagaré. El valor nominal del documento es por $500 000. El 14 de febrero de 2007 es la fecha en que se expidió el documento y el 26 de diciembre de 2007 es la fecha de vencimiento. El plazo es de 315 días.

3.48
$631 250

3.49
Interés moratorio = $8 000,
Cantidad a pagar = $639 250

3.50
$33 312 y $33 438.34

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.51
1.7195% mensual

3.52
10.09% mensual

3.53
28.27%

3.54
$996.29

3.55
10%

3.56
45 días

3.57
$349.80

3.58
$1 830

3.59
$601.40

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

GLOSARIO

Acreedor. Es la persona o razón social a la que se debe pagar el dinero que nos han prestado.

Actividad financiera. Costumbre de pagar un rédito por el uso de dinero prestado.

Capital. En términos financieros es una determinada cantidad de dinero que permite ganar más (dinero) en operaciones de préstamo, llamada esta última interés.

Cuentas de inversión. También conocidas como cuentas de ahorro. En estas cuentas las personas pueden hacer depósitos y retiros del capital en cualquier momento (con tan sólo solicitarlo) y los intereses son bajos.

Compra. Acción de adquirir algo a cambio de dinero. También se refiere a un conjunto de bienes y servicios adquiridos en el acto de compra.

Compra a crédito. Compra cuyo importe no se paga en efectivo en el momento de la adquisición, sino que en la propia entidad vendedora o una tercera entidad concede crédito por la suma debida. En bolsa es la adquisición de acciones financiada a través de créditos por una autoridad bursátil.

Compra de contado. Compra cuyo importe se paga en el momento de la adquisición.

Compra a plazos. Contrato de compraventa en el cual el vendedor entrega el bien objeto de la transacción en el momento en que ésta se produce, y el comprador puede postergar sus pagos a futuras cuotas o plazos, pudiendo efectuar uno de estos pagos en el momento de la compra.

Comprador. Persona que adquiere un bien o derecho producto de una operación de compraventa.

Compraventa. Contrato por el que uno de los contratantes (vendedor) se obliga a entregar una cosa determinada y el otro (comprador) a pagar por ella un precio determinado. Asimismo, negocio de objetos que se revenden.

Contado. Procedimiento de cobro o pago que implica la entrega del bien o servicio con contrapartida monetaria en ese mismo momento.

Contrato. Negocio jurídico bilateral por el que dos o más personas físicas o jurídicas se obligan mutuamente a dar, hacer o no hacer algo, surgiendo entre ellas una relación obligatoria.

Crédito. Reputación, fama, prestigio que tiene una persona respecto al cumplimiento de sus obligaciones financieras.

Crédito a clientes. Cantidad que los clientes de una empresa le adeudan en función de los suministros que reciben.

Debe..Adeudar, estar en deuda con otra persona, estar obligado a cumplir una obligación o realizar un pago.

Demora. Retraso en el cumplimiento de una obligación de pago de una deuda, desde el momento en que ésta venció.

Depósito a plazo. Es el dinero depositado en una cuenta bancaria por la persona o razón social; su retiro es en una sola fecha determinada, de común acuerdo por ambas partes.

Descuento. Descuento concedido por las empresas a sus clientes por diversas causas: por pronto pago, por volumen de venta, etc.

Descuento en precios. Reducción en el precio de venta de un producto o servicio por motivos muy diversos: campañas de promoción, ferias, rebajas

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

estacionales, fidelidad del comprador, liquidación de existencias.

Descuento financiero. Operación financiera realizada por las entidades de crédito. Consistente en abonar al prestatario el importe, con rebaja de intereses, de una letra de cambio u otro mercantil antes de la fecha de su vencimiento.

Descuento por pronto pago. Descuento concedido por pagar las mercancías adquiridas al contado o en un plazo menor al establecido en la transacción comercial. Se trata de un porcentaje sobre las ventas que compensan el menor riesgo de insolvencia y la inmediata obtención de liquidez por parte de la empresa. Cuando se trata de descuento sobre compras por pronto pago, se refiere a una modalidad de descuento de proveedores en el que es la empresa la que reduce la cantidad a pagar a sus proveedores por realizar el pago dentro de unos días determinados por estos. Estos descuentos se registran en las cuentas de pérdidas y ganancias bajo el epígrafe de ingresos financieros.

Descuento por volumen de compra. Descuento concedido a la empresa cuando su volumen de compras con un determinado proveedor en un periodo, excede de una cierta cuantía, independientemente del tamaño de los pedidos que haya ido realizando con anterioridad. Estos descuentos se registran en la cuenta de pérdidas y ganancias como un menor importe de la compra que los origina.

Descuento por volumen de venta. Descuento que la empresa concede a sus clientes cuando su volumen de ventas con ellos en un periodo determinado supera una cierta cuantía.

Descuento sobre compras. Descuento concedido a las empresas por sus proveedores por diversas causas: volumen de compras, por pronto pago, etc.

Deuda. Obligación que se ha contraído con un tercero y que se ha de satisfacer. En general, es una obligación de pagar cierta cantidad de dinero.

Deudor. Es la persona o razón social que solicita un dinero prestado y se compromete a pagarlo posteriormente, extendiendo para ello un pagaré.

Dinero. Todo aquello aceptado como medio de pago o medición del valor. Las monedas y billetes de circulación son la forma final adoptadas por las economías como dinero. Es la suma de moneda circulante.

Dinero circulante. Dinero en efectivo, es decir, tesorería que la empresa en un momento determinado tiene como consecuencia de su funcionamiento. Una gestión eficiente de tesorería que maximice su rentabilidad evitando fondos ociosos incrementará el valor de la empresa.

Dinero de plástico. Tarjetas (de crédito, débito, de prepago, etc.) que se utilizan como medio de pago sustituyendo al dinero.

Dinero en circulación. Suma del efectivo en manos del público compuesto de billetes y moneda metálica de curso legal más los depósitos de todo tipo en el sistema bancario.

Empeñar. Entregar algo en prenda como garantía del pago de una deuda.

Empresa. Unidad económica de producción y decisión que, mediante la organización y coordinación de una serie de factores (capital y trabajo), persigue obtener un beneficio produciendo y comercializando productos o prestando servicios en el mercado.

Fábrica. Recinto en el que se instalan máquinas y otro tipo de equipos conjunta y ordenadamente para producción en masa de un determinado producto u objeto o para la transformación industrial de una fuente de energía.

Fabricar. Producir bienes o servicios mediante la transformación de materias primas o productos intermedios, valiéndose de una maquinaria y organización determinadas, de unos sistemas respectivos y haciéndolo en gran volumen.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Factura. Documento o recibo entregado por el vendedor al comprador como prueba de que éste ha adquirido una mercancía determinada o recibo de un servicio a un precio dado, y que representa, por tanto, el derecho de cobro a favor del vendedor. En la factura se especifican datos personales de ambos, las características de los productos, así como la fecha y el precio de compra.

Moneda en circulación. Son las monedas constantes y sonantes (aleaciones de metales). También a los billetes se les llama papel moneda.

Rédito. Renta de un capital.

Tanto por uno. Es el rendimiento que produce una moneda.

Tasa. También llamada tipo de interés o tanto por ciento, es el rendimiento que producen 100 unidades de moneda en una unidad de tiempo.

Tiempo. Es el número de periodos (tiempo predeterminado) que dura el préstamo de un capital.

En el país las tasas de interés que se utilizan en las operaciones comerciales y financieras no permanecen constantes por periodos grandes, por lo que es necesario fijar tasas de referencia. Las tasas de referencia más utilizadas son la Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE), el Costo Porcentual Promedio de Capitalización (CPP), el Costo de Capitalización a Plazo (CCP) y la tasa de los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES).

- **Tasa de interés activas**. Son las tasas que los bancos *cobran* por los diferentes tipos de crédito a los usuarios de éstos.

- **Tasa de interés pasivas**. Son las tasas de interés que los bancos *pagan* a los ahorradores e inversionistas.

- **Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE)**. Es el punto de equilibrio entre las tasas de interés pasivas y activas. Se obtienen a partir de la información que proporciona diariamente al Banco de México (BANXICO) de las diferentes instituciones bancarias del país (por lo menos seis), a las 12:00 horas de la ciudad de México. Las tasas son precios reales que los bancos están dispuestos a pedir prestado o prestar a BANXICO. Existen diferentes plazos de la TIIE, el más usual es de 28 días.

- **Costo Porcentual Promedio de Capitalización (CPP)**. Mide el costo al cual se fondean los bancos para cubrir sus pasivos. El Banco de México es el encargado de calcularlo y publicarlo el día 20 de cada mes en el *Diario Oficial de la Federación*.

- **Costo de Capitalización a Plazo (CCP)**. Es la estimación mensual del costo de capitalización a plazo por concepto de la tasa de interés de los pasivos a plazo en la moneda nacional a cargo de la banca múltiple y éste se utiliza para la tasa de interés de créditos en pesos. El Banco de México es el encargado de calcularlo y publicarlo los días 21 y 25 de cada mes en el *Diario Oficial de la Federación*.

- **Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES)**. Son instrumentos financieros de inversión cuya tasa de interés tiene un plazo de 28, 90 o 180 días y por lo regular, dicha tasa se utiliza como tasa de referencia.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.1
$7.50

3.2
$367 500

3.3
a) $530.83
b) $523.56

3.4
2.83% mensual

3.5
1.9% mensual

3.6
$3 220

3.7
$2 537 333.20

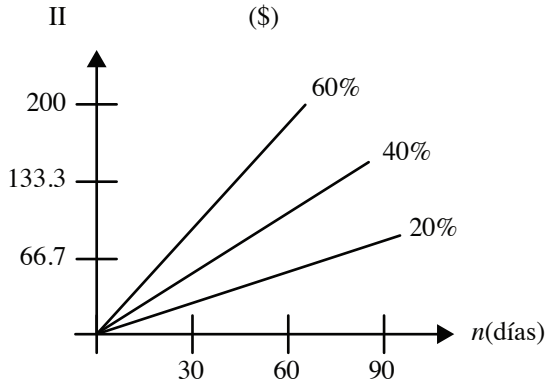
3.8
$9 195.40

3.9
$27 743

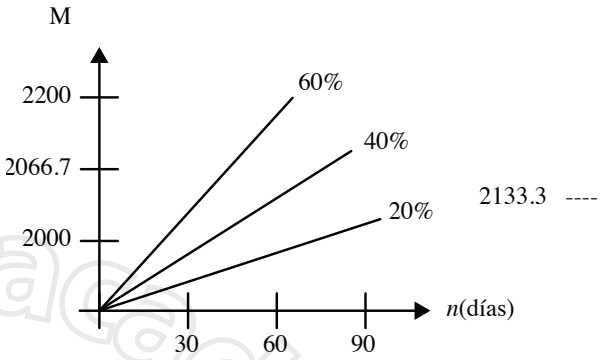
3.10
10 años

3.11
2 años, 9 meses y 10 días

3.12



3.13



3.14
$2 663 175

3.15
a) $ 284.93
b) $ 288.89
c) $ 280.55
d) $ 284.89

3.1
a) 335 días
b) 324 días

3.17
a) 176 días
c) 175 días

3.18
$425

3.19
$5 138

3.20
$14 356.21

3.21
$3 942

3.22
I = $1 440
M = $13 440

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.23
$22 720

3.24
$100 329.00

3.25
$1 200

3.26
$161.87

3.27
$1 208.05

3.28
$5 219.35

3.29
$13 200

3.30
$2 994.12

3.31
$153.57

3.32
$12 568

3.33
$697.66

3.34
a) $14 000
b) $11 000

3.35
$690

3.36
$543 630.47

3.37
$191 081.25

3.38
33.918% anual

3.39
76% anual

3.40
$21 686

3.41
$4 695.65

3.42
72.22% anual

3.43
25% anual

3.44
2 meses y 29 días

3.45
1 mes y 18 días

3.46
$1 912.50

3.47
El señor José Antonio Solís Díaz es el deudor y el señor Armando González Carrasco es el acreedor o beneficiario del pagaré. El valor nominal del documento es por $500 000. El 14 de febrero de 2007 es la fecha en que se expidió el documento y el 26 de diciembre de 2007 es la fecha de vencimiento. El plazo es de 315 días.

3.48
$631 250

3.49
Interés moratorio = $8 000,
Cantidad a pagar = $639 250

3.50
$33 312 y $33 438.34

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.51
1.7195% mensual

3.52
10.09% mensual

3.53
28.27%

3.54
$996.29

3.55
10%

3.56
45 días

3.57
$349.80

3.58
$1 830

3.59
$601.40

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

Frecuencia de conversión

4.1
6 periodos de capitalización bimestral

4.2
12 periodos de capitalización mensual

4.3
a) 4 periodos
b) 3.45% trimestral
c) 8 periodos de capitalización

4.4
a) 2 periodos
b) 7.5% semestral
c) 6 periodos de capitalización

4.5
$7 716.00

4.6
a) $5 987.36
b) $6 091.00
c) $6 166.34

4.7
$23 485.92

4.8
$18 021.50

4.9
$31 508.28

4.10
$14 052.00

4.11
a) $20 856.44,
b) $20 861.69

4.12
a) 2 periodos
b) 7.5% semestral
c) 6 periodos de capitalización

4.13
$9 706.36

4.14
$22 766.56

4.15
$10 829.40

4.16
$134 623.12

4.17
$47 176.82

4.18
$18 665.11

4.19
$37 921.85

4.20
$12 595.65, $973.44

Calcular el valor de vencimiento del pagaré

4.21
4.488094 años

4.22
0.404192 meses

4.23
4.82222 años

4.24
a) $1.709511
b) $2.641926
c) $4.414844
d) $5.29005
e) $7.27254
f) $14.2066

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.25
$1.369912

4.26
$4.4998

4.27
$1.39957

4.28
$2.3243%

4.29
$17.462%

4.30
0.521%

4.31
14.816%

4.32
22.198%

4.33
10.947%

4.34
8.0265%

4.35
24.12%

4.36
18.81%

4.37
12.55%

4.38
9.6%

4.39
23.53%

4.40
13.84%

4.41
$3 030.10

4.42
$10 373.91

4.43
$1 257 543.54

4.44
$9 071.98

4.45
1.614431 = 8 meses y 12 días

4.46
2.967185 = 9 meses y 1 día

4.47
3.62832259 = 3 meses y 19 días

Respuesta a problemas reto

Reto 1
$p = 2, \quad i = 5\% \quad m = 6$

Reto 2
$70 588.20

Reto 3
$9 712.49

Reto 4
$n = 0.3870$ (4 meses, 19días)

Reto 5
44.23%

Reto 6
22.92%

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

INTERÉS COMPUESTO

Objetivo

- Resolver problemas de:
  - Interés compuesto
  - Monto
  - Capital y valor presente
  - Plazo
  - Tasas equivalentes
  - Tasas efectivas
  - Tasas nominales
  - Ecuaciones de valor
  - Ecuaciones de tiempo equivalente

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Formulario

Capitalización anual

$$M = C(1+i)^n \qquad 4.1$$

$$I = Cni \qquad 4.2$$

$$M = C(1+i)^n \qquad 4.3$$

Capitalización fraccionaria

$$M = C\left(1+\frac{i}{p}\right)^{np} \qquad 4.4$$

Cuando el periodo tiene el compone continuo (capitalización continua)

$$M = Ce^{j_\infty(n)} \qquad 4.5$$

Valor actual o presente

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} \qquad 4.6$$

$$C = M(1+i)^{-n} \qquad 4.7$$

$$C = M(1+i)^{-n} \qquad 4.8$$

$$C = M(e)^{-(nj_\infty)} \qquad 4.9$$

Tiempo

$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{p\left[\log\left(1+\frac{i}{p}\right)\right]} \qquad 4.10$$

Tasa

$$i = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}}\right] - 1 \qquad 4.11$$

$$i = \text{anti}\log\left[\frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{n}\right] - 1 \qquad 4.11a$$

Tasa efectiva

$$e = \left(1+\frac{i}{p}\right)^p - 1 \qquad 4.12$$

Tasa nominal

$$i = \left[(1+e)^{1/p}\right] - 1 \qquad 4.13$$

Inflación

$$I_1 + \lambda I_1 = I_2 \qquad 4.14$$

Tasa de inflación

$$\lambda = \frac{I_2}{I_1} - 1 \qquad 4.15$$

Tasa de inflación acumulada constante

$$\lambda_1 = (1+\lambda)^n - 1 \qquad 4.16$$

Tasa de inflación acumulada variable

$$\lambda = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_n) - 1 \qquad 4.17$$

Tasas de inflación por periodo

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Terminología

C	Capital inicial (valor actual)
n	Número total de periodos de capitalización
M	Monto (valor futuro)
T	Tasa de interés compuesto
e	Tasa efectiva
i	Tasa nominal
i	Interés compuesto al tanto por uno
$(1 + i)^n$	Factor de acumulación o factor de interés compuesto
P	Frecuencia de capitalización

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas a resolver

Frecuencia de conversión

CD4.1
¿Cuál es la frecuencia de conversión de un depósito que paga un interés del 18% capitalizable bimestralmente?

CD4.2
¿Cuál es la frecuencia de conversión de un depósito que paga un interés del 7% capitalizable mensualmente?

Periodo de capitalización

CD4.3
Si la tasa de interés es de 13.8% capitalizable trimestralmente durante 2 años determinar:
a) Frecuencia de capitalización
b) El interés por periodo
c) El número total de periodos de capitalización

CD4.4
Si la tasa de interés es de 15% capitalizable semestralmente durante 3 años determinar:
a) Frecuencia de capitalización
b) El interés por periodo
c) El número total de periodos de capitalización

Monto

CD4.5
¿Qué cantidad de dinero podrá tener Lorena García dentro de 4 años, si invierte $5 800 en Banorte y los intereses que paga son de 1.8% trimestral?

CD4.6
Encontrar el monto acumulado en 2 años, si el capital es de $3 545 y se invierte a un tipo de interés del:
a) 28% anual capitalizable semestral (ACS)
b) 28% anual capitalizable trimestral (ACT)
c) 28% anual capitalizable mensual (ACM)

CD4.7
Se desea conocer el monto acumulado, cuando el capital es de $18 000, invertido al 18% anual capitalizable bimestralmente; el plazo es de 18 meses.

CD4.8
Se invierten $15 500 durante 24 meses a una tasa de 7.56%, para comprar una computadora portátil. ¿Cuál es el valor acumulado?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.9
El señor Martínez invirtió $22 000 en Bansur, por un plazo de 4 años, con un interés de 9.7% capitalizable trimestralmente. Después de 2.5 años de inversión la tasa se modificó al 8% convertible mensualmente. Encontrar el monto al final de los 4 años.

CD4.10
La bióloga Roxana Hernández obtiene un préstamo bancario por $12 500 a 1 año y con un interés de 22% capitalizable bimestralmente. Ella decide liquidarlo en forma anticipada habiendo transcurrido 6 meses y medio. ¿Cuál es la cantidad que debe pagar?

CD4.11
La socióloga Alondra Rea invierte $19 500 en Banorte a un año y medio a una tasa de interés nominal de 4.5%. ¿Qué cantidad recibe la socióloga Rea al final del plazo?
a) Con capitalización bimestral
b) Con capitalización continua

Si la tasa de interés es de 15% capitalizable semestralmente durante 3 años determinar:
1) Frecuencia de capitalización
2) El interés por periodo
3) El número total de periodos de capitalización

Valor presente

CD4.12
¿Cuál es el valor presente de $11 600 invertidos 9 meses antes, a una tasa de 24% capitalizable mensualmente?

CD4.13
¿Cuál es el valor presente de $28 000 invertidos 14 meses antes, a una tasa de 18% capitalizable bimestralmente?

CD4.14
¿Cuánto debe depositar la alumna Alejandra Martínez, si desea tener un monto de , dentro de 3 años a una tasa de interés de 10% anual capitalizable mensualmente para su fiesta de graduación?

CD4.15
El contador Alejandro Herrera desea comprar un automóvil, para ello analiza dos planes de compra. El primero es pagar de contado la cantidad de $125 000, y el segundo es pagar un anticipo de $50 000 y el saldo en dos pagarés de $45 210 cada uno a 6 y 12 meses. Si el contador invirtiera su dinero en un fondo de inversión a una tasa de 8.9% capitalizable mensualmente, ¿cuál de los dos planes le conviene?
Primero se necesita trasladar todas las cantidades al mismo tiempo.

CD4.16
Calcular el valor actual de $69 572, pagaderos a un año 8 meses, a una tasa de 24% capitalizable cada tres meses.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.17
Calcular el valor actual de $25 840, pagaderos a 1 año 8 meses, a una tasa de 20% capitalizable cada 3 meses.

CD4.18
Calcular el valor actual de $45 000, pagaderos a 8 meses y 13 días, a una tasa de 24.6% capitalizable mensualmente.

CD4.19
La señora Amanda García firma un pagaré por la cantidad de $11 349, a plazo de 1 año, con una tasa de interés del 1.5% mensual. La señora García está pensando en descontar el documento 5 meses antes de su vencimiento, con una tasa de 18% con capitalización mensual. ¿Cuál es el valor actual del documento a los 5 meses? Calcular el valor de vencimiento del pagaré.

Tiempo

CD4.20
¿En cuánto tiempo un capital de $700 se convierte en un monto de $1 000 a una tasa de 8% capitalizable bimestralmente?

CD4.21
Un capital de $19 870 produce intereses a una tasa de 24% capitalizable cada mes. ¿En cuánto tiempo la inversión llegará a $21 873.15?

CD4.22
¿En cuánto tiempo se triplica un capital que se invierte al 23% capitalizable mensualmente?

CD4.23
¿En cuánto tiempo reduce un peso su valor adquisitivo a la mitad si se tiene una inflación del:
a) 50%
b) 30%
c) 17%
d) 14%
e) 10%
f) 5%

CD4.24
¿En cuánto tiempo un capital de $5 700 se convierte en un monto de $7 000 a una tasa de 15% capitalizable diariamente?

CD4.25
¿Cuánto tiempo debe estar invertido un capital de $2 800, para alcanzar la cantidad de $3 999 incluyendo los intereses y si la tasa es de 8% capitalizable trimestralmente?

CD4.26
¿En cuánto tiempo un capital de $17 000 se convierte en un monto de $19 000 a una tasa de 8% capitalizable bimestralmente?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tasas

CD4.27
El administrador Ramón Mendieta depósito en una institución financiera $600 000 y después de 3 años y 4 meses le entregarán la cantidad de $950 000 ¿Cuál es la tasa de interés bimestral que le dio la institución financiera a su inversión?

CD4.28
Una inversión de $10 000 en 10 años quintuplica su valor. Calcular la tasa anual.

CD4.29
Una inversión de $75 000 a 18 meses alcanzó un monto de $82 354.27. ¿Cuál es la tasa anual?

Tasas equivalentes

CD4.30
¿A qué tasa de interés compuesto mensual producirá el mismo monto, que a un 15% capitalizable trimestralmente?

anera trimestral.

CD4.31
Encontrar la tasa de interés convertible trimestralmente a una equivalente de 21.8% capitalizable de manera mensual.

CD4.32
Encontrar la tasa de interés convertible cuatrimestralmente a una equivalente de 10.8% capitalizable de manera mensual.

CD4.33
Encontrar la tasa de interés convertible bimestralmente a una equivalente de 8% capitalizable en forma mensual.

Tasa efectiva

CD4.34
Encontrar la tasa efectiva que corresponde a una tasa nominal de 22% capitalizable bimestralmente.

CD4.35
Encontrar la tasa efectiva que se paga por un préstamo, a una tasa de interés de 18% anual capitalizable semestralmente.

CD4.36
Encontrar la tasa efectiva que se paga por un préstamo, a una tasa de interés de 12% anual capitalizable trimestralmente.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tasa nominal

CD4.37
Encontrar la tasa nominal bimestral equivalente a una tasa de interés efectivo de 10%.

CD4.38
¿Cuál es la tasa nominal convertible mensualmente equivalente a una tasa de 24% capitalizable trimestralmente?

Ecuación de valor

CD4.39
¿Qué cantidad debe pagarse en un trimestre para saldar una deuda de tres pagos mensuales de $1 000 dada una tasa de 12% capitalizable mensualmente?

CD4.40
La contadora Alma Robles debe pagar $3 000 dentro de 3 meses y $7 400 dentro de 6 meses. Ella acuerda con su acreedor liquidar sus deudas mediante un pago único en el quinto mes a una tasa del 26.7% convertible mensualmente. Calcular el valor del pago único.

CD4.41
Un taller textil solicitará un préstamo de $2 000 0000 dentro de 2 años a pagar en 1 año y otro de $3 500 000 dentro de 4 años. La forma de pago se realiza de la siguiente forma: el día de hoy paga $1 000 000 y posteriormente dos pagos iguales, el primero dentro de 1 año y el segundo a los 3 años con una tasa de interés de 24% capitalizable bimestralmente. ¿Cuál es el importe de cada pago?

CD4.42
Al adquirir un escritorio y tres libreros con valor de $30 000, el doctor Suárez, decide realizar dos pagos de $15 000, uno a los 6 meses y el otro al año. Los pagos se harán más los intereses de 22% anual capitalizable semestralmente. Después de 3 meses decide renegociar la deuda y acuerda pagarla en tres pagos trimestrales: el primero de $9 000, el segundo de $15 000 y el tercero por la diferencia, para este segundo caso se acordó un interés de 24% capitalizable trimestralmente. ¿Cuál es el valor del último pago?

Tiempo equivalente

CD4.43
El contador Salvador Rodríguez tiene que pagar las siguientes obligaciones de $5 000, $10 000 y $20 000 con diferentes fechas de pago de 3, 8 y 10 meses respectivamente. El contador está pensando en realizar un pago único en una fecha determinada, con una tasa del 18% capitalizable mensualmente.

CD4.44
El ingeniero Pedro Morales es un pequeño fabricante de llaveros, que requiere introducir nuevos modelos con el objetivo de aumentar las ventas de su empresa. Él decide contraer una deuda con una institución bancaria de la siguiente forma: $20 000 con vencimiento en 5 meses, $30 000 a 8 meses y $40 000 con vencimiento en 12 meses. Al empresario le interesa realizar un pago único, con una tasa de 24% capitalizable mensualmente. Encontrar el tiempo equivalente.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.45
La compañía Productos agrícolas adeuda al banco $35 000 con vencimiento a 2 meses y $25 000 con vencimiento a 6 meses. La compañía desea liquidar la deuda hoy con un pago único. ¿Cuál es el tiempo equivalente suponiendo un interés de 2% mensual?

CD4.46
¿Cuál es la tasa nominal convertible en forma mensual equivalente a una tasa de 14% capitalizable trimestralmente?

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Respuestas

Problemas a resolver

Frecuencia de conversión

CD4.1
¿Cuál es la frecuencia de conversión de un depósito que paga un interés del 18% capitalizable bimestralmente?

$$P = \frac{1 \text{ año}}{2 \text{ meses}} = \frac{12 \text{ meses}}{2 \text{ meses}} = 6 \text{ periodos de}$$

capitalización bimestral.

CD4.2
¿Cuál es la frecuencia de conversión de un depósito que paga un interés del 7% capitalizable mensualmente?

$$P = \frac{1 \text{ año}}{1 \text{ mes}} = \frac{12 \text{ meses}}{1 \text{ mes}} = 12 \text{ periodos de}$$

capitalización mensual.

Periodo de capitalización

CD4.3
Si la tasa de interés es de 13.8% capitalizable trimestralmente durante 2 años determinar:
a) Frecuencia de capitalización
b) El interés por periodo
c) El número total de periodos de capitalización

a)

$$P = \frac{12 \text{ meses}}{3 \text{ meses}} = 4 \text{ periodos de capitalización}$$

trimestral
b)

$$i = \frac{13.8\%}{4} = 3.45\% \text{ de interés trimestral}$$

c)
$m = (4)\ (2) = 8$ periodos de capitalización trimestral durante 2 años.

CD4.4
Si la tasa de interés es de 15% capitalizable semestralmente durante 3 años determinar:
a) Frecuencia de capitalización
b) El interés por periodo
c) El número total de periodos de capitalización

a)

$$P = \frac{12 \text{ meses}}{6 \text{ meses}} = 2 \text{ periodos de capitalización}$$

semestral
b)

$$i = \frac{15\%}{2} = 7.5\% \text{ interés semestral}$$

c)
$m = (2)\ (3) = 6$ periodos de capitalización semestral durante 3 años.

Monto

CD4.5
¿Qué cantidad de dinero podrá tener Lorena García dentro de 4 años, si invierte $5 800 en Banorte y los intereses que paga son de 1.8% trimestral?

Datos
$C = \$5\ 800$
$n = 4$ años
$np = (4)\ (4) = 16$ trimestres
$T = 1.8\%$ trimestral
Incógnita: M

$$M = 5800\left[1 + 0.018\right]^{16}$$
$$M = 5800\left(1.3303\right)$$
$$M = \$7\ 716$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.6
Encontrar el monto acumulado en 2 años, si el capital es de $3 545 y se invierte a un tipo de interés del:
a) 28% anual capitalizable semestral (ACS)
b) 28% anual capitalizable trimestral (ACT)
c) 28% anual capitalizable mensual (ACM)

a)
Datos
$T = 28\%$ ACS
$n = 2$ años
$np = 2(2) = 4$
Incógnita: M

$$M = C\left[1+\frac{i}{p}\right]^{np}$$
$$M = 3545\left[1+\frac{0.28}{2}\right]^{2(2)}$$
$$M = 3545(1.14)^{4}$$
$$M = 3545(1.6889)$$
$$M = \$5987.36$$

b)
Datos
$C = \$3\ 545$
$T = 28\%$ ACT
$n = 2$ años
$i / p = 0.28 / 4 = 0.7$
$np = 2(4) = 8$

$$M = \left[1+\frac{0.28}{4}\right]^{4(2)}$$
$$M = 3545[1.07]^{8}$$
$$M = 3545(1.7182)$$
$$M = \$6091$$

c)
Datos
$C = \$3\ 545$
$n = 2$ años
$T = 28\%$ ACM
$np = 2(12) = 24$

$$M = \left[1+\frac{0.28}{12}\right]^{12(2)}$$
$$M = 3545[1.023333]^{24}$$
$$M = 3545[1.7394]$$
$$M = \$6166.34$$

Como se puede observar en los tres resultados anteriores, a mayor frecuencia de capitalización e igual tasa anual nominal, mayor será el interés obtenido por la inversión. En el inciso c) la conversión es mensual y tendrá mayor rendimiento que en la conversión trimestral, y la trimestral a su vez tiene mayor rendimiento que la semestral.

CD4.7
Se desea conocer el monto acumulado, cuando el capital es de $18 000, invertido al 18% anual capitalizable bimestralmente; el plazo es de 18 meses.

Datos
$C = \$18\ 000$
$T = 18\%$ ACB
$n = 18$ meses $= 1.5$ años
$np = 6(1.5) = 9$ bimestres
Incógnita: M

$$M = 18000\left[1+\frac{0.18}{6}\right]^{6(1.5)}$$
$$M = 18000(1.03)^{9}$$
$$M = 18000(1.30477)$$
$$M = \$23485.92$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.8
Se invierten $15 500 durante 24 meses a una tasa de 7.56%, para comprar una computadora portátil. ¿Cuál es el valor acumulado?

Datos
C = $15 500
T = 7.56% ACM
n = 24 meses
np = 2(12)
Incógnita: M

$$M = 15500\left[1+\frac{0.0756}{12}\right]^{2(12)}$$
$$M = 15500\left[1.0063\right]^{24}$$
$$M = 15500\left(1.16268\right)$$
$$M = \$18021.50$$

CD4.9
El señor Martínez invirtió $22 000 en Bansur, por un plazo de 4 años, con un interés de 9.7% capitalizable trimestralmente. Después de 2.5 años de inversión la tasa se modificó al 8% convertible mensualmente. Encontrar el monto al final de los 4 años.

a)
Datos
C = $22 000
T = 9.7% ACT
n = 2.5 años
p = 4 trimestres al año
np = (2.5 años) (4 trimestres por año) =10 trimestres
Incógnita: M

$$M_1 = 22000\left[1+\frac{0.097}{4}\right]^{10}$$
$$M_1 = 22000\left[1.02425\right]^{10}$$
$$M_1 = 22000\left(1.2707\right)$$
$$M_1 = \$27956.47$$

b)
Datos
C = $27 956.47
T = 8% ACM
n = 1.5 años
p = 12 meses/año
np = (1.5) (12) = 18 meses
Incógnita: M

$$M_2 = 27956.47\left[1+\frac{0.08}{12}\right]^{18}$$
$$M_2 = 27956.47\left[1.0066667\right]^{18}$$
$$M_2 = 27956.47\left(1.12705\right)$$
$$M_2 = \$31508.28$$

El monto final al cuarto año es de $31 508.28

CD4.10
La bióloga Roxana Hernández obtiene un préstamo bancario por $12 500 a 1 año y con un interés de 22% capitalizable bimestralmente. Ella decide liquidarlo en forma anticipada habiendo transcurrido 6 meses y medio. ¿Cuál es la cantidad que debe pagar?

Datos
C = $12 500
T = 22% ACB
n = 6 meses y medio
6.5 / 2 = 3.25 bimestres
Incógnita: M

$$M = 12500\left[1+\frac{0.22}{6}\right]^{3.25}$$
$$M = 12500\left(1.0366666\right)^{3.25}$$
$$M = 12500\left(1.12416\right)$$
$$M = \$14052$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.11
La socióloga Alondra Rea invierte $19 500 en Banorte a un año y medio a una tasa de interés nominal de 4.5%. ¿Qué cantidad recibe la socióloga Rea al final del plazo?
a) Con capitalización bimestral
b) Con capitalización continua

Si la tasa de interés es de 15% capitalizable semestralmente durante 3 años determinar:
1) Frecuencia de capitalización
2) El interés por periodo
3) El número total de periodos de capitalización

Datos
C = $19 500
T = 4.5% ACB
n = un año y medio
n = 9 bimestres
Incógnita: M

a)

$$M = 19500\left[1+\frac{0.045}{6}\right]^{9}$$

$$M = 19500\left(1.0075\right)^{9}$$

$$M = 19500\left(1.0696\right)$$

$$M = \$20856.44$$

b)

$$M = Ce^{in}$$

$$M = 19500e^{0.0045(1.5)}$$

$$M = 19500e^{0.0675}$$

$$M = 19500\left(1.0698\right)$$

$$M = \$20861.69$$

Si la tasa de interés es de 15% capitalizable semestralmente durante 3 años determinar:

1) Frecuencia de capitalización

$$P = \frac{12 \text{ meses}}{6 \text{ meses}} = 2 \text{ periodos de capitalización}$$

semestral

2) El interés por periodo

$$i = \frac{15\%}{2} = 7.5\% \text{ interés semestral}$$

3) El número total de periodos de capitalización
m = (2) (3) = 6 periodos de capitalización semestral durante 3 años.

Valor presente

CD4.12
¿Cuál es el valor presente de $11 600 invertidos 9 meses antes, a una tasa de 24% capitalizable mensualmente?

Datos
M = $11 600
n = 9 meses
T = 24% ACM
Incógnita: C

$$C = M\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}$$

$$C = 11600\left(1+\frac{0.24}{12}\right)^{-9}$$

$$C = 11600\left(1.02\right)^{-9}$$

$$C = 11600\left(0.8367\right)$$

$$C = \$9706.36$$

El valor a 9 meses antes de $11 600 a esa tasa de interés es de $9 706.36

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.13
¿Cuál es el valor presente de $28 000 invertidos 14 meses antes, a una tasa de 18% capitalizable bimestralmente?

Datos
$M = \$28\,000$
$n = 14$ meses
$T = 18\%$ ACB
Incógnita: C

$$C = M\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}$$

$$C = 28000\left(1+\frac{0.18}{6}\right)^{-7}$$

$$C = 28000\left(1.03\right)^{-7}$$

$$C = 28000\left(0.81309\right)$$

$$C = \$22766.56$$

El valor a 14 meses antes de $28 000 a esa tasa de interés es de $22 766.56

CD4.14
¿Cuánto debe depositar la alumna Alejandra Martínez, si desea tener un monto de , dentro de 3 años a una tasa de interés de 10% anual capitalizable mensualmente para su fiesta de graduación?

Datos
$M = \$14\,600$
$n = 3$ años
$T = 10\%$ ACM
Incógnita: C

$$C = M\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}$$

$$C = 14600\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{-36}$$

$$C = 14600\left(1.0083333\right)^{-36}$$

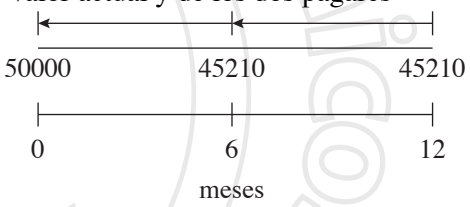
$$C = 14600\left(0.74174\right)$$

$$C = \$10829.40$$

La alumna debe depositar en una institución financiera a esa tasa de interés 3 años antes $10 829.40, para que el día de su graduación tenga la cantidad de $14 600.

CD4.15
El contador Alejandro Herrera desea comprar un automóvil, para ello analiza dos planes de compra. El primero es pagar de contado la cantidad de $125 000, y el segundo es pagar un anticipo de $50 000 y el saldo en dos pagarés de $45 210 cada uno a 6 y 12 meses. Si el contador invirtiera su dinero en un fondo de inversión a una tasa de 8.9% capitalizable mensualmente, ¿cuál de los dos planes le conviene?
Primero se necesita trasladar todas las cantidades al mismo tiempo.

Valor actual y de los dos pagarés



Valor actual de los dos pagarés

$$C_1 = 50000 + 45210\left(1+\frac{0.089}{12}\right)^{-6} + 45210\left(1+\frac{0.089}{12}\right)^{-12}$$

$$C_1 = 50000 + 45210\left(1.00742\right)^{-6} + 45210\left(1.00742\right)^{-12}$$

$$C_1 = 50000 + 45210\left(0.9566\right) + 45210\left(0.9152\right)$$

$$C_1 = \$134623.12$$

Le conviene aceptar la primera propuesta, ya que tiene un ahorro de $9 623.12 si compra ahora el automóvil.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.16
Calcular el valor actual de $69 572, pagaderos a un año 8 meses, a una tasa de 24% capitalizable cada tres meses.

Datos
M = $69 572
n = 1 año 8 meses = 6.6667 trimestres
T = 24% / 4 = 6% trimestral
i = 0.06 trimestral

Número de trimestres:
1 trimestre 3 meses
X 20 meses
$X = 20 / 3 = 6.6667$ trimestres

Incógnita: C

$$C = M\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}$$

$$C = 69572\left(1+0.06\right)^{-6.6667}$$

$$C = 69572\left(0.6781\right)$$

$$C = \$47176.82$$

CD4.17
Calcular el valor actual de $25 840, pagaderos a 1 año 8 meses, a una tasa de 20% capitalizable cada 3 meses.

Datos
M = $25 840
n = 1 año 8 meses = 6.6667 trimestres
T = 20% / 4 = 5% trimestral
i = 0.06 trimestral

Número de trimestres:
1 trimestre 3 meses
X 20 meses
$X = 20 / 3 = 6.6667$ trimestres

Incógnita: C

$$C = M\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}$$

$$C = 25840\left(1+0.05\right)^{-6.6667}$$

$$C = 25840\left(0.7223\right)$$

$$C = \$18665.11$$

CD4.18
Calcular el valor actual de $45 000, pagaderos a 8 meses y 13 días, a una tasa de 24.6% capitalizable mensualmente.

Datos
M =$45 000
n = 8 meses 13 días
T = 24.6 % ACM

1 mes 30 días
X 13 días
$X = 13 / 30 = 0.4333$ meses
n = 8 meses + 0.4333 de mes = 8.433 meses

Incógnita: C

$$C = 45000\left(1+\frac{0.246}{12}\right)^{-8.4333}$$

$$C = 45000\left(1+0.0205\right)^{-8.4333}$$

$$C = 45000\left(0.8427\right)$$

$$C = \$37921.85$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.19
La señora Amanda García firma un pagaré por la cantidad de $11 349, a plazo de 1 año, con una tasa de interés del 1.5% mensual. La señora García está pensando en descontar el documento 5 meses antes de su vencimiento, con una tasa de 18% con capitalización mensual. ¿Cuál es el valor actual del documento a los 5 meses?
Calcular el valor de vencimiento del pagaré.

Datos
C = $11 349
T = 1.5% mensual
n = un año
Incógnita: M

$$M = C(1+i)^n$$
$$M = 11349(1.015)^{12}$$
$$M = 11349(1.19562)$$
$$M = 13569.09$$

Conociendo el monto, se encuentra el valor actual a la fecha pensada.
M = $13 569.09
T = 18% ACM
n = 5 meses
Incógnita: C

$$C = M\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}$$
$$C = 13569.09\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{-5}$$
$$C = 13569.09(1.015)^{-5}$$
$$C = 13569.09(0.9282603)$$
$$C = \$12595.65$$

Descuento compuesto = 13 569.09 – 12 595.65
= $973.44

Tiempo

CD4.20
¿En cuánto tiempo un capital de $700 se convierte en un monto de $1 000 a una tasa de 8% capitalizable bimestralmente?

Datos
C = $700
M = $1 000
T = 8% ACB
Incógnita: n

$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{p\left[\log\left(1+\frac{i}{p}\right)\right]}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{1\,000}{700}\right)}{6\left[\log\left(1+\frac{0.08}{6}\right)\right]}$$
$$n = \frac{\log(1.428571)}{6\left[\log(1.013333)\right]}$$

$$n = \frac{0.154902}{6(0.00575233)}$$
$$n = \frac{0.154902}{0.034514}$$
$$n = 4.488094$$
n = 4 años, 5 meses y 26 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.21
Un capital de $19 870 produce intereses a una tasa de 24% capitalizable cada mes. ¿En cuánto tiempo la inversión llegará a $21 873.15?

Datos
$C = \$19\,870$
$M = \$21\,873.15$
$T = 24\%$ ACM
Incógnita: n

$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{p\left[\log\left(1+\frac{i}{p}\right)\right]}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{21\,873.15}{19\,870}\right)}{12\left[\log\left(1+\frac{0.24}{12}\right)\right]}$$

$$n = \frac{\log(1.100813)}{12\left[\log(1.020)\right]}$$

$$n = \frac{0.0917135}{12(0.0086)}$$

$$n = \frac{0.0417135}{0.1032}$$

$$n = 0.404192$$

$n = 4$ meses y 26 días

CD4.22
¿En cuánto tiempo se triplica un capital que se invierte al 23% capitalizable mensualmente?

Datos
$T = 23\%$ ACM
$p = 12$
$M = 3C$
Incógnita: n

$$M = C\left(1+\frac{i}{p}\right)^{np}$$

$$3C = C\left(1+\frac{0.23}{12}\right)^{n(12)}$$

$$3 = (1.0191666)^{n(12)}$$

$$\log(3) = 12\,n\log(1.0191666)$$

$$n = \frac{\log(3)}{(12)\left[\log(1.0191666)\right]}$$

$$n = \frac{0.477121}{12(0.0082452)}$$

$$n = \frac{0.477121}{0.098943}$$

$$n = 4.82222$$

$n = 4$ años, 9 meses y 26 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.23

¿En cuánto tiempo reduce un peso su valor adquisitivo a la mitad si se tiene una inflación del:

a) 50% b) 30%
c) 17% d) 14%
e) 10% f) 5%

a)
$M = \$1$
$C = \$0.5$
$p =$ uno
$T = 50\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{p\left[\log\left(1+\frac{i}{p}\right)\right]} = \frac{\log\left(\frac{1}{0.50}\right)}{(1)\left[\log(1.5)\right]} = 1.709511$$

$n =$ un año, 8 meses y 15 días

b)
$M = \$1$
$C = \$0.50$
$p =$ uno
$T = 30\%$ anual

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{0.5}\right)}{(1)\left[\log(1.3)\right]} = 2.641926$$

$n = 2$ años, 7 meses y 21 días

c)
$M = \$1$
$C = \$0.50$
$p =$ uno
$T = 17\%$ anual

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{0.5}\right)}{(1)\left[\log(1.17)\right]} = 4.414844$$

$n = 4$ años, 4 meses y 29 días

d)
$M = \$1$
$C = \$0.50$
$p =$ uno
$T = 14\%$ anual

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{0.5}\right)}{(1)\left[\log(1.14)\right]} = 5.29005$$

$n = 5$ años, 3 meses y 14 días

e)
$M = \$1$
$C = \$0.50$
$p =$ uno
$T = 10\%$ anual

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{0.5}\right)}{(1)\left[\log(1.10)\right]} = 7.27254$$

$n = 7$ años, 3 meses y 8 días

f)
$M = \$1$
$C = \$0.50$
$p =$ uno
$T = 5\%$ anual

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{0.5}\right)}{(1)\left[\log(1.05)\right]} = \frac{\log(2)}{\log(1.05)} = 14.2066$$

$n = 14$ años, 2 meses y 14 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.24
¿En cuánto tiempo un capital de $5 700 se convierte en un monto de $7 000 a una tasa de 15% capitalizable diariamente?

Datos
$C = \$5\,700$
$M = \$7\,000$
$T = 15\%$ AC diariamente
Incógnita: n

$$n = \frac{\log\left(\frac{7\,000}{5\,700}\right)}{360\left[\log\left(1+\frac{0.15}{360}\right)\right]}$$

$$n = \frac{\log(1.2280702)}{360\left[\log(1.00041667)\right]}$$

$$n = \frac{0.089223}{360\,(0.00018092)}$$

$$n = \frac{0.089223}{0.0651306} = 1.369912$$

$n = 1$ años, 4 meses y 13 días

CD4.25
¿Cuánto tiempo debe estar invertido un capital de $2 800, para alcanzar la cantidad de $3 999 incluyendo los intereses y si la tasa es de 8% capitalizable trimestralmente?

Datos
$C = \$2\,800$
$M = \$3\,999$
$T = 8\%$ ACT
Incógnita: n

$$n = \frac{\log\left(\frac{3\,999}{2\,800}\right)}{4\left[\log\left(1+\frac{0.08}{4}\right)\right]}$$

$$n = \frac{\log(1.42821428)}{4\left[\log(1.02)\right]}$$

$$n = \frac{0.1547934}{4\,(0.0086)}$$

$$n = \frac{0.1547934}{0.0344} = 4.4998$$

$n = 4$ años, 6 meses

CD4.26
¿En cuánto tiempo un capital de $17 000 se convierte en un monto de $19 000 a una tasa de 8% capitalizable bimestralmente?

Datos
$C = \$17\,000$
$M = \$19\,000$
$n = 8\%$ ACB
Incógnita: n
Desarrollo

$$n = \frac{\log\left(\frac{19\,000}{17\,000}\right)}{6\left[\log\left(1+\frac{0.08}{6}\right)\right]}$$

$$n = \frac{\log(1.117647)}{6\left[\log(1.013333)\right]}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.26 cont.

$$n = \frac{0.0483047}{6\left(0.00575233\right)}$$

$$n = \frac{0.0483047}{0.034514} = 1.39957$$

$n = 1$ año, 4 meses y 24 días

Tasas

CD4.27
El administrador Ramón Mendieta depósito en una institución financiera $600 000 y después de 3 años y 4 meses le entregarán la cantidad de $950 000 ¿Cuál es la tasa de interés bimestral que le dio la institución financiera a su inversión?

Datos
$C = \$600\,000$
$M = \$950\,000$
$n = 3$ años y 4 meses
$n = 20$ bimestres
Incógnita: i

$$i = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}}\right] - 1$$

$$i = \left[\sqrt[20]{\frac{950\,000}{600\,000}}\right] - 1$$

$$i = \left[\sqrt[20]{1.583333}\right] - 1$$

$$i = \left(1.58333\right)^{1/20} - 1$$

$$i = 1.023243 - 1$$

$$i = 0.023243$$

$T = 2.3243\,\%$ bimestral

CD4.28
Una inversión de $10 000 en 10 años quintuplica su valor. Calcular la tasa anual.

Datos
$C = \$10\,000$
$M = \$50\,000$
$n = 10$ años
Incógnita: i

$$i = \left[\sqrt[10]{\frac{50\,000}{10\,000}}\right] - 1$$

$$i = \left[\sqrt[10]{5}\right] - 1$$

$$i = \left(5\right)^{1/10} - 1$$

$$i = \left(5\right)^{0.1} - 1$$

$$i = 1.17462 - 1$$

$i = 0.17462$ anual

$T = 17.462\,\%$ anual

CD4.29
Una inversión de $75 000 a 18 meses alcanzó un monto de $82 354.27. ¿Cuál es la tasa anual?

Datos
$C = \$75\,000$
$M = \$82\,354.27$
$n = 18$ meses
Incógnita: i

$$i = \left[\sqrt[18]{\frac{82\,354.27}{75\,000}}\right] - 1$$

$$i = \left[\sqrt[18]{1.0980569}\right] - 1$$

$$i = \left(1.0980569\right)^{1/18} - 1$$

$$i = 1.0052103 - 1$$

$i = 0.0052103$ mensual

$T = 0.521\,\%$ mensual

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tasas equivalentes

CD4.30
¿A qué tasa de interés compuesto mensual producirá el mismo monto, que a un 15% capitalizable trimestralmente?

Solución:

Monto acumulado a un año $M_1 = C\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}$

tasa capitalizable mensualmente.

Monto acumulado en un año al 15% anual capitalizable en forma trimestral.

$$M_2 = C\left(1+\frac{0.15}{4}\right)^{4}$$

Igualando los montos:

$$M_1 = M_2$$

$$C\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12} = C\left(1+\frac{0.15}{4}\right)^{4}$$

$$\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12} = \left(1+\frac{0.15}{4}\right)^{4}$$

$$\sqrt[12]{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}} = \sqrt[12]{(1.0375)^4}$$

$$1+\frac{i}{12} = (1.0375)^{4/12}$$

$$\frac{i}{12} = \left[(1.0375)^{1/3}\right]-1$$

$$i = 12\,(1.0123469-1)$$

$$i = 12\,(0.0123469)$$

$i = 0.14816$ anual convertible mensualmente

La tasa de 14.816% anual convertible mensualmente es equivalente a la tasa de 15% anual convertible de manera trimestral.

CD4.31
Encontrar la tasa de interés convertible trimestralmente a una equivalente de 21.8% capitalizable de manera mensual.

Solución:
Monto acumulado al 21.8% convertible mensualmente $M_1 = C\left(1+\frac{0.218}{12}\right)^{12}$

Monto acumulado a una tasa convertible trimestralmente $M_2 = C\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4}$

Igualando los montos:

$$M_1 = M_2$$

$$C\left(1+\frac{0.218}{12}\right)^{12} = C\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4}$$

$$\sqrt[4]{\left(1+\frac{0.218}{12}\right)^{12}} = \sqrt[4]{(1+0.25i)^4}$$

$$\left(1+\frac{0.218}{12}\right)^{3} = 1+0.25i$$

$$(1.0181666)^3 - 1 = 0.25i$$

$$i = (1.055496-1)/0.25$$

$$i = (0.055496)/0.25$$

$i = 0.22198$ anual convertible trimestralmente

La tasa de 21.8% anual capitalizable mensualmente es equivalente a la tasa de 22.198% anual capitalizable en forma trimestral.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.32
Encontrar la tasa de interés convertible cuatrimestralmente a una equivalente de 10.8% capitalizable de manera mensual.
Solución:
Monto acumulado al 10.8 % convertible mensualmente $M_1 = C\left(1+\frac{0.108}{12}\right)^{12}$

Monto acumulado a una tasa convertible trimestralmente $M_2 = C\left(1+\frac{i}{3}\right)^{3}$

Igualando los montos:

$$M_1 = M_2$$
$$C\left(1+\frac{0.108}{12}\right)^{12} = C\left(1+\frac{i}{3}\right)^{3}$$
$$\sqrt[3]{\left(1+\frac{0.108}{12}\right)^{12}} = \sqrt[3]{(1+0.333i)^{3}}$$
$$\left(1+\frac{0.108}{12}\right)^{4} = 1+0.3333i$$
$$(1.009)^{4} - 1 = 0.3333i$$
$$i = (1.0364889 - 1)/0.3333$$
$$i = (0.0364889)/0.3333$$

$i = 0.10947$ anual convertible cuatrimestralmente

La tasa de 10.8% anual capitalizable mensualmente es equivalente a la tasa de 10.947% anual capitalizable en forma cuatrimestral.

CD4.33
Encontrar la tasa de interés convertible bimestralmente a una equivalente de 8% capitalizable en forma mensual.

Monto acumulado al 10.8 % convertible mensualmente $M_1 = C\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12}$

Monto acumulado a una tasa convertible de manera bimestral $M_2 = C\left(1+\frac{i}{6}\right)^{6}$

Igualando los montos:

$$M_1 = M_2$$
$$C\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12} = C\left(1+\frac{i}{6}\right)^{6}$$
$$\sqrt[6]{\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12}} = \sqrt[6]{(1+0.16667i)^{6}}$$
$$\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{2} = 1+0.1.6667i$$
$$(1.006667)^{2} - 1 = 0.16667i$$
$$i = (1.01338 - 1)/0.16667$$
$$i = (0.033778)/0.16667$$

$i = 0.080267$ anual convertible bimestralmente

La tasa de 8% anual capitalizable mensualmente es equivalente a la tasa de 8.0267% anual capitalizable en forma bimestral.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tasa efectiva

CD4.34
Encontrar la tasa efectiva que corresponde a una tasa nominal de 22% capitalizable bimestralmente.

Datos
$T = 22\%$ ACB

$$e = \left[1 + \frac{0.22}{6}\right]^{6} - 1$$
$$e = (1.03667)^{6} - 1$$
$$e = 1.2412 - 1$$
$$e = 0.2412$$
$$e = 24.12\% \text{ anual}$$

Es lo mismo invertir al 22% capitalizable bimestralmente que al 24.12% con capitalización anual.

CD4.35
Encontrar la tasa efectiva que se paga por un préstamo, a una tasa de interés de 18% anual capitalizable semestralmente.

Datos:
$T = 18\%$ ACS

$$e = \left[1 + \frac{0.18}{2}\right]^{2} - 1$$
$$e = (1.09)^{2} - 1$$
$$e = 1.1881 - 1$$
$$e = 0.1881$$
$$e = 18.81\% \text{ anual}$$

Es lo mismo invertir al 18% compuesto semestralmente que al 18.81% con capitalización anual.

CD4.36
Encontrar la tasa efectiva que se paga por un préstamo, a una tasa de interés de 12% anual capitalizable trimestralmente.

Datos:
$T = 12\%$ ACT

$$e = \left[1 + \frac{0.12}{4}\right]^{4} - 1$$
$$e = (1.03)^{4} - 1$$
$$e = 1.1255 - 1$$
$$e = 0.1255$$
$$e = 12.55\% \text{ anual}$$

Es lo mismo invertir al 12% compuesto trimestralmente que al 12.55% con capitalización anual.

Tasa nominal

CD4.37
Encontrar la tasa nominal bimestral equivalente a una tasa de interés efectivo de 10%.

Datos:
$e = 10\%$
$p = 6$

$$i = 6\left[(0.10 + 1)^{1/6} - 1\right]$$
$$i = 6\left[(1.10)^{0.1666} - 1\right]$$
$$i = 6\left[1.016012 - 1\right]$$
$$i = 0.096$$
$$T = 9.6\%$$

El 9.6% compuesto bimestralmente es equivalente al 10% de interés efectivo.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.38
¿Cuál es la tasa nominal convertible mensualmente equivalente a una tasa de 24% capitalizable trimestralmente?

$$\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}=\left(1+\frac{0.24}{4}\right)^{4}$$

$$1+\frac{i}{12}=(1.06)^{4/12}$$

$$i=12\left[(1.06)^{4/12}-1\right]$$

$$i=12\left[(1.06)^{0.3333}-1\right]$$

$$i=12\,(0.01961)$$

$$i=0.2353$$

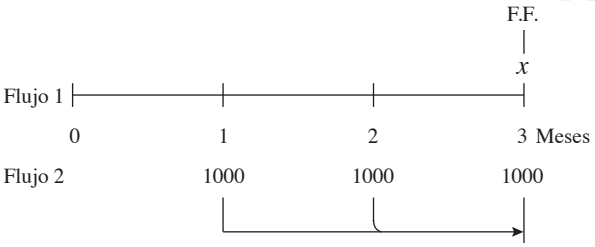
$$i=23.53\%$$

Ecuación de valor

CD4.39
¿Qué cantidad debe pagarse en un trimestre para saldar una deuda de tres pagos mensuales de $1 000 dada una tasa de 12% capitalizable mensualmente?

a)
$T=12\%$ ACM
3 pagos de $1 000
Fecha focal: pagar dentro de 3 meses

$$M=C(1+i)^{n}$$



$i=0.01$ mensual

Flujo 1 = flujo 2

$$x=(1\,000+I_1)+(1\,000+I_2)+(1\,000+I_3)$$

$$x=1\,000(1.01)^{2}+1\,000(1.01)^{1}+1\,000(1.01)^{0}$$

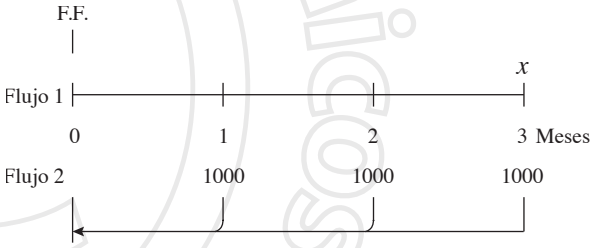
$$x=1\,000\,(1.0201)+1\,000\,(1.01)+1\,000$$

$$x=1\,020.10+1\,010+1\,000$$

$$x=\$3\,030.10$$

b) Tomando la fecha focal el día de hoy.

$$C=M(1+i)^{-n}$$



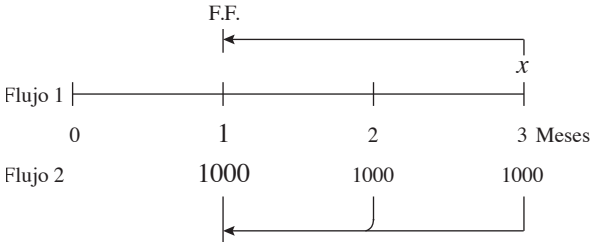
Flujo 1 = flujo 2

$$x(1+0.01)^{-3}=1\,000(1.01)^{-1}+1\,000\,(1.01)^{-2}+1\,000\,(1.01)^{-3}$$

$$x=\frac{1\,000(1.01)^{-1}+1\,000\,(1.01)^{-2}+1\,000\,(1.01)^{-3}}{(1+0.01)^{-3}}$$

$$x=\$3\,030.10$$

c) Considerando la fecha focal en el primer mes.



D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.39 cont.

$$\text{Flujo 1} = \text{Flujo 2}$$

$$x(1+0.01)^{-2} = 1\,000(1.01)^{0} + 1\,000(1.01)^{-1} + 1\,000(1.01)^{-2}$$

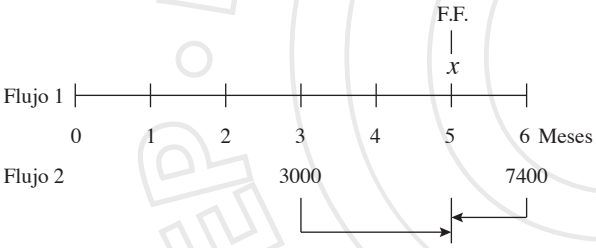
$$x = \frac{1\,000(1.01)^{0} + 1\,000(1.01)^{-1} + 1\,000(1.01)^{-2}}{(1+0.01)^{-2}}$$

$$x = \$3\,030.10$$

CD4.40

La contadora Alma Robles debe pagar $3 000 dentro de 3 meses y $7 400 dentro de 6 meses. Ella acuerda con su acreedor liquidar sus deudas mediante un pago único en el quinto mes a una tasa del 26.7% convertible mensualmente. Calcular el valor del pago único.

$T = 26.7\%$ ACM
Fecha focal: quinto mes.



$$\text{Flujo 1} = \text{flujo 2}$$

$$x = 3\,000(1.02225)^{2} + 7\,400(1.02225)^{-1}$$

$$x = 3\,000(1.0449) + 7\,400(0.9782)$$

$$x = 3\,134.98 + 7\,238.93$$

$$x = \$10\,373.91$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

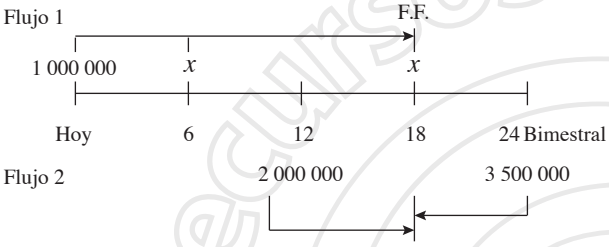
CD4.41

Un taller textil solicitará un préstamo de $2 000 0000 dentro de 2 años a pagar en 1 año y otro de $3 500 000 dentro de 4 años. La forma de pago se realiza de la siguiente forma: el día de hoy paga $1 000 000 y posteriormente dos pagos iguales, el primero dentro de 1 año y el segundo a los 3 años con una tasa de interés de 24% capitalizable bimestralmente. ¿Cuál es el importe de cada pago?

Solución:

$T = 24\%$ ACB

Fecha focal al tercer año



$$1\,000\,000(1.04)^{18} + x(1.04)^{12} + x(1.04)^{0} = 2\,000\,000(1.04)^{6} + 3\,500\,000(1.04)^{-6}$$

$$1\,000\,000(2.02582) + x(1.60103) + x = 2\,000\,000(1.26532) + 3\,500\,000(0.79031)$$

$$2025\,816.52 + x(2.60103) = 2\,530\,640 + 2\,766\,085$$

$$x(2.60103) = 5\,296\,725 - 2\,025\,816.52$$

$$x = \frac{3\,270\,908.48}{2.60103}$$

$$x = \$1\,257\,543.54$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

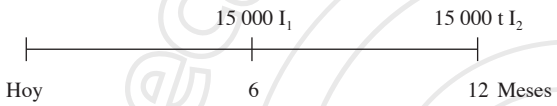
CD4.42

Al adquirir un escritorio y tres libreros con valor de $30 000, el doctor Suárez, decide realizar dos pagos de $15 000, uno a los 6 meses y el otro al año. Los pagos se harán más los intereses de 22% anual capitalizable semestralmente. Después de 3 meses decide renegociar la deuda y acuerda pagarla en tres pagos trimestrales: el primero de $9 000, el segundo de $15 000 y el tercero por la diferencia, para este segundo caso se acordó un interés de 24% capitalizable trimestralmente. ¿Cuál es el valor del último pago?

Solución:

T_1= 22% ACS
T_2 = 24% ACT
Fecha focal: 9 meses

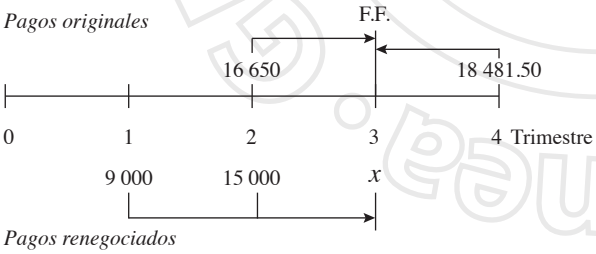
Flujo 1



Flujo 2

Los pagos originales serían a los 6 meses de:
15 000(1+0.11) = $16 650
y a los 12 meses de:
15 000(1+0.11)^2 = $18 481.50

Al renegociar la deuda, ésta queda como se muestra en el diagrama siguiente.



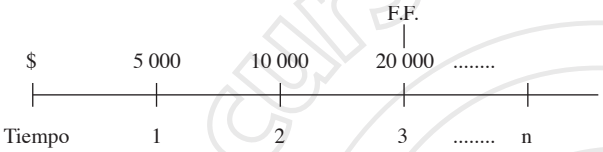
$$9\,000(1.06)^2+15\,000(1.06)^1+x=16\,650(1.06)^1+18\,481.5(1.06)^{-1}$$
$$10\,112.40+15\,900+x=17\,649+17\,435.37$$
$$26\,012.40+x=35\,084.38$$
$$x=35\,084.38-26\,012.40$$
$$x=\$9\,071.98$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tiempo equivalente

CD4.43
El contador Salvador Rodríguez tiene que pagar las siguientes obligaciones de $5 000, $10 000 y $20 000 con diferentes fechas de pago de 3, 8 y 10 meses respectivamente. El contador está pensando en realizar un pago único en una fecha determinada, con una tasa del 18% capitalizable mensualmente.

Solución:
El pago único se determina a través del cálculo del tiempo equivalente. Para tener una idea más clara se gráfica el problema, colocando los pagos en sus respectivas fechas de vencimiento y se ubica la fecha focal.



La fecha focal se determina en forma lógica, para este ejemplo se ubica en el décimo mes, ya que en éste, se cancelarán todas las obligaciones.

El pago único es de 5 000 + 10 000 + 20 000 = $35 000.00

El tiempo entre el pago de $35 000 y la fecha focal en n, se obtiene planteando la siguiente ecuación de tiempo equivalente:

$$5\,000(1.015)^{7} + 10\,000(1.015)^{2} + 20\,000 = 35\,000(1.015)^{n}$$

$$35\,851.4746 = 35\,000\,(1.015)^{n}$$

$$\frac{35\,851.4746}{35\,000} = (1.015)^{n}$$

$$(1.015)^{n} = 1.024327845$$

$$n\log(1.015) = \log(1.024327845)$$

$$n\,(0.006466042) = 0.010438978$$

$$n = \frac{0.010438978}{0.006466042}$$

$$n = 1.614431 \text{ meses}$$

Entonces existen 1.614431 periodos mensuales antes de la fecha focal, es el tiempo equivalente para el pago único:

Fecha pago único = (9 meses 30 días) – (1 mes 18 días) = 8 meses y 12 días

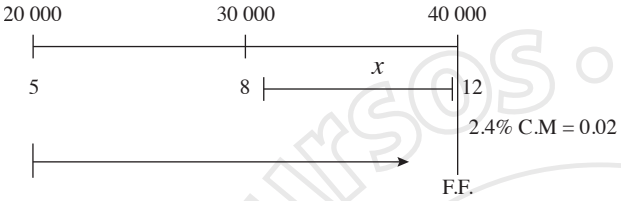
El único pago será de $35 000, y se pagará dentro de 8 meses y 12 días.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.44

El ingeniero Pedro Morales es un pequeño fabricante de llaveros, que requiere introducir nuevos modelos con el objetivo de aumentar las ventas de su empresa. Él decide contraer una deuda con una institución bancaria de la siguiente forma: $20 000 con vencimiento en 5 meses, $30 000 a 8 meses y $40 000 con vencimiento en 12 meses. Al empresario le interesa realizar un pago único, con una tasa de 24% capitalizable mensualmente. Encontrar el tiempo equivalente.

Solución:



$$20\,000(1.02)^7 + 30\,000(1.02)^4 + 40\,000 = 90\,000(1.02)^n$$

$$95\,446.6782 = 90\,000\,(1.02)^n$$

$$\frac{95\,446.6782}{90\,000} = (1.02)^n$$

$$(1.02)^n = 1.06051864$$

$$n\log(1.02) = \log(1.06051864)$$

$$n\,(0.008600171) = 0.025518306$$

$$n = \frac{0.025518306}{0.008600171}$$

$$n = 2.967185$$

$$n = 2 \text{ meses y } 29 \text{ días}$$

Entonces existen 2.967185 periodos mensuales antes de la fecha focal, que es el tiempo equivalente para el único pago:

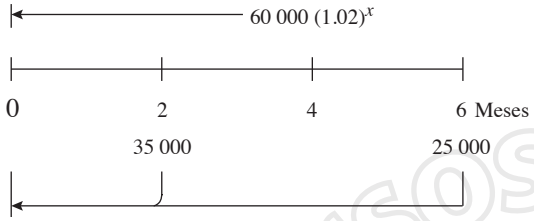
Fecha pago único = (11 meses 30 días) – (2 mes 29 días) = 9 meses y 1 día

El único pago es de $90 000 y deberá pagarse dentro de 9 meses y 1 día.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.45

La compañía Productos agrícolas adeuda al banco $35 000 con vencimiento a 2 meses y $25 000 con vencimiento a 6 meses. La compañía desea liquidar la deuda hoy con un pago único. ¿Cuál es el tiempo equivalente suponiendo un interés de 2% mensual?



$$60\,000(1.02)^n = 35\,000(1.02)^{-2} + 25\,000\,(1.02)^{-6}$$
$$60\,000(1.02)^n = 33\,640.91 + 22\,199.285$$
$$60\,000(1.02)^n = 55\,840.195$$
$$60\,000(1.02)^n = 35\,000(1.02)^{-2} + 25\,000\,(1.02)^{-6}$$
$$60\,000(1.02)^n = 33\,640.91 + 22\,199.285$$
$$60\,000(1.02)^n = 55\,840.195$$
$$(1.02)^n = \frac{55\,840.195}{60000}$$
$$n = \frac{\log(0.9306699)}{\log(1.02)}$$
$$n = \frac{-0.0312043}{0.0086002}$$
$$n = -3.62832259$$
$$n = 3 \text{ meses y } 19 \text{ días}$$

La compañía debe liquidar sus préstamos con un pago único de $60 000 dentro de 3 meses y 19 días.
La tasa nominal del 23.53% convertible mensualmente es equivalente a una tasa de 24% capitalizable en forma trimestral.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.46

¿Cuál es la tasa nominal convertible en forma mensual equivalente a una tasa de 14% capitalizable trimestralmente?

$$\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}=\left(1+\frac{0.14}{4}\right)^{4}$$

$$1+\frac{i}{12}=(1.035)^{4/12}$$

$$i=12\left[(1.035)^{4/12}-1\right]$$

$$i=12[1.011533-1]$$

$$i=12\,(0.011533)$$

$$i=0.1384$$

$$i=13.84\%$$

La tasa nominal del 13.84% convertible en forma mensual es equivalente a una tasa de 14% capitalizable trimestralmente.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

GLOSARIO

Actualizar, Al conocer el monto se desea saber el capital que es necesario invertir ahora, a una tasa de interés determinada, durante un plazo definido (ir del futuro al presente).

Capitalizar, Es cuando se agrega el interés al capital al final de un determinado periodo (ir del presente al futuro).

Frecuencia de capitalización de intereses. Periodo en el que se van a producir nuevos intereses (mes, bimestre, trimestre, semestre, etc.). A mayor frecuencia de capitalización mensual (12) bimestral (6) en un año, se obtienen más intereses.

Interés compuesto. Es el capital al que se le acumulan los intereses devengados al final del periodo. Este capital da origen a uno nuevo sobre el que se generan nuevos intereses.

Liquidez, Característica de ciertos activos que son fácilmente convertibles en efectivo, como son los depósitos bancarios a la vista, activos financieros que pueden ser vendidos al instante.

Periodo de capitalización. Es un intervalo regular de tiempo en el que se generan intereses, los cuales se le agregan al capital al final del periodo.

Tasa efectiva. Es la tasa de interés simple que da el mismo rendimiento en un año que una tasa compuesta.

Tasa nominal. Es la tasa de interés anual, sin tomar la capitalización.

Valor actual o presente. Es el capital que es necesario invertir ahora, a una tasa de interés determinada, para llegar a tener un monto al final de un periodo dado.

Recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Respuestas

Problemas a resolver

Frecuencia de conversión

CD4.1
¿Cuál es la frecuencia de conversión de un depósito que paga un interés del 18% capitalizable bimestralmente?

$$P = \frac{1 \text{ año}}{2 \text{ meses}} = \frac{12 \text{ meses}}{2 \text{ meses}} = 6 \text{ periodos de}$$

capitalización bimestral.

CD4.2
¿Cuál es la frecuencia de conversión de un depósito que paga un interés del 7% capitalizable mensualmente?

$$P = \frac{1 \text{ año}}{1 \text{ mes}} = \frac{12 \text{ meses}}{1 \text{ mes}} = 12 \text{ periodos de}$$

capitalización mensual.

Periodo de capitalización

CD4.3
Si la tasa de interés es de 13.8% capitalizable trimestralmente durante 2 años determinar:
a) Frecuencia de capitalización
b) El interés por periodo
c) El número total de periodos de capitalización

a)

$$P = \frac{12 \text{ meses}}{3 \text{ meses}} = 4 \text{ periodos de capitalización}$$

trimestral
b)

$$i = \frac{13.8\%}{4} = 3.45\% \text{ de interés trimestral}$$

c)
$m = (4)\ (2) = 8$ periodos de capitalización trimestral durante 2 años.

CD4.4
Si la tasa de interés es de 15% capitalizable semestralmente durante 3 años determinar:
a) Frecuencia de capitalización
b) El interés por periodo
c) El número total de periodos de capitalización

a)

$$P = \frac{12 \text{ meses}}{6 \text{ meses}} = 2 \text{ periodos de capitalización}$$

semestral
b)

$$i = \frac{15\%}{2} = 7.5\% \text{ interés semestral}$$

c)
$m = (2)\ (3) = 6$ periodos de capitalización semestral durante 3 años.

Monto

CD4.5
¿Qué cantidad de dinero podrá tener Lorena García dentro de 4 años, si invierte $5 800 en Banorte y los intereses que paga son de 1.8% trimestral?

Datos
$C = \$5\ 800$
$n = 4$ años
$np = (4)\ (4) = 16$ trimestres
$T = 1.8\%$ trimestral
Incógnita: M

$$M = 5800\left[1 + 0.018\right]^{16}$$
$$M = 5800\left(1.3303\right)$$
$$M = \$7\ 716$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.6
Encontrar el monto acumulado en 2 años, si el capital es de $3 545 y se invierte a un tipo de interés del:
a) 28% anual capitalizable semestral (ACS)
b) 28% anual capitalizable trimestral (ACT)
c) 28% anual capitalizable mensual (ACM)

a)
Datos
$T = 28\%$ ACS
$n = 2$ años
$np = 2(2) = 4$
Incógnita: M

$$M = C\left[1+\frac{i}{p}\right]^{np}$$
$$M = 3545\left[1+\frac{0.28}{2}\right]^{2(2)}$$
$$M = 3545(1.14)^{4}$$
$$M = 3545(1.6889)$$
$$M = \$5987.36$$

b)
Datos
$C = \$3\ 545$
$T = 28\%$ ACT
$n = 2$ años
$i / p = 0.28 / 4 = 0.7$
$np = 2(4) = 8$

$$M = \left[1+\frac{0.28}{4}\right]^{4(2)}$$
$$M = 3545[1.07]^{8}$$
$$M = 3545(1.7182)$$
$$M = \$6091$$

c)
Datos
$C = \$3\ 545$
$n = 2$ años
$T = 28\%$ ACM
$np = 2(12) = 24$

$$M = \left[1+\frac{0.28}{12}\right]^{12(2)}$$
$$M = 3545[1.023333]^{24}$$
$$M = 3545[1.7394]$$
$$M = \$6166.34$$

Como se puede observar en los tres resultados anteriores, a mayor frecuencia de capitalización e igual tasa anual nominal, mayor será el interés obtenido por la inversión. En el inciso c) la conversión es mensual y tendrá mayor rendimiento que en la conversión trimestral, y la trimestral a su vez tiene mayor rendimiento que la semestral.

CD4.7
Se desea conocer el monto acumulado, cuando el capital es de $18 000, invertido al 18% anual capitalizable bimestralmente; el plazo es de 18 meses.

Datos
$C = \$18\ 000$
$T = 18\%$ ACB
$n = 18$ meses $= 1.5$ años
$np = 6(1.5) = 9$ bimestres
Incógnita: M

$$M = 18000\left[1+\frac{0.18}{6}\right]^{6(1.5)}$$
$$M = 18000(1.03)^{9}$$
$$M = 18000(1.30477)$$
$$M = \$23485.92$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.8
Se invierten $15 500 durante 24 meses a una tasa de 7.56%, para comprar una computadora portátil. ¿Cuál es el valor acumulado?

Datos
C = $15 500
T = 7.56% ACM
n = 24 meses
np = 2(12)
Incógnita: M

$$M = 15500\left[1+\frac{0.0756}{12}\right]^{2(12)}$$
$$M = 15500\left[1.0063\right]^{24}$$
$$M = 15500\left(1.16268\right)$$
$$M = \$18021.50$$

CD4.9
El señor Martínez invirtió $22 000 en Bansur, por un plazo de 4 años, con un interés de 9.7% capitalizable trimestralmente. Después de 2.5 años de inversión la tasa se modificó al 8% convertible mensualmente. Encontrar el monto al final de los 4 años.

a)
Datos
C = $22 000
T = 9.7% ACT
n = 2.5 años
p = 4 trimestres al año
np = (2.5 años) (4 trimestres por año) =10 trimestres
Incógnita: M

$$M_1 = 22000\left[1+\frac{0.097}{4}\right]^{10}$$
$$M_1 = 22000\left[1.02425\right]^{10}$$
$$M_1 = 22000\left(1.2707\right)$$
$$M_1 = \$27956.47$$

b)
Datos
C = $27 956.47
T = 8% ACM
n = 1.5 años
p = 12 meses/año
np = (1.5) (12) = 18 meses
Incógnita: M

$$M_2 = 27956.47\left[1+\frac{0.08}{12}\right]^{18}$$
$$M_2 = 27956.47\left[1.0066667\right]^{18}$$
$$M_2 = 27956.47\left(1.12705\right)$$
$$M_2 = \$31508.28$$

El monto final al cuarto año es de $31 508.28

CD4.10
La bióloga Roxana Hernández obtiene un préstamo bancario por $12 500 a 1 año y con un interés de 22% capitalizable bimestralmente. Ella decide liquidarlo en forma anticipada habiendo transcurrido 6 meses y medio. ¿Cuál es la cantidad que debe pagar?

Datos
C = $12 500
T = 22% ACB
n = 6 meses y medio
6.5 / 2 = 3.25 bimestres
Incógnita: M

$$M = 12500\left[1+\frac{0.22}{6}\right]^{3.25}$$
$$M = 12500\left(1.0366666\right)^{3.25}$$
$$M = 12500\left(1.12416\right)$$
$$M = \$14052$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.11
La socióloga Alondra Rea invierte $19 500 en Banorte a un año y medio a una tasa de interés nominal de 4.5%. ¿Qué cantidad recibe la socióloga Rea al final del plazo?
a) Con capitalización bimestral
b) Con capitalización continua

Si la tasa de interés es de 15% capitalizable semestralmente durante 3 años determinar:
1) Frecuencia de capitalización
2) El interés por periodo
3) El número total de periodos de capitalización

Datos
C = $19 500
T = 4.5% ACB
n = un año y medio
n = 9 bimestres
Incógnita: M

a)

$$M = 19500\left[1+\frac{0.045}{6}\right]^{9}$$

$$M = 19500\left(1.0075\right)^{9}$$

$$M = 19500\left(1.0696\right)$$

$$M = \$20856.44$$

b)

$$M = Ce^{in}$$

$$M = 19500e^{0.0045(1.5)}$$

$$M = 19500e^{0.0675}$$

$$M = 19500\left(1.0698\right)$$

$$M = \$20861.69$$

Si la tasa de interés es de 15% capitalizable semestralmente durante 3 años determinar:

1) Frecuencia de capitalización

$$P = \frac{12 \text{ meses}}{6 \text{ meses}} = 2 \text{ periodos de capitalización semestral}$$

2) El interés por periodo

$$i = \frac{15\%}{2} = 7.5\% \text{ interés semestral}$$

3) El número total de periodos de capitalización
m = (2) (3) = 6 periodos de capitalización semestral durante 3 años.

Valor presente

CD4.12
¿Cuál es el valor presente de $11 600 invertidos 9 meses antes, a una tasa de 24% capitalizable mensualmente?

Datos
M = $11 600
n = 9 meses
T = 24% ACM
Incógnita: C

$$C = M\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}$$

$$C = 11600\left(1+\frac{0.24}{12}\right)^{-9}$$

$$C = 11600\left(1.02\right)^{-9}$$

$$C = 11600\left(0.8367\right)$$

$$C = \$9706.36$$

El valor a 9 meses antes de $11 600 a esa tasa de interés es de $9 706.36

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.13
¿Cuál es el valor presente de $28 000 invertidos 14 meses antes, a una tasa de 18% capitalizable bimestralmente?

Datos
$M = \$28\,000$
$n = 14$ meses
$T = 18\%$ ACB
Incógnita: C

$$C = M\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}$$

$$C = 28000\left(1+\frac{0.18}{6}\right)^{-7}$$

$$C = 28000\left(1.03\right)^{-7}$$

$$C = 28000\left(0.81309\right)$$

$$C = \$22766.56$$

El valor a 14 meses antes de $28 000 a esa tasa de interés es de $22 766.56

CD4.14
¿Cuánto debe depositar la alumna Alejandra Martínez, si desea tener un monto de , dentro de 3 años a una tasa de interés de 10% anual capitalizable mensualmente para su fiesta de graduación?

Datos
$M = \$14\,600$
$n = 3$ años
$T = 10\%$ ACM
Incógnita: C

$$C = M\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}$$

$$C = 14600\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{-36}$$

$$C = 14600\left(1.0083333\right)^{-36}$$

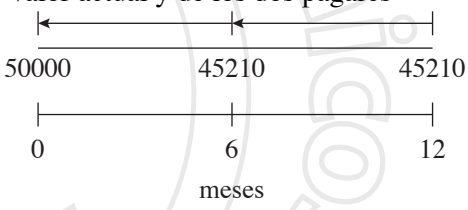
$$C = 14600\left(0.74174\right)$$

$$C = \$10829.40$$

La alumna debe depositar en una institución financiera a esa tasa de interés 3 años antes $10 829.40, para que el día de su graduación tenga la cantidad de $14 600.

CD4.15
El contador Alejandro Herrera desea comprar un automóvil, para ello analiza dos planes de compra. El primero es pagar de contado la cantidad de $125 000, y el segundo es pagar un anticipo de $50 000 y el saldo en dos pagarés de $45 210 cada uno a 6 y 12 meses. Si el contador invirtiera su dinero en un fondo de inversión a una tasa de 8.9% capitalizable mensualmente, ¿cuál de los dos planes le conviene?
Primero se necesita trasladar todas las cantidades al mismo tiempo.

Valor actual y de los dos pagarés



Valor actual de los dos pagarés

$$C_1 = 50000 + 45210\left(1+\frac{0.089}{12}\right)^{-6} + 45210\left(1+\frac{0.089}{12}\right)^{-12}$$

$$C_1 = 50000 + 45210\left(1.00742\right)^{-6} + 45210\left(1.00742\right)^{-12}$$

$$C_1 = 50000 + 45210\left(0.9566\right) + 45210\left(0.9152\right)$$

$$C_1 = \$134623.12$$

Le conviene aceptar la primera propuesta, ya que tiene un ahorro de $9 623.12 si compra ahora el automóvil.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.16
Calcular el valor actual de $69 572, pagaderos a un año 8 meses, a una tasa de 24% capitalizable cada tres meses.

Datos
M = $69 572
n = 1 año 8 meses = 6.6667 trimestres
T = 24% / 4 = 6% trimestral
i = 0.06 trimestral

Número de trimestres:
1 trimestre 3 meses
X 20 meses
X = 20 / 3 = 6.6667 trimestres

Incógnita: C

$$C = M\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}$$

$$C = 69572\left(1+0.06\right)^{-6.6667}$$

$$C = 69572\left(0.6781\right)$$

$$C = \$47176.82$$

CD4.17
Calcular el valor actual de $25 840, pagaderos a 1 año 8 meses, a una tasa de 20% capitalizable cada 3 meses.

Datos
M = $25 840
n = 1 año 8 meses = 6.6667 trimestres
T = 20% / 4 = 5% trimestral
i = 0.06 trimestral

Número de trimestres:
1 trimestre 3 meses
X 20 meses
X = 20 / 3 = 6.6667 trimestres

Incógnita: C

$$C = M\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}$$

$$C = 25840\left(1+0.05\right)^{-6.6667}$$

$$C = 25840\left(0.7223\right)$$

$$C = \$18665.11$$

CD4.18
Calcular el valor actual de $45 000, pagaderos a 8 meses y 13 días, a una tasa de 24.6% capitalizable mensualmente.

Datos
M =$45 000
n = 8 meses 13 días
T = 24.6 % ACM

1 mes 30 días
X 13 días
X = 13 / 30 = 0.4333 meses
n = 8 meses + 0.4333 de mes = 8.433 meses

Incógnita: C

$$C = 45000\left(1+\frac{0.246}{12}\right)^{-8.4333}$$

$$C = 45000\left(1+0.0205\right)^{-8.4333}$$

$$C = 45000\left(0.8427\right)$$

$$C = \$37921.85$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.19
La señora Amanda García firma un pagaré por la cantidad de $11 349, a plazo de 1 año, con una tasa de interés del 1.5% mensual. La señora García está pensando en descontar el documento 5 meses antes de su vencimiento, con una tasa de 18% con capitalización mensual. ¿Cuál es el valor actual del documento a los 5 meses?
Calcular el valor de vencimiento del pagaré.

Datos
C = $11 349
T = 1.5% mensual
n = un año
Incógnita: M

$$M = C(1+i)^n$$
$$M = 11349(1.015)^{12}$$
$$M = 11349(1.19562)$$
$$M = 13569.09$$

Conociendo el monto, se encuentra el valor actual a la fecha pensada.
M = $13 569.09
T = 18% ACM
n = 5 meses
Incógnita: C

$$C = M\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}$$
$$C = 13569.09\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{-5}$$
$$C = 13569.09(1.015)^{-5}$$
$$C = 13569.09(0.9282603)$$
$$C = \$12595.65$$

Descuento compuesto = 13 569.09 – 12 595.65
= $973.44

Tiempo

CD4.20
¿En cuánto tiempo un capital de $700 se convierte en un monto de $1 000 a una tasa de 8% capitalizable bimestralmente?

Datos
C = $700
M = $1 000
T = 8% ACB
Incógnita: n

$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{p\left[\log\left(1+\frac{i}{p}\right)\right]}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{1\,000}{700}\right)}{6\left[\log\left(1+\frac{0.08}{6}\right)\right]}$$
$$n = \frac{\log(1.428571)}{6\left[\log(1.013333)\right]}$$

$$n = \frac{0.154902}{6(0.00575233)}$$
$$n = \frac{0.154902}{0.034514}$$
$$n = 4.488094$$
n = 4 años, 5 meses y 26 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.21
Un capital de $19 870 produce intereses a una tasa de 24% capitalizable cada mes. ¿En cuánto tiempo la inversión llegará a $21 873.15?

Datos
$C = \$19\,870$
$M = \$21\,873.15$
$T = 24\%$ ACM
Incógnita: n

$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{p\left[\log\left(1+\frac{i}{p}\right)\right]}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{21\,873.15}{19\,870}\right)}{12\left[\log\left(1+\frac{0.24}{12}\right)\right]}$$

$$n = \frac{\log(1.100813)}{12\left[\log(1.020)\right]}$$

$$n = \frac{0.0917135}{12(0.0086)}$$

$$n = \frac{0.0417135}{0.1032}$$

$$n = 0.404192$$

$n = 4$ meses y 26 días

CD4.22
¿En cuánto tiempo se triplica un capital que se invierte al 23% capitalizable mensualmente?

Datos
$T = 23\%$ ACM
$p = 12$
$M = 3C$
Incógnita: n

$$M = C\left(1+\frac{i}{p}\right)^{np}$$

$$3C = C\left(1+\frac{0.23}{12}\right)^{n(12)}$$

$$3 = (1.0191666)^{n(12)}$$

$$\log(3) = 12\,n\log(1.0191666)$$

$$n = \frac{\log(3)}{(12)\left[\log(1.0191666)\right]}$$

$$n = \frac{0.477121}{12(0.0082452)}$$

$$n = \frac{0.477121}{0.098943}$$

$$n = 4.82222$$

$n = 4$ años, 9 meses y 26 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.23

¿En cuánto tiempo reduce un peso su valor adquisitivo a la mitad si se tiene una inflación del:

a) 50% b) 30%
c) 17% d) 14%
e) 10% f) 5%

a)
$M = \$1$
$C = \$0.5$
$p =$ uno
$T = 50\%$ anual
Incógnita: n

$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{p\left[\log\left(1+\frac{i}{p}\right)\right]} = \frac{\log\left(\frac{1}{0.50}\right)}{(1)\left[\log(1.5)\right]} = 1.709511$$

$n =$ un año, 8 meses y 15 días

b)
$M = \$1$
$C = \$0.50$
$p =$ uno
$T = 30\%$ anual

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{0.5}\right)}{(1)\left[\log(1.3)\right]} = 2.641926$$

$n = 2$ años, 7 meses y 21 días

c)
$M = \$1$
$C = \$0.50$
$p =$ uno
$T = 17\%$ anual

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{0.5}\right)}{(1)\left[\log(1.17)\right]} = 4.414844$$

$n = 4$ años, 4 meses y 29 días

d)
$M = \$1$
$C = \$0.50$
$p =$ uno
$T = 14\%$ anual

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{0.5}\right)}{(1)\left[\log(1.14)\right]} = 5.29005$$

$n = 5$ años, 3 meses y 14 días

e)
$M = \$1$
$C = \$0.50$
$p =$ uno
$T = 10\%$ anual

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{0.5}\right)}{(1)\left[\log(1.10)\right]} = 7.27254$$

$n = 7$ años, 3 meses y 8 días

f)
$M = \$1$
$C = \$0.50$
$p =$ uno
$T = 5\%$ anual

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{0.5}\right)}{(1)\left[\log(1.05)\right]} = \frac{\log(2)}{\log(1.05)} = 14.2066$$

$n = 14$ años, 2 meses y 14 días

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.24
¿En cuánto tiempo un capital de $5 700 se convierte en un monto de $7 000 a una tasa de 15% capitalizable diariamente?

Datos
$C = \$5\,700$
$M = \$7\,000$
$T = 15\%$ AC diariamente
Incógnita: n

$$n = \frac{\log\left(\frac{7\,000}{5\,700}\right)}{360\left[\log\left(1+\frac{0.15}{360}\right)\right]}$$

$$n = \frac{\log(1.2280702)}{360\left[\log(1.00041667)\right]}$$

$$n = \frac{0.089223}{360\,(0.00018092)}$$

$$n = \frac{0.089223}{0.0651306} = 1.369912$$

$n = 1$ años, 4 meses y 13 días

CD4.25
¿Cuánto tiempo debe estar invertido un capital de $2 800, para alcanzar la cantidad de $3 999 incluyendo los intereses y si la tasa es de 8% capitalizable trimestralmente?

Datos
$C = \$2\,800$
$M = \$3\,999$
$T = 8\%$ ACT
Incógnita: n

$$n = \frac{\log\left(\frac{3\,999}{2\,800}\right)}{4\left[\log\left(1+\frac{0.08}{4}\right)\right]}$$

$$n = \frac{\log(1.42821428)}{4\left[\log(1.02)\right]}$$

$$n = \frac{0.1547934}{4\,(0.0086)}$$

$$n = \frac{0.1547934}{0.0344} = 4.4998$$

$n = 4$ años, 6 meses

CD4.26
¿En cuánto tiempo un capital de $17 000 se convierte en un monto de $19 000 a una tasa de 8% capitalizable bimestralmente?

Datos
$C = \$17\,000$
$M = \$19\,000$
$n = 8\%$ ACB
Incógnita: n
Desarrollo

$$n = \frac{\log\left(\frac{19\,000}{17\,000}\right)}{6\left[\log\left(1+\frac{0.08}{6}\right)\right]}$$

$$n = \frac{\log(1.117647)}{6\left[\log(1.013333)\right]}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.26 cont.

$$n = \frac{0.0483047}{6\left(0.00575233\right)}$$

$$n = \frac{0.0483047}{0.034514} = 1.39957$$

$n = 1$ año, 4 meses y 24 días

Tasas

CD4.27
El administrador Ramón Mendieta depósito en una institución financiera $600 000 y después de 3 años y 4 meses le entregarán la cantidad de $950 000 ¿Cuál es la tasa de interés bimestral que le dio la institución financiera a su inversión?

Datos
$C = \$600\,000$
$M = \$950\,000$
$n = 3$ años y 4 meses
$n = 20$ bimestres
Incógnita: i

$$i = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}}\right] - 1$$

$$i = \left[\sqrt[20]{\frac{950\,000}{600\,000}}\right] - 1$$

$$i = \left[\sqrt[20]{1.583333}\right] - 1$$

$$i = \left(1.58333\right)^{1/20} - 1$$

$$i = 1.023243 - 1$$

$$i = 0.023243$$

$T = 2.3243\,\%$ bimestral

CD4.28
Una inversión de $10 000 en 10 años quintuplica su valor. Calcular la tasa anual.

Datos
$C = \$10\,000$
$M = \$50\,000$
$n = 10$ años
Incógnita: i

$$i = \left[\sqrt[10]{\frac{50\,000}{10\,000}}\right] - 1$$

$$i = \left[\sqrt[10]{5}\right] - 1$$

$$i = \left(5\right)^{1/10} - 1$$

$$i = \left(5\right)^{0.1} - 1$$

$$i = 1.17462 - 1$$

$i = 0.17462$ anual

$T = 17.462\,\%$ anual

CD4.29
Una inversión de $75 000 a 18 meses alcanzó un monto de $82 354.27. ¿Cuál es la tasa anual?

Datos
$C = \$75\,000$
$M = \$82\,354.27$
$n = 18$ meses
Incógnita: i

$$i = \left[\sqrt[18]{\frac{82\,354.27}{75\,000}}\right] - 1$$

$$i = \left[\sqrt[18]{1.0980569}\right] - 1$$

$$i = \left(1.0980569\right)^{1/18} - 1$$

$$i = 1.0052103 - 1$$

$i = 0.0052103$ mensual

$T = 0.521\,\%$ mensual

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tasas equivalentes

CD4.30
¿A qué tasa de interés compuesto mensual producirá el mismo monto, que a un 15% capitalizable trimestralmente?

Solución:

Monto acumulado a un año $M_1 = C\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}$

tasa capitalizable mensualmente.

Monto acumulado en un año al 15% anual capitalizable en forma trimestral.

$$M_2 = C\left(1+\frac{0.15}{4}\right)^{4}$$

Igualando los montos:

$$M_1 = M_2$$

$$C\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12} = C\left(1+\frac{0.15}{4}\right)^{4}$$

$$\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12} = \left(1+\frac{0.15}{4}\right)^{4}$$

$$\sqrt[12]{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}} = \sqrt[12]{(1.0375)^4}$$

$$1+\frac{i}{12} = (1.0375)^{4/12}$$

$$\frac{i}{12} = \left[(1.0375)^{1/3}\right]-1$$

$$i = 12\,(1.0123469-1)$$

$$i = 12\,(0.0123469)$$

$i = 0.14816$ anual convertible mensualmente

La tasa de 14.816% anual convertible mensualmente es equivalente a la tasa de 15% anual convertible de manera trimestral.

CD4.31
Encontrar la tasa de interés convertible trimestralmente a una equivalente de 21.8% capitalizable de manera mensual.

Solución:
Monto acumulado al 21.8% convertible mensualmente $M_1 = C\left(1+\frac{0.218}{12}\right)^{12}$

Monto acumulado a una tasa convertible trimestralmente $M_2 = C\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4}$

Igualando los montos:

$$M_1 = M_2$$

$$C\left(1+\frac{0.218}{12}\right)^{12} = C\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4}$$

$$\sqrt[4]{\left(1+\frac{0.218}{12}\right)^{12}} = \sqrt[4]{(1+0.25i)^4}$$

$$\left(1+\frac{0.218}{12}\right)^{3} = 1+0.25i$$

$$(1.0181666)^3 - 1 = 0.25i$$

$$i = (1.055496-1)/0.25$$

$$i = (0.055496)/0.25$$

$i = 0.22198$ anual convertible trimestralmente

La tasa de 21.8% anual capitalizable mensualmente es equivalente a la tasa de 22.198% anual capitalizable en forma trimestral.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.32
Encontrar la tasa de interés convertible cuatrimestralmente a una equivalente de 10.8% capitalizable de manera mensual.
Solución:
Monto acumulado al 10.8 % convertible mensualmente $M_1 = C\left(1+\frac{0.108}{12}\right)^{12}$

Monto acumulado a una tasa convertible trimestralmente $M_2 = C\left(1+\frac{i}{3}\right)^{3}$

Igualando los montos:

$$M_1 = M_2$$
$$C\left(1+\frac{0.108}{12}\right)^{12} = C\left(1+\frac{i}{3}\right)^{3}$$
$$\sqrt[3]{\left(1+\frac{0.108}{12}\right)^{12}} = \sqrt[3]{(1+0.333i)^{3}}$$
$$\left(1+\frac{0.108}{12}\right)^{4} = 1+0.3333i$$
$$(1.009)^{4} - 1 = 0.3333i$$
$$i = (1.0364889 - 1)/0.3333$$
$$i = (0.0364889)/0.3333$$

i = 0.10947 anual convertible cuatrimestralmente

La tasa de 10.8% anual capitalizable mensualmente es equivalente a la tasa de 10.947% anual capitalizable en forma cuatrimestral.

CD4.33
Encontrar la tasa de interés convertible bimestralmente a una equivalente de 8% capitalizable en forma mensual.

Monto acumulado al 10.8 % convertible mensualmente $M_1 = C\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12}$

Monto acumulado a una tasa convertible de manera bimestral $M_2 = C\left(1+\frac{i}{6}\right)^{6}$

Igualando los montos:

$$M_1 = M_2$$
$$C\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12} = C\left(1+\frac{i}{6}\right)^{6}$$
$$\sqrt[6]{\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12}} = \sqrt[6]{(1+0.16667i)^{6}}$$
$$\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{2} = 1+0.1.6667i$$
$$(1.006667)^{2} - 1 = 0.16667i$$
$$i = (1.01338 - 1)/0.16667$$
$$i = (0.033778)/0.16667$$

i = 0.080267 anual convertible bimestralmente

La tasa de 8% anual capitalizable mensualmente es equivalente a la tasa de 8.0267% anual capitalizable en forma bimestral.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tasa efectiva

CD4.34
Encontrar la tasa efectiva que corresponde a una tasa nominal de 22% capitalizable bimestralmente.

Datos
$T = 22\%$ ACB

$$e = \left[1 + \frac{0.22}{6}\right]^{6} - 1$$
$$e = (1.03667)^{6} - 1$$
$$e = 1.2412 - 1$$
$$e = 0.2412$$
$$e = 24.12\% \text{ anual}$$

Es lo mismo invertir al 22% capitalizable bimestralmente que al 24.12% con capitalización anual.

CD4.35
Encontrar la tasa efectiva que se paga por un préstamo, a una tasa de interés de 18% anual capitalizable semestralmente.

Datos:
$T = 18\%$ ACS

$$e = \left[1 + \frac{0.18}{2}\right]^{2} - 1$$
$$e = (1.09)^{2} - 1$$
$$e = 1.1881 - 1$$
$$e = 0.1881$$
$$e = 18.81\% \text{ anual}$$

Es lo mismo invertir al 18% compuesto semestralmente que al 18.81% con capitalización anual.

CD4.36
Encontrar la tasa efectiva que se paga por un préstamo, a una tasa de interés de 12% anual capitalizable trimestralmente.

Datos:
$T = 12\%$ ACT

$$e = \left[1 + \frac{0.12}{4}\right]^{4} - 1$$
$$e = (1.03)^{4} - 1$$
$$e = 1.1255 - 1$$
$$e = 0.1255$$
$$e = 12.55\% \text{ anual}$$

Es lo mismo invertir al 12% compuesto trimestralmente que al 12.55% con capitalización anual.

Tasa nominal

CD4.37
Encontrar la tasa nominal bimestral equivalente a una tasa de interés efectivo de 10%.

Datos:
$e = 10\%$
$p = 6$

$$i = 6\left[(0.10 + 1)^{1/6} - 1\right]$$
$$i = 6\left[(1.10)^{0.1666} - 1\right]$$
$$i = 6\left[1.016012 - 1\right]$$
$$i = 0.096$$
$$T = 9.6\%$$

El 9.6% compuesto bimestralmente es equivalente al 10% de interés efectivo.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.38
¿Cuál es la tasa nominal convertible mensualmente equivalente a una tasa de 24% capitalizable trimestralmente?

$$\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}=\left(1+\frac{0.24}{4}\right)^{4}$$

$$1+\frac{i}{12}=(1.06)^{4/12}$$

$$i=12\left[(1.06)^{4/12}-1\right]$$

$$i=12\left[(1.06)^{0.3333}-1\right]$$

$$i=12\,(0.01961)$$

$$i=0.2353$$

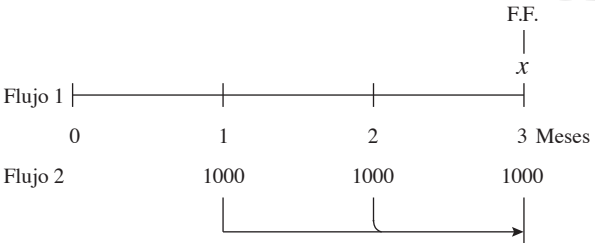
$$i=23.53\%$$

Ecuación de valor

CD4.39
¿Qué cantidad debe pagarse en un trimestre para saldar una deuda de tres pagos mensuales de $1 000 dada una tasa de 12% capitalizable mensualmente?

a)
$T=12\%$ ACM
3 pagos de $1 000
Fecha focal: pagar dentro de 3 meses

$$M=C(1+i)^{n}$$



$i=0.01$ mensual

Flujo 1 = flujo 2

$$x=(1\,000+I_1)+(1\,000+I_2)+(1\,000+I_3)$$

$$x=1\,000(1.01)^{2}+1\,000(1.01)^{1}+1\,000(1.01)^{0}$$

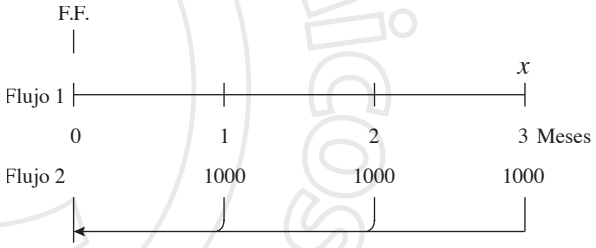
$$x=1\,000\,(1.0201)+1\,000\,(1.01)+1\,000$$

$$x=1\,020.10+1\,010+1\,000$$

$$x=\$3\,030.10$$

b) Tomando la fecha focal el día de hoy.

$$C=M(1+i)^{-n}$$



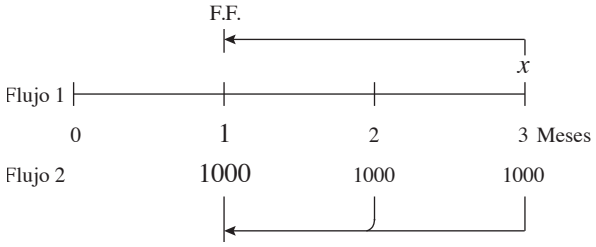
Flujo 1 = flujo 2

$$x(1+0.01)^{-3}=1\,000(1.01)^{-1}+1\,000\,(1.01)^{-2}+1\,000\,(1.01)^{-3}$$

$$x=\frac{1\,000(1.01)^{-1}+1\,000\,(1.01)^{-2}+1\,000\,(1.01)^{-3}}{(1+0.01)^{-3}}$$

$$x=\$3\,030.10$$

c) Considerando la fecha focal en el primer mes.



D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.39 cont.

$$\text{Flujo 1} = \text{Flujo 2}$$

$$x(1+0.01)^{-2} = 1\,000(1.01)^{0} + 1\,000(1.01)^{-1} + 1\,000(1.01)^{-2}$$

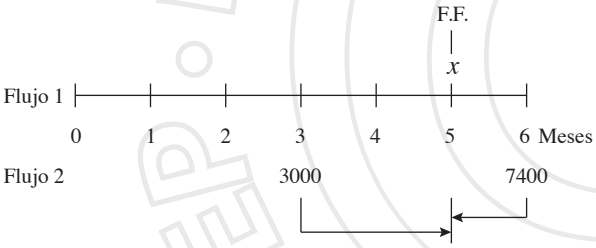
$$x = \frac{1\,000(1.01)^{0} + 1\,000(1.01)^{-1} + 1\,000(1.01)^{-2}}{(1+0.01)^{-2}}$$

$$x = \$3\,030.10$$

CD4.40

La contadora Alma Robles debe pagar $3 000 dentro de 3 meses y $7 400 dentro de 6 meses. Ella acuerda con su acreedor liquidar sus deudas mediante un pago único en el quinto mes a una tasa del 26.7% convertible mensualmente. Calcular el valor del pago único.

$T = 26.7\%$ ACM
Fecha focal: quinto mes.



$$\text{Flujo 1} = \text{flujo 2}$$

$$x = 3\,000(1.02225)^{2} + 7\,400(1.02225)^{-1}$$

$$x = 3\,000(1.0449) + 7\,400(0.9782)$$

$$x = 3\,134.98 + 7\,238.93$$

$$x = \$10\,373.91$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

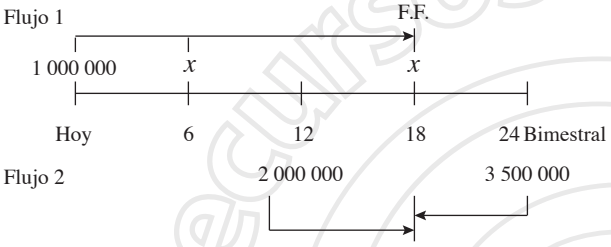
CD4.41

Un taller textil solicitará un préstamo de $2 000 0000 dentro de 2 años a pagar en 1 año y otro de $3 500 000 dentro de 4 años. La forma de pago se realiza de la siguiente forma: el día de hoy paga $1 000 000 y posteriormente dos pagos iguales, el primero dentro de 1 año y el segundo a los 3 años con una tasa de interés de 24% capitalizable bimestralmente. ¿Cuál es el importe de cada pago?

Solución:

T = 24% ACB

Fecha focal al tercer año



$$1\,000\,000(1.04)^{18} + x(1.04)^{12} + x(1.04)^{0} = 2\,000\,000(1.04)^{6} + 3\,500\,000(1.04)^{-6}$$

$$1\,000\,000(2.02582) + x(1.60103) + x = 2\,000\,000(1.26532) + 3\,500\,000(0.79031)$$

$$2025\,816.52 + x(2.60103) = 2\,530\,640 + 2\,766\,085$$

$$x(2.60103) = 5\,296\,725 - 2\,025\,816.52$$

$$x = \frac{3\,270\,908.48}{2.60103}$$

$$x = \$1\,257\,543.54$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

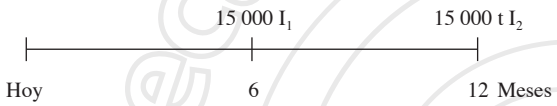
CD4.42

Al adquirir un escritorio y tres libreros con valor de $30 000, el doctor Suárez, decide realizar dos pagos de $15 000, uno a los 6 meses y el otro al año. Los pagos se harán más los intereses de 22% anual capitalizable semestralmente. Después de 3 meses decide renegociar la deuda y acuerda pagarla en tres pagos trimestrales: el primero de $9 000, el segundo de $15 000 y el tercero por la diferencia, para este segundo caso se acordó un interés de 24% capitalizable trimestralmente. ¿Cuál es el valor del último pago?

Solución:

T_1= 22% ACS
T_2 = 24% ACT
Fecha focal: 9 meses

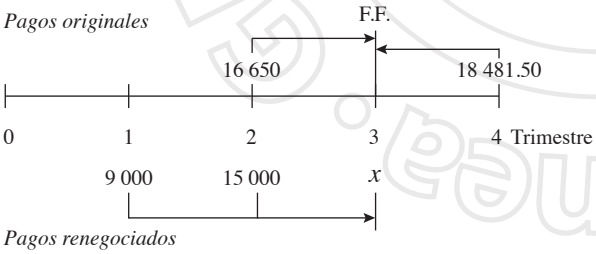
Flujo 1



Flujo 2

Los pagos originales serían a los 6 meses de:
15 000(1+0.11) = $16 650
y a los 12 meses de:
15 000(1+0.11)^2 = $18 481.50

Al renegociar la deuda, ésta queda como se muestra en el diagrama siguiente.



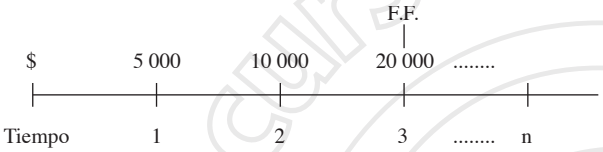
$$9\,000(1.06)^2+15\,000(1.06)^1+x=16\,650(1.06)^1+18\,481.5(1.06)^{-1}$$
$$10\,112.40+15\,900+x=17\,649+17\,435.37$$
$$26\,012.40+x=35\,084.38$$
$$x=35\,084.38-26\,012.40$$
$$x=\$9\,071.98$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tiempo equivalente

CD4.43
El contador Salvador Rodríguez tiene que pagar las siguientes obligaciones de $5 000, $10 000 y $20 000 con diferentes fechas de pago de 3, 8 y 10 meses respectivamente. El contador está pensando en realizar un pago único en una fecha determinada, con una tasa del 18% capitalizable mensualmente.

Solución:
El pago único se determina a través del cálculo del tiempo equivalente. Para tener una idea más clara se gráfica el problema, colocando los pagos en sus respectivas fechas de vencimiento y se ubica la fecha focal.



La fecha focal se determina en forma lógica, para este ejemplo se ubica en el décimo mes, ya que en éste, se cancelarán todas las obligaciones.

El pago único es de 5 000 + 10 000 + 20 000 = $35 000.00

El tiempo entre el pago de $35 000 y la fecha focal en n, se obtiene planteando la siguiente ecuación de tiempo equivalente:

$$5\,000(1.015)^{7} + 10\,000(1.015)^{2} + 20\,000 = 35\,000(1.015)^{n}$$

$$35\,851.4746 = 35\,000\,(1.015)^{n}$$

$$\frac{35\,851.4746}{35\,000} = (1.015)^{n}$$

$$(1.015)^{n} = 1.024327845$$

$$n\log(1.015) = \log(1.024327845)$$

$$n\,(0.006466042) = 0.010438978$$

$$n = \frac{0.010438978}{0.006466042}$$

$$n = 1.614431 \text{ meses}$$

Entonces existen 1.614431 periodos mensuales antes de la fecha focal, es el tiempo equivalente para el pago único:

Fecha pago único = (9 meses 30 días) – (1 mes 18 días) = 8 meses y 12 días

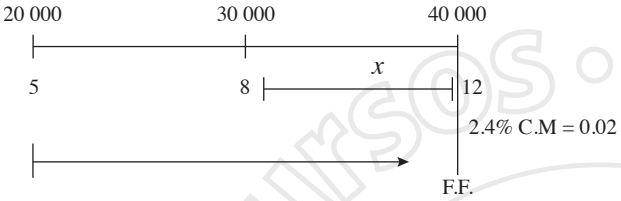
El único pago será de $35 000, y se pagará dentro de 8 meses y 12 días.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.44

El ingeniero Pedro Morales es un pequeño fabricante de llaveros, que requiere introducir nuevos modelos con el objetivo de aumentar las ventas de su empresa. Él decide contraer una deuda con una institución bancaria de la siguiente forma: $20 000 con vencimiento en 5 meses, $30 000 a 8 meses y $40 000 con vencimiento en 12 meses. Al empresario le interesa realizar un pago único, con una tasa de 24% capitalizable mensualmente. Encontrar el tiempo equivalente.

Solución:



$$20\,000(1.02)^7 + 30\,000(1.02)^4 + 40\,000 = 90\,000(1.02)^n$$

$$95\,446.6782 = 90\,000\,(1.02)^n$$

$$\frac{95\,446.6782}{90\,000} = (1.02)^n$$

$$(1.02)^n = 1.06051864$$

$$n\log(1.02) = \log(1.06051864)$$

$$n\,(0.008600171) = 0.025518306$$

$$n = \frac{0.025518306}{0.008600171}$$

$$n = 2.967185$$

$$n = 2 \text{ meses y } 29 \text{ días}$$

Entonces existen 2.967185 periodos mensuales antes de la fecha focal, que es el tiempo equivalente para el único pago:

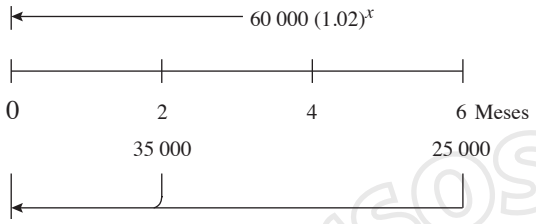
Fecha pago único = (11 meses 30 días) – (2 mes 29 días) = 9 meses y 1 día

El único pago es de $90 000 y deberá pagarse dentro de 9 meses y 1 día.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.45

La compañía Productos agrícolas adeuda al banco $35 000 con vencimiento a 2 meses y $25 000 con vencimiento a 6 meses. La compañía desea liquidar la deuda hoy con un pago único. ¿Cuál es el tiempo equivalente suponiendo un interés de 2% mensual?



$$60\,000(1.02)^n = 35\,000(1.02)^{-2} + 25\,000\,(1.02)^{-6}$$
$$60\,000(1.02)^n = 33\,640.91 + 22\,199.285$$
$$60\,000(1.02)^n = 55\,840.195$$
$$60\,000(1.02)^n = 35\,000(1.02)^{-2} + 25\,000\,(1.02)^{-6}$$
$$60\,000(1.02)^n = 33\,640.91 + 22\,199.285$$
$$60\,000(1.02)^n = 55\,840.195$$
$$(1.02)^n = \frac{55\,840.195}{60000}$$
$$n = \frac{\log(0.9306699)}{\log(1.02)}$$
$$n = \frac{-0.0312043}{0.0086002}$$
$$n = -3.62832259$$
$$n = 3 \text{ meses y } 19 \text{ días}$$

La compañía debe liquidar sus préstamos con un pago único de $60 000 dentro de 3 meses y 19 días.
La tasa nominal del 23.53% convertible mensualmente es equivalente a una tasa de 24% capitalizable en forma trimestral.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD4.46

¿Cuál es la tasa nominal convertible en forma mensual equivalente a una tasa de 14% capitalizable trimestralmente?

$$\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}=\left(1+\frac{0.14}{4}\right)^{4}$$

$$1+\frac{i}{12}=(1.035)^{4/12}$$

$$i=12\left[(1.035)^{4/12}-1\right]$$

$$i=12[1.011533-1]$$

$$i=12\,(0.011533)$$

$$i=0.1384$$

$$i=13.84\%$$

La tasa nominal del 13.84% convertible en forma mensual es equivalente a una tasa de 14% capitalizable trimestralmente.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

GLOSARIO

Actualizar, Al conocer el monto se desea saber el capital que es necesario invertir ahora, a una tasa de interés determinada, durante un plazo definido (ir del futuro al presente).

Capitalizar, Es cuando se agrega el interés al capital al final de un determinado periodo (ir del presente al futuro).

Frecuencia de capitalización de intereses. Periodo en el que se van a producir nuevos intereses (mes, bimestre, trimestre, semestre, etc.). A mayor frecuencia de capitalización mensual (12) bimestral (6) en un año, se obtienen más intereses.

Interés compuesto. Es el capital al que se le acumulan los intereses devengados al final del periodo. Este capital da origen a uno nuevo sobre el que se generan nuevos intereses.

Liquidez, Característica de ciertos activos que son fácilmente convertibles en efectivo, como son los depósitos bancarios a la vista, activos financieros que pueden ser vendidos al instante.

Periodo de capitalización. Es un intervalo regular de tiempo en el que se generan intereses, los cuales se le agregan al capital al final del periodo.

Tasa efectiva. Es la tasa de interés simple que da el mismo rendimiento en un año que una tasa compuesta.

Tasa nominal. Es la tasa de interés anual, sin tomar la capitalización.

Valor actual o presente. Es el capital que es necesario invertir ahora, a una tasa de interés determinada, para llegar a tener un monto al final de un periodo dado.

Recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

GLOSARIO

Actualizar, Al conocer el monto se desea saber el capital que es necesario invertir ahora, a una tasa de interés determinada, durante un plazo definido (ir del futuro al presente).

Capitalizar, Es cuando se agrega el interés al capital al final de un determinado periodo (ir del presente al futuro).

Frecuencia de capitalización de intereses. Periodo en el que se van a producir nuevos intereses (mes, bimestre, trimestre, semestre, etc.). A mayor frecuencia de capitalización mensual (12) bimestral (6) en un año, se obtienen más intereses.

Interés compuesto. Es el capital al que se le acumulan los intereses devengados al final del periodo. Este capital da origen a uno nuevo sobre el que se generan nuevos intereses.

Liquidez, Característica de ciertos activos que son fácilmente convertibles en efectivo, como son los depósitos bancarios a la vista, activos financieros que pueden ser vendidos al instante.

Periodo de capitalización. Es un intervalo regular de tiempo en el que se generan intereses, los cuales se le agregan al capital al final del periodo.

Tasa efectiva. Es la tasa de interés simple que da el mismo rendimiento en un año que una tasa compuesta.

Tasa nominal. Es la tasa de interés anual, sin tomar la capitalización.

Valor actual o presente. Es el capital que es necesario invertir ahora, a una tasa de interés determinada, para llegar a tener un monto al final de un periodo dado.

Recursos Académicos en Línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

5.1
128 325.2

5.2
12 143.31

5.3
3 154.06

5.4
96 006.77

5.5
274 747.66

5.6
88 835.45, 13 835.45

5.7
28 045.02

5.8
41 902.2

5.9
25 745.9

5.10
11 879.36

5.11
65 767

5.12
a) 63 349.89
b) 69 078.44

5.13
93 950.13

5.14
127 009.50

5.15
1 508.93

5.16
3 190.01

5.17
953.99

5.18
1 700.52

5.19
5 288.68

5.20
1 236.41

5.21
554.807

5.22
10.15

5.23
24.72

5.24
42.37

5.25
55.41

5.26
69.33

5.27
697.72

5.28
45 547.82

5.29
6 375.21

5.30
724 827.94

5.31
5 001.08

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.32
2 158 629.45

5.33
16 247.30

5.34
6 980.72

5.35
121 578.55

5.36
4 619.22

5.37
3 440.79

5.38
794.44

5.39
6 109.93

5.40
945.14

5.41
14.79

Respuestas a problemas reto

Reto 1
$65 360.00

Reto 2
6.13
6 años,1 mes y 18días

Reto 3
$380 000.00

Reto 4
$42 750.00

Reto 5
$3 365.76

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

ANUALIDADES

Objetivos

- Comprender el concepto de anualidad y su aplicación.
- Identificar los diferentes tipos de anualidades como son las simples, vencidas u ordinarias, anticipadas diferidas, generales, variables y a perpetuidad.
- Resolver problemas de anualidades determinando el valor del dinero a través del tiempo:
  - Monto
  - Capital y valor presente
  - Plazo
  - Renta
  - Tasa

Recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Formulario

Anualidades vencidas

Monto

$$M = \frac{R - R(1+t)^n}{1-(1+t)} \quad 5.1$$

$$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \quad 5.2$$

Valor actual o presente

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \quad 5.3$$

Renta

$$R = \frac{M(i)}{(1+i)^n - 1} \quad 5.4$$

$$R = \frac{A(i)}{1-(1+i)^{-n}} \quad 5.5$$

Plazo

$$n = \frac{\log\left[\frac{1}{1-\frac{Ai}{R}}\right]}{\log(1+i)} \quad 5.6$$

$$n = -\left[\frac{\log\left(1-\frac{Ai}{R}\right)}{\log(1+i)}\right] \quad 5.6a$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{Mi}{R}+1\right)}{\log(1+i)} \quad 5.7$$

Anualidad anticipada

Monto

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right] \quad 5.8$$

$$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)^1 \quad 5.8a$$

Valor actual o presente

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right] \quad 5.9$$

$$A = R\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right] \quad 5.10$$

Renta

$$R = \frac{M}{\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right]} \quad 5.11$$

$$R = \frac{A}{\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]} \quad 5.12$$

Plazo

$$n = 1 - \left[\frac{\log\left[(1+i) - \frac{Ai}{R}\right]}{\log(1+i)}\right] \quad 5.13$$

$$n = \left[\frac{\log\left(\frac{Mi}{R} + (1+i)\right)}{\log(1+i)}\right] + 1 \quad 5.14$$

Anualidades diferidas

Valor presente

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-m} \quad 5.15$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Renta

$$R = \frac{\frac{A(1+i)^m}{1-(1+i)^{-n}}}{i} \qquad 5.16$$

Plazo

$$n = \frac{\log\left[\frac{R}{R-\left(A(1+i)^m\right)(i)}\right]}{\log(1+i)} \qquad 5.17$$

Tasa en anualidad vencida

$$\frac{A}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad 5.18$$

Tasa efectiva

$$e = (1+i)^p - 1 \qquad 5.19$$

$$\frac{M}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad 5.20$$

Tasa en anualidad anticipada

$$\frac{A}{R} = 1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i} \qquad 5.21$$

$$\frac{M}{R} + 1 = \left[\frac{(1+i)^{n+1}}{i}\right] \qquad 5.22$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Anualidad general variable

Valor presente

$$A = R(1+i)^{-1} + 2r(1+i)^{-2} + \cdots + (n-1)R(1+i)^{-(n-1)} + nR(1+i)^{-n} \qquad 5.23$$

$$(1+i)A = R + 2R(1+i)^{-1} + \cdots + (n-1)R(1+i)^{-(n-2)} + nR(1+i)^{-(n-1)} \qquad 5.24$$

$$iA = R\left[1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-1)}\right] - nR(1+i)^{-n} \qquad 5.25$$

$$A = \frac{R}{i}\left[(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n}\right] \qquad 5.26$$

Suma

$$S = A(1+i)^{n} \qquad 5.27$$

$$S = \frac{R}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{n+1} - n\right] \qquad 5.28$$

Suma infinita

$$S = \frac{(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}}\left[\frac{1+i}{1+1}\right] = \frac{1}{(1+i)-1} = \frac{1}{i} \qquad 5.29$$

Anualidades perpetuas

Renta

$$R = Cin \qquad 5.30$$

$$R = Ci \qquad 5.31$$

Tasa de interés

Tasa

$$i = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}}\right] - 1 \qquad 5.32$$

$$i = \text{anti}\log\left[\frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{n}\right] - 1 \qquad 5.32a$$

Tasa nominal

$$i = p\left[(e+1)^{1/p} - 1\right] \qquad 5.33$$

Tasa efectiva

$$e = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{p} - 1 \qquad 5.34$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Terminología

Anualidad	
M	Monto
R	Renta
$(1+t)$	Razón
n	Periodo
A	Valor Actual
$R=(1+i)^{-1}$	Primer término
$(1+i)^{-1}$	Razón
P	Precio
C	Capital
Tasa	
i	Tasa
e	Tasa efectiva
i	Tasa nominal

recursos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

¿Qué sabes?

4.1
¿Qué significa el término anualidad?

4.2
¿Qué es una anualidad a perpetuidad o perpetua?

4.3
¿Cuándo se efectúan los pagos en una anualidad ordinaria?

4.4
¿Qué nombre recibirá la anualidad en la que los pagos se realizan al principio de cada periodo?

4.5
En una anualidad diferida ¿qué es el periodo de gracia o periodo de diferimiento?

4.6
Los periodos de capitalización de la tasa de interés son periodos en donde los _____.

4.7
¿Cómo se llama la anualidad cuando el periodo de pago es más largo que el de capitalización?

recursos · académicos · en · línea · GEPatria

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas a resolver

El término anualidad se encuentra muy arraigado en la matemática financiera. Es una sucesión de pagos iguales que se realizan al final de cada año. El concepto de anualidad también se emplea en periodos de pago cuya frecuencia puede ser semestral, trimestral, bimestral, mensual, quincenal, semanal, diaria o cualquier otra.

Clasificación de las anualidades

Criterio	Tipo de anualidad
Tiempo	**Cierta** Las fechas son fijas y se determinan con anterioridad. **Contingentes o eventual** La fecha del primer pago, segundo o ambos no se determinan con anterioridad, esto va a depender de que el suceso ocurra, pero se desconoce la fecha.
Interés	**Simple** Cuando el periodo de pago coincide con el periodo de capitalización de los intereses. **General** El periodo de pago no coincide con el periodo de capitalización de los intereses.
Pagos	**Vencido u ordinario** Los pagos se efectúan al vencimiento del periodo o intervalo. **Anticipados** Los pagos se efectúan al principio de cada periodo o intervalo. **Inmediatos** El pago o cobro tiene lugar en el primer periodo, inmediatamente después de la formalización del trato.
Iniciación	**Anticipada** Es aquella en la que los pagos se realizan al principio de cada periodo. **Diferidas** Se pospone la realización de los pagos. No se realizan a partir del primer periodo.
	Anualidades a perpetuidad o anualidad perpetúa Es otro tipo de anualidad, con la característica de que no se conoce cuándo se realizará el último pago de la renta (o por tiempo ilimitado).

Cuadro 1. Clasificación de las anualidades

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Anualidades vencidas

En el cuadro 2 se explica cómo identificar los diferentes tipos de anualidades vencidas cuando se plantean para resolver un ejemplo o problema:

Criterio	Anualidad vencida	Ejemplo
Tiempo (cierta)	Las fechas son fijas y se determinan con anterioridad.	Al final del mes (el día 28 o 30 o 31)
Plazo	Tiempo que transcurre desde la fecha de su emisión hasta la fecha de su vencimiento.	El plazo puede ser de dos años.
Iniciación (inmediata)	El pago o cobro tiene lugar en el primer periodo, inmediatamente después de la emisión de un empréstito (formalización del trato).	Al final del mes de mayo (el día 31).
Pagos	Los pagos se efectúan al vencimiento del periodo o intervalo.	• Al final del mes. • El día último del mes. • El día 31 del mes (el periodo que comprende del día uno al día 31 de mayo).
Interés (simple)	Cuando el periodo de pago coincide con el periodo de capitalización de los intereses.	Periodo de pago de un mes y la tasa de interés es de 10% anual convertible mensualmente.

Cuadro 2. Forma de identificar la anualidad vencida

En los siguientes casos se efectúan una serie de pagos iguales, a intervalos iguales de tiempo, en un plazo determinado por el deudor y el acreedor, en lugar de realizar un pago anual durante un plazo determinado.

Monto

CD5.1
Calcular el valor acumulado de una anualidad simple ordinaria de $20 000 anuales durante 5 años, a una tasa de interés de 12.5%.

CD5.2
Encontrar el valor acumulado de una anualidad simple ordinaria de anuales durante 4 años, con tasa de interés de 9.5% anual capitalizable mensualente.

CD5.3
Carlos Hernández paga cada mes una deuda de $500 por la compra de un librero. Él se atrasó 6 meses en sus pagos. Carlos llega a un acuerdo con Bancrecer para ponerse al corriente en sus pagos en noviembre del mismo año. ¿Qué cantidad tiene que pagar en septiembre, si la tasa de interés es de 24% capitalizable mensual mente?

CD5.4
Juan deposita cada 3 meses $5 000 en su cuenta de ahorros, la cual paga el 6%. ¿Cuánto dinero tendrá después del depósito del 31 de mayo 2018, si el primer depósito se realizó el 31 de mayo de 2014?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.5
La doctora Antonia Cortés al leer el periódico encuentra un anuncio de venta de automóviles de la marca Maztra. Una unidad se puede adquirir con un pago inicial de $82 000 y 36 pagos fijos mensuales de $4 616 (no se incluye el seguro automotriz). La tasa de interés es de 10% anual convertible mensualmente. La fecha fijada por la empresa financiadora Maztra es el día 30 de cada mes. ¿Cuánto pagaría en realidad la doctora Cortés por el automóvil si se decidiera a comprarlo?

CD5.6
El comunicólogo Jesús Miguel Rodríguez ha depositado $5 000 al final de cada año, en su Afore durante 15 años. Tales depósitos ganaron intereses de 9.5% durante los primeros 4 años, el 8% durante los siguientes 4 años y el 7% en los últimos 7 años. Encontrar la cantidad acumulada en el fondo para el retiro y los intereses ganados.

Valor actual o presente

CD5.7
Encontrar el valor actual pagado por una sala si se dio un enganche de $12 000 y se realizaron 6 pagos mensuales vencidos de $2 500 y un séptimo pago de $2 000. La tasa de interés pactada es de 18% capitalizable mensualmente.

CD5.8
El contador Francisco Castro compró un equipo de enfriamiento para su oficina mediante 36 pagos semanales vencidos de $1 240, con una tasa de interés de 18% convertible semanalmente. ¿Cuál es el valor actual?

CD5.9
La señora Bertha Aguilar compró un servicio de lavado Mabe para su negocio de planchado. Electro-Hogar ofreció un crédito que consiste en 52 pagos semanales vencidos de $540, con una tasa de interés de 18% convertible semanalmente ($VP = \$25\,657.04$). Al llegar a su casa escuchó una promoción para la compra del mismo modelo de lavadora de la mueblería Villalpando Hermanos S.A. que consiste en un pago inicial de $540 y 51 pagos semanales con una tasa de 18% convertible semanalmente. Encontrar el valor actual de esta promoción.

CD5.10
Francisco Javier Zamudio compró un automóvil usado. Pagó $66 000 de enganche y $1 424.50 al final de cada mes durante 3 años. Calcular el precio del automóvil, si la tasa de interés es de 18%, y calcular los intereses totales sobre el préstamo.

CD5.11
La fábrica textil Tacoma S.A. está analizando qué tipo de equipo nuevo de cómputo debe comprar. El equipo seleccionado tiene un valor de contado de $88 000, con valor de salvamento de $9 000 al final del sexto año. Los costos de mantenimiento serán de $400 al mes, pagaderos al final de cada mes. La fábrica textil puede ganar 18% sobre el capital. Si en la fábrica decidieran rentar el equipo de cómputo les costaría $3 500 al mes durante los 6 años, con la salvedad de que el arrendatario paga el costo de mantenimiento. ¿Cuál de los dos casos es el más recomendable?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.12
La comerciante Alba Rosales compró mercancía para miscelánea. Dio un enganche de $6 000 y acordó pagar la mercancía realizando pagos de $2 250 mensuales durante 3 años a una tasa de 24%.

CD5.13
Calcular el valor presente de una anualidad de $2 400 al final de cada mes durante 4 años, pagando una renta de $2 400 al final de cada mes durante 3 años a una tasa de interés de 10.38% capitalizable mensualmente.

Renta

CD5.14
La pastelería La Espiga en su sucursal de Calzada del Hueso estima que será necesario cambiar dos horno pequeños de pan dentro de 10 años, a un costo $1 568 000. ¿Cuánto deben guardar cada año en un fondo de inversión si el banco ofrece una tasa de 4.6% anual?

CD5.15
¿Cuánto debe depositar Alma al final de cada mes en su cuenta de ahorros durante 3 años? Alma estima acumular la cantidad $65 000 en el momento de realizar el último depósito. La tasa de interés es de 1% mensual.

CD5.16
Un bufete de abogados desea comprar unos sillones para la sala de espera y una mesa con 12 sillas para la sala de juntas. ¿Cuántos depósitos al final de cada mes debe realizar el administrador del bufete en los próximos 3 años para acumular $130 000? Una institución financiera le ofrece una tasa de interés de 8.35% convertible mensualmente.

CD5.17
El sociólogo Olguín solicita a Banorte un crédito de 3 meses de su sueldo para pagar la operación de su esposa en un hospital particular. El sueldo que le deposita en su cuenta de inversión la compañía Constructora del Sureste S. A. es de $30 000 quincenales. Por política de Banorte los pagos del crédito son fijos y quincenales con un plazo de 18 meses, y una tasa de interés de 18% anual convertible quincenalmente. El pago quincenal no incluye el IVA. ¿Cuánto debe pagar el sociólogo Olguín cada quincena?

CD5.18
El día de hoy el señor Víctor Delgadillo le compra a su hija a crédito una computadora de $15 990 más IVA. El señor Delgadillo acuerda pagarla en 12 mensualidades vencidas. ¿Cuánto tiene que pagar cada mes si el interés que le cobran es de 1.5% mensual?

CD5.19
¿Cuánto debe pagar al final de cada mes un trabajador a la caja de ahorros del sindicato del IMSS, por un crédito de $100 000 pagaderos a 3 años y con una tasa de interés del 4% mensual?

CD5.20

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Una sala cuesta $27 500. Usted puede dar un enganche $2 000 y la diferencia en pagos mensuales vencidos durante 2 años. ¿Cuánto debe pagar al final de cada mes si el interés es del 15% anual capitalizable mensualmente?

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.21
La licenciada Verónica Zamora ha realizado depósitos mensuales vencidos de $850 en su cuenta de ahorros que paga intereses de 9.25% capitalizable mensualmente. ¿Qué cantidad debe depositar mensualmente durante los próximos 3 años siguientes para alcanzar la cantidad de $108 000?

Plazo

CD5.22
La mamá de Sonia tiene que saldar una deuda el día hoy por $980. Acuerda diferir su adeudo realizando pagos de $165 al final de cada bimestre con una tasa de interés de 11% bimestral. ¿Cuántos pagos bimestrales vencidos de $165 tendrá que hacer para saldar su deuda?

CD5.23
¿Cuántos pagos mensuales vencidos de $540 se tendrían que realizar para saldar una deuda, pagadera el día de hoy de $10 450, si el primer pago se realiza dentro de un mes y el interés es de 24% convertible mensualmente?

CD5.24
¿Cuántos pagos mensuales vencidos de $3 019.25 se tendrían que realizar para saldar una deuda, pagadera el día de hoy de $500 000, si el primer pago se realiza dentro de un mes y el interés es de 12% convertible mensualmente?

CD5.25
¿El físico Javier Mendoza desea acumular la cantidad de $50 000. Para reunir esta cantidad decide hacer depósitos de $600 bimestrales vencidos, en una cuenta de inversión la cual paga el 8.5% anual capitalizable bimestralmente. ¿En cuánto tiempo el físico reunirá los $50 000?

CD5.26
¿Cuántos pagos mensuales vencidos de $3 019.25 se tendrían que realizar para juntar la cantidad de $300 000, si el primer pago se realiza dentro de un mes y el interés es de 12% convertible mensualmente?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Anualidades anticipadas

En el cuadro 3 se indica la forma de identificar una anualidad anticipada cuando se plantea como un problema.

Criterio	Anualidad anticipada	Ejemplo
Tiempo (cierta)	Las fechas son fijas y se determinan con anterioridad.	El primer día del mes. Al principio de la quincena (día 16). El día cuatro de cada mes.
Plazo	Tiempo que transcurre desde la fecha de su emisión hasta la fecha de su vencimiento.	Un bimestre o un semestre o un año o tres años.
Iniciación (inmediata)	El pago o cobro tiene lugar en el primer periodo, inmediatamente después de la emisión de un empréstito (formalización del trato o firma del crédito).	Primer día en que se inicia el periodo de pago. El día 16 de cada mes. El primer día de cada bimestre.
Pagos	Los pagos se efectúan al inicio del periodo o intervalo.	El primer día de semana. El día 25 de mayo de cada año.
Interés (simple)	Cuando el periodo de pago coincide con el periodo de capitalización de los intereses.	Periodo de pago de un mes y la tasa de interés 12% anual convertible mensualmente o 24% convertible semestralmente.

Cuadro 3. Forma de identificar la anualidad anticipada

CD5.27
Un artesano deposita en una cuenta de ahorros $50 al principio de cada mes. Si la cuenta paga 2.3% mensual de interés, ¿cuánto habrá ahorrado durante el primer año?

CD5.28
Encontrar el monto de 18 pagos que debe realizar al principio de cada bimestre el anestesista Joaquín Murillo, si la cantidad que deposita bimestralmente es de $1 985. El interés es de 15% anual capitalizable bimestralmente.

CD5.29
Determinar el monto de 6 pagos que debe realizar el día uno de cada mes el plomero Feliciano Arroyo, por la cantidad de $985, para la compra de herramienta para su negocio. El tipo de interés contratado es de 25% anual capitalizable mensualmente.

CD5.30
El pianista Alfredo Cerdán desea comprar una casa dentro de 4 años y decide guardar su dinero en un fondo de inversión realizando 24 depósitos bimestrales adelantados de $22 850. El interés que proporciona este fondo es de 13% anual capitalizable bimestralmente. ¿Cuánto dinero tendrá el pianista Alfredo Cerdán dentro de 4 años?

CD5.31

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Encuentre el monto de 6 pagos de $775 que debe realizar el día uno de cada mes el señor Enrique Pruneda, por la compra de un desayunador para su consultoría. El tipo de interés es de 25% anual capitalizable mensualmente.

Valor actual en anualidades anticipadas

CD5.32
¿Cuál es el valor de contado de una casa que compró la diputada Amalia González en la colonia Fuentes del Pedregal, hace 15 años, si realizaba pagos anticipados de $50 000 mensuales, con una tasa de interés de 28% anual convertible mensualmente?

CD5.33
¿Cuál es el valor actual de 12 pagos trimestrales anticipados de $1 500, con un interés de 7.68% anual capitalizable trimestralmente.

CD5.34
Encontrar el valor de contado de un sistema de videojuego por el cual se realizaron 18 pagos mensuales anticipados de $433 con una tasa de interés de 13.6% capitalizable mensualmente.

CD5.35
La licenciada Jimena Soria compró a crédito una camioneta usada para transportar sus mercancías. Tuvo que realizar 24 pagos mensuales anticipados de $5 890 y los intereses que le cobran son de 18% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál es el valor de contado de la camioneta?

Renta en anualidades anticipadas

CD5.36
¿Cuánto debe pagar mensualmente el señor Cándido por la compra de un comedor y una sala? El acordó con la mueblería realizar sus pagos el día 1 de cada mes y cuando realizó su noveno pago acumuló $44 819 y la tasa de interés aplicada fue de 18% anual convertible mensualmente.

CD5.37
La psicóloga Angélica Oviedo tiene que pagar un préstamo personal de $100 000 en un plazo de 2 años. El día de pago fijado por Bansur es el primero de cada mes durante el tiempo que dure el plazo. ¿Cuánto debe pagar cada mes la psicóloga, si la tasa de interés aplicada es de 18% anual convertible mensualmente.

CD5.38
Juan Manuel decide regalarle a su mamá una batería de cocina de 12 piezas con un precio de $3 540 y también decide comprarle una olla de presión de aluminio de 6 litros con un precio de $999. ¿Cuánto debe pagar al inicio de cada mes durante 6 meses para liquidar el gasto de la batería y la olla, si la tasa de interés es de 24% anual convertible mensualmente?

CD5.39
La fábrica de muebles Delgado Hermanos S.A. pone a la venta un comedor con valor de contado de $68 000 o mediante 12 abonos mensuales anticipados. El interés es de 16.8% anual convertible mensualmente. Encontrar el valor de cada pago.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.40
Bicimundo pone a la venta en el mes de diciembre bicicletas de montaña rodada 28, con valor de $7 819.50 al contado o mediante 9 pagos mensuales anticipados. Si el joven Juan de Dios decide comprar una bicicleta a crédito, ¿cuánto tiene que pagar al principio de cada mes, si el interés a pagar es de 26% anual capitalizable mensualmente?

Plazo en anualidad anticipada

CD5.41
El arquitecto Martín Morales desea comprar cuatro archiveros de tres cajones de madera para su oficina con valor de $20 000 al contado. También los puede comprar en abonos anticipados mensuales de $1 569.15, con un interés de 27% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuántos pagos tendría que hacer el arquitecto Morales si decide comprar los archiveros en abonos?

CD5.42
La trabajadora social Isabela compra un paquete de cocina que consta de una cafetera para 10 tazas, extractor de jugos, juego de sartenes con teflón (16 piezas). El precio de contado del paquete es de $5 866, Isabela decide pagarlo en abonos con una la tasa de interés de 18% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuántos pagos de $585 debe realizar al principio de cada mes?

CD5.43
La tienda Ciclobici vende de contado una motocicleta en $8 560 o mediante pagos mensuales anticipados de $995. El interés es de 19.64% anual convertible mensualmente. ¿Cuántos pagos se deben realizar si se compra a crédito?

CD5.44
¿Cuántos pagos de $1 975 debe realizar el señor Arteaga, el día primero de cada mes para saldar una deuda por la compra de una estufa? Al cubrir su último pago acumuló $6 560. La tasa de interés aplicada fue de 22% anual convertible mensualmente.

CD5.45
Gabriela abre una cuenta de ahorros en Bonos del Ahorro Nacional el día de hoy. Ella acuerda con el banco realizar depósitos mensuales de $3 550, al inicio de cada mes. Desea reunir la cantidad $30 000. La tasa de interés es de 1% mensual. ¿En cuánto tiempo reunirá la cantidad deseada?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Anualidades diferidas

En el cuadro 4 se describe la manera de identificar una anualidad vencida cuando se plantea en un ejemplo o problema a solucionar.

Criterio	Anualidad vencida	Ejemplo
Tiempo (cierta)	Las fechas son fijas y se determinan con anterioridad.	Tres meses de gracia y plazo de 18 meses.
Plazo	Tiempo que transcurre desde la fecha de emisión hasta la de vencimiento.	Un año Seis meses Un trimestre
Iniciación (diferida)	El pago o cobro se realiza después del periodo de gracia.	Tres meses Un bimestre Dos años
Pagos	Los pagos se efectúan al vencimiento del periodo.	A finales de mes, el día 30 o 31 de cada mes.
Simple	Cuando el periodo de pago coincide con el periodo de capitalización de los intereses.	Periodo de pago de un mes y tasa de interés de 10% anual capitalizable mensualmente.

Cuadro 4. Identificación de una anualidad vencida

Monto en anualidades diferidas

CD5.46
La bióloga Adriana Dussel compró a crédito una centrifugadora de plasma el día de hoy para su laboratorio y su acreedor le concede un periodo de gracia de un año; sin embargo, realizará 6 pagos semestrales anticipados de $34 850 por la compra de la centrifugadora con un interés de 19% anual convertible semestralmente. Encontrar el monto.

CD5.47
Encontrar el pago total que debe realizar el señor Patiño por la compra de una alacena el día de hoy, si después de 3 meses realiza 12 pagos al inicio de cada mes de $790 con un interés de 24% anual convertible mensualmente.

CD5.48
Encontrar el pago que debe realizar la dentista Ana Karen por la compra de material dental el día de hoy si después de 4 meses realiza 18 pagos al final de cada mes de $1 950 con un interés de 18% anual convertible mensualmente.

CD5.49
¿Cuál es el monto de una renta semestral de $16 000 durante 10 años, si el primer pago vencido semestral se realiza dentro de 3 años y medio y el interés es de 16% capitalizable semestralmente?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Valor presente en anualidades diferidas

CD5.50
El periodista Ulises Gutiérrez compra un comedor con un pago inicial de $5 000 y 8 mensualidades de $4 800 cada una. La primera mensualidad la paga después de 4 meses de la compra; además, le cobran 19.56% de interés anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál es el precio del comedor?

D5.51
El alpinista Juan Antonio Sierra compra en abril una casa de campaña a crédito y acepta pagarla en 12 mensualidades de $3 300 con una tasa de interés de 24% anual capitalizable mensualmente. El primer pago lo realizará en el mes de julio del mismo año. ¿Cuál es el valor de contado?

CD5.52
¿Cuál es el valor presente de una renta semestral vencida de $16 000 durante 10 años, si el primer pago semestral se realiza dentro de 3 años y medio y el interés es de 16% capitalizable semestralmente?

CD5.53
Encontrar el valor presente por la compra de un estufa eléctrica el día de hoy, si después de 3 meses se realizan 12 pagos al inicio de cada mes de $790 con un interés de 24% anual capitalizable mensualmente.

Renta en anualidades diferidas

CD5.54
El médico Federico Toscano deposita el 13 de julio la cantidad de $500 000 en un fondo de inversión en el Banco Central; ese mismo día inscribe a su hijo en la preparatoria. El médico tiene la idea de realizar 9 retiros semestrales a partir de que inscriba a su hijo en el mes de julio en la universidad. Encontrar el valor de cada retiro semestral que realizará si la tasa es de 12% anual capitalizable semestralmente.

CD5.55
Por su aniversario, la mueblería Hermanos Velásquez S. A. ofrece un comedor para ocho personas con un valor de contado de $43 550. Pero el comedor también se puede adquirir mediante 6 pagos mensuales, el primero de los cuales debe realizarse dentro de 5 meses después de la compra con un interés de 2.25% mensual. ¿De cuánto será la mensualidad a pagar?

CD5.56
El dueño de una pastelería deposita el día de hoy $80 000 en una cuenta de inversiones que paga el 27% anual capitalizable bimestralmente. Dentro de 8 bimestres realizará 28 retiros bimestrales vencidos, ¿de qué cantidad serán éstos?

Plazo en anualidades diferidas

CD5.57
El señor Ordóñez contrae una deuda de $15 000 por la compra de un equipo de sonido. Acordó comenzar a pagar dentro de 3 meses realizando cuantos pagos sean necesarios de $900 hasta saldar la deuda. La tasa de interés es de 23.25% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuántos pagos debe realizar para saldar su deuda?

CD5.58

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Karla Díaz contrae una deuda por $48 585 por la compra de una pantalla plana, la que comenzará a pagar dentro de 6 meses y realizando cuantos pagos sean necesarios de $1 900 hasta saldar la deuda. La tasa de interés es de 24% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuántos pagos debe realizar para saldar su deuda?

Tasa de interés en anualidad vencidas

CD5.59
¿A qué tasa nominal capitalizable semestralmente el sociólogo Juan Molina acumulará $500 000 para el enganche del departamento que habita en la actualidad? Él acordó con el dueño del departamento realizar 15 depósitos semestrales y con el último depósito haber acumulado la cantidad acordada, para pagar la cantidad faltante por el valor del departamento. Él solicitará un préstamo hipotecario al ISSSTE.

CD5.60
El señor Francisco Peña desea comprar una camioneta cuyo costo al contado es de $350 000. Él solicita un crédito a la agencia automotriz, realizando 6 abonos mensuales de $62 000. ¿Cuál es la tasa de interés si el primer pago lo realizará dentro de un mes?

CD5.61
Se realizan 6 depósitos anuales anticipados de $18 338.90 equivalentes a un valor actual de $55 000. ¿Cuál es la tasa de interés?

CD5.62
¿Cuál es la tasa de interés anual de 15 depósitos anuales anticipados de $1 800 que acumulan un monto de $450 000?

CD5.63
El señor Zima tiene que pagar una deuda de $100 000. Para saldarla acuerda con su acreedor realizar el día de hoy un pago de $42 000 y efectuar 5 pagos mensuales de $28 000 comenzando el primero dentro de 8 meses a partir del día de hoy. ¿Cuál es la tasa de interés?

CD5.64
El comerciante Antonino Villalobos compró un camión para su negocio con valor de $1 050 000 Él acordó con su acreedor dar un enganche $450 000 y 3 pagos mensuales de $220 000, el primero de ellos se realizaría dentro de 3 meses, ¿cuál es la tasa de interés anual capitalizable mensualmente que pagó el comerciante?

Recursos Académicos en Línea

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Anualidades generales

Existen dos casos:

1. Cuando el periodo de pago es más largo que el de capitalización.
2. El periodo de capitalización es más largo que el periodo de pago.

Criterio	Anualidad general	Ejemplo
Tiempo (cierta)	Las fechas son fijas y se determinan con anterioridad.	Antes de realizar la firma del documento.
Periodo	Tiempo que transcurre desde la fecha de su emisión hasta la fecha de su vencimiento.	Un año.
Iniciación (inmediata)	El pago o cobro tiene lugar en el primer periodo, inmediatamente después de la emisión de un empréstito (formalización del trato).	
Pagos	Los pagos se efectúan al vencimiento del periodo o intervalo.	Al final de cada mes, El día 30 o 31.
General	Cuando el periodo de pago no coincide con el periodo de capitalización de los intereses.	El periodo de pago es de un mes y la tasa de interés de 10% anual convertible bimestralmente.

Cuadro 5. Cómo identificar una anualidad general cuando se plantea para un ejemplo o problema a realizar

Monto de anualidades generales

CD5.65
Calcular el monto de 4 pagos de $100 al final de cada bimestre si el interés es de 24% anual capitalizable mensualmente.

CD5.66
Calcular el monto de 4 pagos de $100 al final de cada bimestre, si el interés es de 24% anual capitalizable trimestralmente.

CD5.67
Encontrar el monto de 10 depósitos mensuales de $550, si el interés es de 23% anual capitalizable semestralmente.

Valor actual en anualidades generales

CD5.68
Encontrar el valor actual de un conjunto de 4 pagos trimestrales de $50, si el interés es de 36% anual convertible mensualmente.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Plazo

CD5.69
Una persona desea acumular $3 950 mediante depósitos semestrales de $75.50 en una cuenta que rinde 6.3% capitalizable bimestralmente.

CD5.70
El señor Javier Molero debe pagar un préstamo para la compra de un local en Irapuato Guanajuato. El valor de contado es de $1 450 000 y lo debe liquidar con pagos mensuales de $40 060 comenzando un mes después de la autorización del crédito hipotecario, con un interés de 9.8% efectivo anual. ¿Cuántos pagos completos debe hacer?

CD5.71
Jacinto Morales, quien es el dueño de una granja, pidió prestado al Banco Ejidal un préstamo $2 872 000 y lo va a liquidar en pagos mensuales de $280 000 comenzando un mes después de contratado el crédito; el interés pactado es de 18% efectivo anual. ¿Cuántos pagos completos tendrá que realizar Jacinto y de qué valor es el último pago menor?

Renta

CD5.72
El 15 de marzo de 2013 el comerciante Humberto Juárez compró un departamento nuevo con valor $2 000 000. De enganche dio el 50% y pretende liquidar el resto en un pago único el 15 de junio de 2014. El 28 mayo de 2014 el señor Juárez acuerda con EXE-Banco cambiar la forma de liquidar el departamento por 6 pagos mensuales y realizar el primero el 15 de octubre de 2014. La tasa de interés efectivo anual acordada es de 10.5%. ¿Cuánto tiene que pagar mensualmente el señor Juárez?

CD5.73
La secretaria Julia Martínez desea ahorrar $15 000 en los próximos 2 años. Ella puede realizar depósitos semanales en una cuenta que paga 3.6% capitalizable mensualmente. ¿Qué cantidad de dinero tiene que depositar Julia cada semana?

CD5.74
Hay un nuevo plan de ventas de un automóvil compacto con valor de $177 680. El plan consiste en dar el 30% de enganche del precio de contado, 36 pagos mensuales y la tasa de interés de 3.26% efectivo trimestral, ¿de cuánto es cada pago mensual?

Tasa

CD5.75
¿Cuál es el valor actual de un conjunto de 18 pagos semestrales anticipados de $2 500 si el interés es de 25% capitalizable trimestralmente?

CD5.76

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

El comerciante José Luis Balboa realiza por anticipado depósitos quincenales durante 8 bimestres para acumular $40 000, a una tasa de interés capitalizable de 24% cada mes. Encontrar la tasa efectiva quincenal:

Plazo

CD5.77
Adrián Méndez deposita en su cuenta de inversión en Invix-Banco la cantidad de $180 000 la cual produce 6% capitalizable mensualmente. Él piensa realizar retiros bimestrales de $9 000 dentro de 3 años. ¿Cuántos retiros de $9 000 podrá realizar Adrián?

CD5.78
La mueblería Delher ofrece una cocina integral con 24 abonos semanales de $480 e intereses del 26% capitalizable mensualmente. El primer pago se realiza dentro de 3 meses después de la compra. ¿Cuál es el precio de contado de la cocina integral?

Anualidades variables

CD5.79
El señor Gilberto Noroña invierte $10 000 al final de cada año, durante 10 años en un fondo de inversión (FI) que paga el 9%. El fondo paga los intereses al final de cada año. La persona deposita su pago anual de intereses en una cuenta de inversión inmediata (CII) en Anvex Banco, que paga de intereses el 3.5% anual. ¿Cuánto dinero tendrá al final de los 10 años?

CD5.80
La aseguradora EXE tiene que determinar el valor de los ingresos futuros del antropólogo Homero Garibay, quien sufre una lesión en la columna vertebral. En el momento del evento él percibía ingresos de $690 000 anuales y estimaba tener incrementos anuales de 4.0%. Al antropólogo Garibay le faltaban 20 años para jubilarse. Si el dinero tiene un valor de 4.5% anual, ¿cuál es el valor descontado del ingreso futuro del antropólogo Garibay?

CD5.81
El señor Zamano va a mandar pintar la fachada de su taller mecánico y encerar la pared para evitar los grafiti, trabajo que le costaría $60 540. También tiene la alternativa de poner pintura y el barniz antigrafiti. Él sabe que este gasto lo tiene que realizar cada 8 años (por siempre) y sabe que el impermeabilizante aumentará 3% anual (por siempre). ¿Cuánto deben estar dispuestos los integrantes de la familia a pagar por la pintura y el barniz antigrafiti si él puede ganar 9% anual con su dinero?

CD5.82
Calcular la serie de pagos de $30 000 que se realiza al final de 2014 y se incrementan en $4 000 cada año por siempre. La tasa del interés es de 4.6%.

Anualidades perpetuas

CD5.83
Encontrar el valor descontado de una perpetuidad simple ordinaria que paga $8 000 mensuales, con una tasa de 10% capitalizable mensualmente.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.84
Se tiene una renta perpetua de $500 000 pagadera al final de cada año. El interés que paga la institución financiera por la inversión es de 12.15% anual. ¿Cuál es el valor actual del legado?

CD5.85
Se tiene previsto que ciertas acciones generen un dividendo $600 al final de cada trimestre durante un periodo indefinido en el futuro. Si un inversionista desea obtener rendimiento anual efectivo de 10%, ¿cuánto debe pagar por las acciones?

CD5.86
¿Cuál es el pago mensual de una perpetuidad de $750 000, suponiendo una tasa de interés de 1.25% mensual?

CD5.87
¿Cuánto dinero se requiere para un fondo de beca que pague $22 000 anualmente, si el capital gana 9% anual y el primer pago se realizará al final del primer año?

CD5.88
El empresario Gerardo Degaray establece que parte de sus bienes serán invertidos de tal forma que los intereses generados se paguen al Instituto Nacional de Nutrición mediante una renta perpetua de $800 000 al inicio de cada semestre. ¿Cuál es el valor presente de este legado, suponiendo que se encuentra invertido a 10.48% interés semestral?

CD5.89
¿Cuánto puede retirar cada mes el joven Antonio Morales si le depositan en una cuenta de inversión $1 250 000? INVURSA paga una tasa de interés de 12.75% capitalizable mensualmente.

CD5.90
La contadora Yuritzi Alejo desea rentar un departamento en $4 500 mensuales. ¿Cuál es la tasa de interés si el departamento está valuado en $800 000?

CD5.91
Al señor Martínez le llega en el mes de enero de cada año un recibo del servicio de alumbrado público, desazolve del alcantarillado y limpieza de calles del municipio en que vive. En este año el recibo es de $1 834, ¿cuál será el costo estimado por bimestre, suponiendo que los bancos en promedio cargan 4.6% capitalizable bimestralmente?

CD5.92
La familia Robles acuerda crear un fondo inversión en EC Banco, el cual ofrece una tasa de interés de 9.8% capitalizable mensualmente. ¿Cuál es la renta mensual que podrían disponer 1 mes después de cumplirse los 6 años? Los retiros se realizarán por tiempo ilimitado y los ocho integrantes de la familia robles aportará al fondo $100 000 cada uno.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Ampliación del conocimiento en anualidades
Ejercicios con Excel

CDEx4.1
El ingeniero Alberto de la Rosa al leer el periódico encuentra un anuncio de venta de automóviles de la marca JM. La unidad se puede adquirir haciendo un pago inicial de $52 200 pesos y 36 pagos fijos mensuales de $2 516 pesos (no incluye el seguro automotriz) La tasa de interés es del 10% anual convertible mensualmente (i*). La fecha fijada por la empresa financiadora es el día 30 de cada mes .¿Cuánto en realidad pagaría el ingeniero de la Rosa por el automóvil, si se decidiera a comprarlo?

CDEx4.2
Encontrar el valor actual pagado por una computadora si se dió un enganche de $10 400 pesos y se realizaron 6 pagos mensuales vencidos de 1 600 pasos y un séptimo pago de 2 300 pesos,!la tasa de interés pactada es de 18% convertible mensualmente.

CDEx4.3

¿Cuánto debe pagar al final de cada mes un trabajador a la caja de ahorros del sindicato del IMSS por un crédito de 35 000 pesos pagaderos a tres años, a una tasa de interés del 4% mensual?

CDEx4.4
¿Cuántos pagos mensuales vencidos de 540 pesos se tendrían que realizar para saldar una deuda, pagadera el día de hoy de 10450 pesos, si el primer pago se realiza dentro de un mes y el interés es del 24% convertible mensualmente?

CDEx4.5
Encuentre el monto de seis pagos que debe realizar el día uno de cada mes la Sra. Ruiz, por la cantidad de 775 pesos, al comprar un Desayunador “Dinamarca” de madera de Maple con cuatro sillas tapizadas, siendo el tipo de interés del 25% anual capitalizable mensualmente.

CDEx4.6
¿Cuál es el valor de contado da una casa que compro la familia López en la colonia Fuentes del Pedregal, hace 15 años, si realizaban pagos anticipados de 30 000 pesos mensuales, con una tasa de interés del 28% anual convertible mensualmente?

CDEx4.8
¿Cuántos pagos de 775 pesos debe realizar el ingeniero Gómez, el día uno de cada mes para saldar una deuda, por la compra de un desayunador que consta de una mesa con cuatro sillas tapizadas, al cubrir su último pago el ha acumulado la cantidad de 5 000 pesos, si la tasa de interés aplicada fue del 25% anual convertible mensualmente?

CDEx4.9
Encontrar el pago total de que debe realizar el li. Hernández por la compra de un librero el día de hoy y después de tres meses realiza doce pagos al final de cada mes de 950 pesos, el interés es del 24% anual convertible mensualmente

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CDEx4.10
El médico Jesus Ramírez compra una televisión de pantalla: plana de 17" con un pago inicial de 3 000 pesos y ocho mensualidades de 3 500 pesos cada una pagando la primera después de cuatro meses de la compra, le están cobrando de intereses el 19 55% anual convertible mensualmente ¿Encontrar el precio del equipo?

CDEx4.11
El papá del alumno Arturo Anguiano deposita al 13 da julio la cantidad de 500 000 pesos en un fondo de inversión, ese mismo día inscribe a su hijo a la preparatoria. El papá tiene la idea de realizar nueve retiros semestrales a partir de cuando inscriba a si hijo en el mes de julio a la universidad, encontrar el valor de cada retiro semestral a realizar, si la tasa es del 12% anual capitalizable semestralmente

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Respuestas

¿Qué sabes?

5.1
¿Qué significa el término anualidad?
Es una serie de pagos, depósitos o retiros iguales que se efectúan a intervalos de tiempo iguales con interés compuesto.

5.2
¿Qué es una anualidad a perpetuidad o perpetua?
Su característica es de que el pago de la renta se realiza por tiempo ilimitado.

5.3
¿Cuándo se efectúan los pagos en una anualidad ordinaria?
Al vencimiento del periodo o intervalo.

5.4
¿Qué nombre recibirá la anualidad en la que los pagos se realizan al principio de cada periodo?
Anualidad anticipada.

5.5
En una anualidad diferida ¿qué es el periodo de gracia o periodo de diferimiento?
Al tiempo comprendido desde el momento inicial o de convenio hasta el inicio del plazo.

5.6
Los periodos de capitalización de la tasa de interés son periodos en donde los:
Intereses se acumulan.

5.7
¿Cómo se llama la anualidad cuando el periodo de pago es más largo que el de capitalización?
Anualidad general.

Problemas a resolver

Monto

CD5.1
Calcular el valor acumulado de una anualidad simple ordinaria de $20 000 anuales durante 5 años, a una tasa de interés de 12.5%.

Datos
$R = \$20\,000$
$T = 12.5\%$ A
$n = 5$ años
Incógnita: M

Desarrollo

$$M_1 = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$M_1 = 20\,000\left[\frac{(1.125)^5 - 1}{0.125}\right]$$

$$M_1 = 20\,000\left[\frac{1.80203 - 1}{0.125}\right]$$

$$M_1 = 20\,000\left[\frac{0.80203}{0.125}\right]$$

$$M_1 = 20\,000\big((6.41626)\big)$$

$$M_1 = \$128\,325.20$$

CD5.2
Encontrar el valor acumulado de una anualidad simple ordinaria de anuales durante 4 años, con tasa de interés de 9.5% anual capitalizable mensualmente.

Datos
$R = \$3\,000$
$T = 9.5\%$ ACM
$n = 5$ años
$i = 0.00792$ mensual
Incógnita: M

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.2 cont.

$$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$M = 3000\left[\frac{(1.00792)^4 - 1}{0.00792}\right]$$

$$M = 3000\left[\frac{0.03206}{0.00792}\right]$$

$$M = 3000(4.04798)$$

$$M = \$12\,143.31$$

CD5.3

Carlos Hernández paga cada mes una deuda de $500 por la compra de un librero. Él se atrasó 6 meses en sus pagos. Carlos llega a un acuerdo con Bancrecer para ponerse al corriente en sus pagos en noviembre del mismo año. ¿Qué cantidad tiene que pagar en septiembre, si la tasa de interés es de 24% capitalizable mensual mente?

Datos
$R = \$500$
$T = 24\%$ ACM
$n = 6$ meses
Incógnita: M

$$M_1 = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$M_1 = 500\left[\frac{(1.02)^6 - 1}{0.02}\right]$$

$$M_1 = 500\left[\frac{1.126162 - 1}{0.02}\right]$$

$$M_1 = 500\left[\frac{0.126162}{0.02}\right]$$

$$M_1 = 500(6.30812)$$

$$M_1 = \$3154.06$$

CD5.4

Juan deposita cada 3 meses $5 000 en su cuenta de ahorros, la cual paga el 6%.
¿Cuánto dinero tendrá después del depósito del 31 de mayo 2018, si el primer depósito se realizó el 31 de mayo 2014?

Datos
$R = \$5\,000$
$T = 6\%$ ACT
$i = 0.015$ trimestral
$n = 17$ trimestres
Incógnita: M

$$M = 5000\left[\frac{(1.015)^{17} - 1}{0.015}\right]$$

$$M = 5000\left[\frac{0.2880}{0.015}\right]$$

$$M = 5000(19.201)$$

$$M = \$96006.77$$

CD5.5

La doctora Antonia Cortés al leer el periódico encuentra un anuncio de venta de automóviles de la marca Maztra. Una unidad se puede adquirir con un pago inicial de $82 000 y 36 pagos fijos mensuales de $4 616 (no se incluye el seguro automotriz). La tasa de interés es de 10% anual convertible mensualmente.
La fecha fijada por la empresa financiadora Maztra es el día 30 de cada mes.
¿Cuánto pagaría en realidad la doctora Cortés por el automóvil si se decidiera a comprarlo?

Datos
Pago inicial $82 000
$R = \$4\,616$
$T = 10\%$ ACM
$i = 0.0083$ mensual
Incógnita: M

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.5 cont.

$$M_1 = 4\,616\left[\frac{(1.0083)^{36}-1}{0.0083}\right]$$

$$M_1 = 4\,66\left[\frac{0.3466}{0.0083}\right]$$

$$M_1 = 4\,616(41.7564)$$

$$M_1 = \$192\,747.66$$

Pago total = Enganche + M_1
Pago total = 82 000 + 192 747.66
Pago total = $274 747.66

CD5.6

El comunicólogo Jesús Miguel Rodríguez ha depositado $5 000 al final de cada año, en su Afore durante 15 años. Tales depósitos ganaron intereses de 9.5% durante los primeros 4 años, el 8% durante los siguientes 4 años y el 7% en los últimos 7 años. Encontrar la cantidad acumulada en el fondo para el retiro y los intereses ganados.

Datos
$R = \$5\,000$
$T_1 = 9.5\%$ anual, $n = 4$ años
$T_2 = 8\%$ anual, $n = 4$ años
$T_3 = 7\%$ anual, $n = 7$ años
$n = 15$ años
Incógnita: M

$$M_T = R\left[\frac{(1+i_1)^4-1}{i_1}\right] + R\left[\frac{(1+i_2)^4-1}{i_2}\right] + R\left[\frac{(1+i_3)^7-1}{i_3}\right]$$

$$M_T = 5000\left[\frac{(1.095)^4-1}{0.095}\right] + 5000\left[\frac{(1.08)^4-1}{0.08}\right] + 5000\left[\frac{(1.07)^7-1}{0.07}\right]$$

$$M_T = 5000\left[\frac{0.43766}{0.095}\right] + 5000\left[\frac{0.3605}{0.08}\right] + 5000\left[\frac{0.606}{0.07}\right]$$

$$M_T = 5000(4.607) + 5000(4.506) + 5000(8.6540)$$

$$M_T = 23\,034.79 + 22\,530.56 + 43270.10$$

$$M_T = 88\,835.45$$

$$I = 88\,835.45 - 75\,000$$

$$I = \$13835.45$$

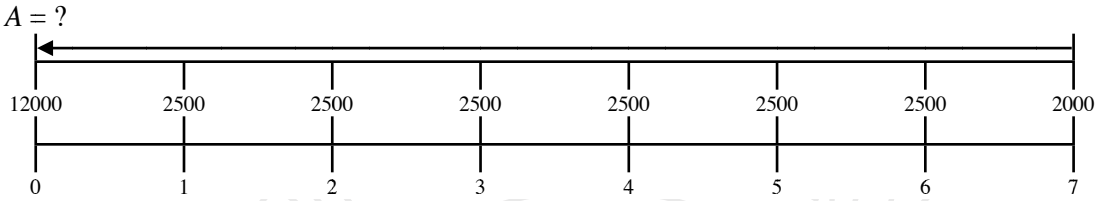
D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Valor actual o presente

CD5.7

Encontrar el valor actual pagado por una sala si se dio un enganche de $12 000 y se realizaron 6 pagos mensuales vencidos de $2 500 y un séptimo pago de $2 000. La tasa de interés pactada es de 18% capitalizable mensualmente.

Gráfica 1. Anualidad.



Datos
Enganche = $12 000
R = $2 500
Séptimo pago = $2 000
T = 18% ACM
n = 6 meses
Incógnita: A

El valor actual de la sala:

$$A = 12\,000 + 2\,500\left[\frac{1-(1.015)^{-6}}{0.015}\right] + 2\,000(1.015)^{-7}$$

$$A = 12\,000 + 2\,500\left[\frac{1-0.9145422}{0.015}\right] + 2\,000(0.90103)$$

$$A = 12\,000 + 2\,500(5.6972) + 1802.06$$

$$A = 12\,000 + 14\,243 + 1802.06$$

$$A = \$28\,045.02$$

CD5.8

El contador Francisco Castro compró un equipo de enfriamiento para su oficina mediante 36 pagos semanales vencidos de $1 240, con una tasa de interés de 18% convertible semanalmente. ¿Cuál es el valor actual?

Datos
T = 18% ACsemanal
i = 18 / 52 = 0.003462 semanal
n = 36
R = $1 240
Incógnita: A

El valor actual sería:

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$A = 1240\left[\frac{1-(1.003462)^{-36}}{0.003462}\right]$$

$$A = 1240\left[\frac{1-0.8830443}{0.003462}\right]$$

$$A = 1240\left[\frac{0.116988}{0.003462}\right]$$

$$A = 1240\left(33.792097\right)$$

$$A = \$41\,902.20$$

CD5.9

La señora Bertha Aguilar compró un servicio de lavado Mabe para su negocio de planchado. Electro-Hogar ofreció un crédito que consiste en 52 pagos semanales vencidos de $540, con una tasa de interés de 18% convertible semanalmente (VP = $ 25 657.04).

Al llegar a su casa escuchó una promoción para la compra del mismo modelo de lavadora de la mueblería Villalpando Hermanos S.A. que consiste en un pago inicial de $540 y 51 pagos semanales con una tasa de 18% convertible semanalmente. Encontrar el valor actual de esta promoción.

Datos
Pago inicial = $540
T = 18% ACsemanal
n = 52
Incógnita: A

$$A = 540 + 540\left[\frac{1-(1.003462)^{-51}}{0.003462}\right]$$

$$A = 540 + 540\left[\frac{1-0.838402}{0.003462}\right]$$

$$A = 540 + 540\left[\frac{0.161598}{0.003462}\right]$$

$$A = 540 + 540\left[46.6776\right]$$

$$A = 540 + 25\,205.90$$

$$A = \$25\,745.90$$

La razón de que el valor actual sea mayor en este segundo caso con respecto al primer caso (VP = $25 745.90), se debe a que en este segundo se realiza un pago inmediato (pago inicial).

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.10
Francisco Javier Zamudio compró un automóvil usado. Pagó $66 000 de enganche y $1 424.50 al final de cada mes durante 3 años. Calcular el precio del automóvil, si la tasa de interés es de 18%, y calcular los intereses totales sobre el préstamo.

Datos
Enganche = &66 000
R = $1 424.50
T = 18% ACM
i = 0.015 mensual
n = 36
Incógnita: Valor de contado ©

a) Cálculo del valor actual:

$$C = 66\,000 + 1424.50\left[\frac{1-(1.015)^{-36}}{0.015}\right]$$

$$C = 66\,000 + 1424.50\left[\frac{1-0.5851}{0.015}\right]$$

$$C = 66\,000 + \$1424.50\left[\frac{0.4149}{0.015}\right]$$

$$C = 66\,000 + \$1424.50\left[27.66\right]$$

$$C = 66\,000 + 39\,402.64$$

$$C = \$105\,402.64 \text{ valor de contado}$$

b) Cálculo de intereses

Intereses totales = Total de pagos por el crédito de la cantidad prestada
Intereses totales = (36 × 1 424.50) – 39 402.64
Intereses totales = 51 282 – 39 402.64
Intereses totales = $11 879.36

recursos · gratuitos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.11

La fábrica textil Tacoma S.A. está analizando qué tipo de equipo nuevo de cómputo debe comprar. El equipo seleccionado tiene un valor de contado de $88 000, con valor de salvamento de $9 000 al final del sexto año. Los costos de mantenimiento serán de $400 al mes, pagaderos al final de cada mes. La fábrica textil puede ganar 18% sobre el capital. Si en la fábrica decidieran rentar el equipo de cómputo les costaría $3 500 al mes durante los 6 años, con la salvedad de que el arrendatario paga el costo de mantenimiento. ¿Cuál de los dos casos es el más recomendable?

Para cada caso se debe calcular el Valor Presente Neto (VPN).

VPN = Valor presente de entradas en efectivo – Valor presente de salidas en efectivo

$$\text{VPN de compras} = 9000\left(1.015\right)^{-72} - \left[88\,000 + 400\left[\frac{1-\left(1+0.015\right)^{-72}}{0.015}\right]\right]$$

$$\text{VPN de compras} = 3\,080.97 - \left[88\,000 + 400\left(43.844667\right)\right]$$

$$\text{VPN de compras} = 3\,080.97 - \left(88\,000 + 17\,537.87\right)$$

$$\text{VPN de compras} = 3\,080.97 - 105\,537.87$$

$$\text{VPN de compras} = -\$102\,456.90$$

$$\text{VPN de renta} = -1500\left[\frac{1-\left(1+0.015\right)^{-72}}{0.015}\right]$$

$$\text{VPN de renta} = -1\,500\left(43.844666\right)$$

$$\text{VPN de renta} = -\$65\,767$$

Como el VPN de renta es menor en valor absoluto que el VPN de compra, entonces la fábrica textil Tacoma, S.A. debe rentar el equipo de cómputo.

CD5.12

La comerciante Alba Rosales compró mercancía para miscelánea. Dio un enganche de $6 000 y acordó pagar la mercancía realizando pagos de $2 250 mensuales durante 3 años a una tasa de 24%.

a) Encontrar el valor de contado de la mercancía.

b) Después del pago 24 el contrato se vende a una institución financiera en un precio que rinde el 20%. ¿Cuánto pagó la institución financiera por el documento?

a)

$$C = 6\,000 + 2\,250\left[\frac{1-\left(1.02\right)^{-36}}{0.02}\right]$$

$$C = 6\,000 + 2\,250\left(25.488842\right)$$

$$C = 6\,000 + 57\,349.89$$

$$C = \$63\,349.89$$

b)

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$x = 2\,250\left[\frac{1-(1.016666)^{25}}{0.016666}\right]$$
$$x = 2\,250\,(30.701533)$$
$$x = \$69\,078.44$$

CD5.13

Calcular el valor presente de una anualidad de $2 400 al final de cada mes durante 4 años, pagando una renta de $2 400 al final de cada mes durante 3 años a una tasa de interés de 10.38% capitalizable mensualmente.

$$A = 2\,400\left[\frac{1-(1.00865)^{-48}}{0.00865}\right]$$
$$A = 2\,400\left[\frac{1-0.661388}{0.00865}\right]$$
$$A = 2\,400\left[\frac{0.338612}{0.00865}\right]$$
$$A = 2\,400(39.14589)$$
$$A = \$93950.13$$

Renta

CD5.14

La pastelería La Espiga en su sucursal de Calzada del Hueso estima que será necesario cambiar dos horno pequeños de pan dentro de 10 años, a un costo $1 568 000. ¿Cuánto deben guardar cada año en un fondo de inversión si el banco ofrece una tasa de 4.6% anual?

Datos
$M = \$1\,568\,000$
$n = 10$ años
$T = 4.6\%$ anual
Incógnita: R

$$R = \frac{M(i)}{(1+i)^{n}-1}$$
$$R = \frac{1568\,000(0.046)}{(1.046)^{10}-1}$$
$$R = \frac{72128}{1.5678945-1}$$
$$R = \frac{72128}{0.5678945}$$
$$R = \$127\,009.50 \text{ anual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.15
¿Cuánto debe depositar Alma al final de cada mes en su cuenta de ahorros durante 3 años? Alma estima acumular la cantidad $65 000 en el momento de realizar el último depósito. La tasa de interés es de 1% mensual.

Datos
$M = \$65\,000$
$n = 3$ años $= 36$ meses
$i = 0.01$ mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{M(i)}{(1+i)^n - 1}$$
$$R = \frac{65\,000(0.01)}{(1.01)^{36} - 1}$$
$$R = \frac{650}{1.4307687 - 1}$$
$$R = \frac{650}{0.4307687}$$
$$R = \$1508.93 \text{ mensual}$$

CD5.16
Un bufete de abogados desea comprar unos sillones para la sala de espera y una mesa con 12 sillas para la sala de juntas. ¿Cuántos depósitos al final de cada mes debe realizar el administrador del bufete en los próximos 3 años para acumular $130 000? Una institución financiera le ofrece una tasa de interés de 8.35% convertible mensualmente.

Datos
$M = \$3\,000$
$n = 36$ meses
$T = 8.35\%$ ACM
$i = 0.006958$ mensual
Incógnita: R

CD5.16 cont.
$$R = \frac{130\,000(0.006958)}{(1.006958)^{36} - 1}$$
$$R = \frac{904.54}{1.283554 - 1}$$
$$R = \frac{904.54}{0.283554}$$
$$R = \$3190.01 \text{ mensual}$$

CD5.17
El sociólogo Olguín solicita a Banorte un crédito de 3 meses de su sueldo para pagar la operación de su esposa en un hospital particular. El sueldo que le deposita en su cuenta de inversión la compañía Constructora del Sureste S. A. es de $30 000 quincenales. Por política de Banorte los pagos del crédito son fijos y quincenales con un plazo de 18 meses, y una tasa de interés de 18% anual convertible quincenalmente. El pago quincenal no incluye el IVA. ¿Cuánto debe pagar el sociólogo Olguín cada quincena?

Datos
$A = \$30\,000$
Plazo $= 18$ meses
$n = 36$ pagos quincenales
$T = 18\%$ ACquincenal
$i = 0.0075$ quincenal
Incógnita: R

$$R = \frac{A(i)}{1-(1+i)^{-n}}$$
$$R = \frac{\$30\,000(0.0075)}{1-(1.0075)^{-36}}$$
$$R = \frac{225}{1-0.764148}$$
$$R = \frac{225}{0.235851}$$
$$R = \$953.99 \text{ quincenales}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.18
El día de hoy el señor Víctor Delgadillo le compra a su hija a crédito una computadora de $15 990 más IVA. El señor Delgadillo acuerda pagarla en 12 mensualidades vencidas. ¿Cuánto tiene que pagar cada mes si el interés que le cobran es de 1.5% mensual?

Datos
$A = \$15\,990.00 + \text{IVA}$
$A = \$15\,990.00 + \$2\,558.40$
$A = \$18\,548.40$
$n = 12$ meses
$T = 1.5\%$ mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{18\,548.40\,(0.015)}{1-(1.015)^{-12}}$$
$$R = \frac{278.226}{1-0.8363874}$$
$$R = \frac{278.226}{0.16361258}$$
$$R = \$1700.52 \text{ mensual}$$

CD5.19
¿Cuánto debe pagar al final de cada mes un trabajador a la caja de ahorros del sindicato del IMSS, por un crédito de $100 000 pagaderos a 3 años y con una tasa de interés del 4% mensual?

Datos
$A = \$100\,000$
$n = 3$ años $= 36$ pagos
$i = 0.04$ mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{\$100\,000\,(0.04)}{1-(1.04)^{-36}}$$
$$R = \frac{4\,000}{1-0.243669}$$
$$R = \frac{4\,000}{0.7563313}$$
$$R = \$5\,288.68 \text{ mensual}$$

CD5.20
Una sala cuesta $27 500. Usted puede dar un enganche $2 000 y la diferencia en pagos mensuales vencidos durante 2 años. ¿Cuánto debe pagar al final de cada mes si el interés es del 15% anual capitalizable mensualmente?

Datos
$C = \$27\,500$
$A = \$25\,500$
$n = 2$ años $= 24$ pagos
$T = 15\%$ ACM
$i = 0.0125$ mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{25\,500\,(0.0125)}{1-(1.0125)^{-24}}$$
$$R = \frac{318.75}{1-0.74219}$$
$$R = \frac{318.75}{0.257803}$$
$$R = \$1236.41 \text{ mensual}$$

CD5.21
La licenciada Verónica Zamora ha realizado depósitos mensuales vencidos de $850 en su cuenta de ahorros que paga intereses de 9.25% capitalizable mensualmente. ¿Qué cantidad debe depositar mensualmente durante los próximos 3 años siguientes para alcanzar la cantidad de $108 000?

Datos
$R = \$850.00$
$n = 5$ años $= 60$ pagos
$T = 9.25\%$ ACM

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$i = 0.0077083$ mensual
$m = 36$ pagos
$M = \$108\,000$
Incógnita: R_x

$$108\,000 = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)^m + R_x\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$108\,000 = 850\left[\frac{(1+0.0077083)^{60} - 1}{0.0077083}\right](1.0077083)^{36} + R_x\left[\frac{(1+0.0077083)^{36} - 1}{0.0077083}\right]$$

$$108\,000 - 850\left[\frac{0.585222}{0.0077083}\right](1.0077083)^{36} = R_x\left[\frac{(1+0.0077083)^{36} - 1}{0.0077083}\right]$$

$$108\,000 - 850(75.9211)(1.31842) = R_x\left[\frac{0.31842}{0.0077083}\right]$$

$$108\,000 - 85\,081.57 = R_x(41.3088)$$

$$22\,918.43 = R_x(41.3088)$$

$$R_x = \$554.807$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Plazo

CD5.22

La mamá de Sonia tiene que saldar una deuda el día hoy por $980. Acuerda diferir su adeudo realizando pagos de $165 al final de cada bimestre con una tasa de interés de 11% bimestral.
¿Cuántos pagos bimestrales vencidos de $165 tendrá que hacer para saldar su deuda?

Datos
$T = 11\%$ bimestral
$i = 0.11$ bimestral
$R = \$165$
$A = \$980$
Incógnita: n

$$n = \frac{\log\left[\frac{1}{1-\frac{Ai}{R}}\right]}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log\left[\frac{1}{1-\frac{980(0.11)}{165}}\right]}{\log(1.11)}$$

$$n = \frac{\log\left[\frac{1}{1-\frac{107.80}{165}}\right]}{\log(1.11)}$$

$$n = \frac{\log\left[\frac{1}{0.346667}\right]}{\log(1.11)}$$

$$n = \frac{\log[2.884615]}{\log(1.11)}$$

$$n = \frac{0.4600879}{0.0453229}$$

$n = 10.1513$ pagos bimestrales

Como no se pueden realizar 10.1513 pagos, entonces existen dos alternativas:

1)Hacer 10 pagos de $165 + otro pago menor

Encontrar el valor futuro del adeudo al final de los 10 bimestres de la siguiente manera:
Si el adeudo es de $980, ahora debemos conocer el valor futuro del adeudo al final de los 10 bimestres.

$$M = C(1+i)^n = 980(1.11)^{10} = \$2\,782.63$$

Posteriormente, debemos encontrar el valor futuro de los 10 pagos realizados al final de cada bimestre.

$$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$M = 165\left[\frac{(1.11)^{10} - 1}{0.11}\right]$$

$$M = 165\left[\frac{1.839421}{0.11}\right]$$

$$M = 165(16.72)$$

$$M = \$2\,759.13$$

Después de realizar el décimo pago la mamá de Sonia todavía tendría un adeudo, pero desconocería de cuánto es. Lo encontraremos de la siguiente manera:

$M_{IC} - M_{\text{anualidad}} = 2\,782.63 - 2\,759.13$
$M_{IC} - M_{\text{anualidad}} = \$23.49$

El adeudo anterior se tiene que pagar a final del decimoprimer bimestre, para lo cual es necesario calcular su valor futuro.

$$M = C(1+i)^n = 23.49(1.11)^1 = 26.08$$

Lo que representa un pago menor para el decimoprimer bimestre

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.22 cont.
2) Hacer 9 pagos de $165 + otro pago mayor.

El adeudo es de $980, por lo que primero se debe conocer el valor futuro del adeudo al final de los 9 bimestres.

$$M = C(1+i)^n = 980\,(1.11)^9 = \$2\,506.876$$

Como segundo paso encontraremos el valor futuro de los 9 pagos realizados al final de cada bimestre.

$$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$M = 165\left[\frac{(1.11)^9 - 1}{0.11}\right]$$

$$M = 165\left[\frac{1.558}{0.11}\right]$$

$$M = 165(14.1639)$$

$$M = \$2\,337.05$$

Después de realizar el noveno pago la mamá de Sonia todavía tiene un adeudo y desconoce de cuánto es. El pago correspondiente se encuentra de la manera siguiente:

$M_{IC} - M_{\text{anualidades}} = 2\,506.87 - 2\,337.05$
$M_{IC} - M_{\text{anualidades}} = \$169.81$

El adeudo anterior se tiene que pagar al final del décimo bimestre, por lo que es necesario calcular su valor futuro correspondiente:

$$M = C(1+i)^n = 169.81(1.11)^1 = \$188.49$$

Es el décimo pago que es mayor al pago bimestral normal.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.23
¿Cuántos pagos mensuales vencidos de $540 se tendrían que realizar para saldar una deuda, pagadera el día de hoy de $10 450, si el primer pago se realiza dentro de un mes y el interés es de 24% convertible mensualmente?

Datos
$T = 24\%$ ACM
$i = 0.02$ mensual
$R = \$540$
$A = \$10\,450$
Incógnita: n

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{1-\frac{10450(0.02)}{540.00}}\right)}{\log(1.02)}$$

$$= \frac{\log(1.63142)}{\log(1.02)}$$

$$= \frac{0.21257}{0.00860}$$

$$= 24.72 \text{ pagos mensuales}$$

Como no se pueden realizar 24.72 pagos, entonces existen dos alternativas:

Calcular el valor futuro del adeudo mediante dos procedimientos.

1) Hacer 24 pagos de $540 + un pago menor.

Si el adeudo es de $10 450 primero se debe conocer el valor futuro del adeudo al final de los 24 meses.

$$M = C(1+i)^n = 10\,450(1.02)^{24}$$
$$M = \$16\,808.17$$

Posteriormente debemos encontrar el valor futuro de los 24 pagos realizados al final de cada mes.

CD5.23 cont.

$$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$M = 540\left[\frac{(1.02)^{24} - 1}{0.02}\right]$$

$$M = \$16\,427.81$$

Cuando ya se realizó el pago 24 todavía existe un adeudo y se desconoce de cuánto es. El pago correspondiente se encuentra de la siguiente forma:

$M_{IC} - M_{\text{anualidad}} = 16\,808.17 - 16\,427.81$
$M_{IC} - M_{\text{anualidad}} = \$380.36$

El adeudo anterior se tiene que pagar a final del mes 25, por lo que es necesario calcular su valor futuro:

$$M = C(1+i)^n = 380.36(1.02)^1 = \$387.97$$

Que corresponde a un pago menor en el mes 25

2) Hacer 23 pagos de $540 y un pago final mayor.
El adeudo es de $10 450, por lo que ahora se puede calcular el valor futuro del adeudo al final del mes 23.

$$M = C(1+i)^n = 10\,450(1.02)^{23} = \$16\,478.60$$

Entonces el valor futuro de los 23 pagos realizados al final de cada mes sería:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$M = 540\left[\frac{(1.02)^{23} - 1}{0.02}\right]$$

$$M = \$15\,576.28$$

Después de realizar el pago 23 el deudor todavía tiene un adeudo y desconoce de cuánto es. El pago

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

correspondiente a este último adeudo se calcula en la forma siguiente:

$M_{IC} - M_{\text{anualidad}} = 16\,478.60 - 15\,576.28$
$M_{IC} - M_{\text{anualidad}} = \$902.32$
El adeudo anterior se tiene que pagar al final del vigesimocuarto mes, por lo que se necesita calcular su valor futuro.

$$M = C(1+i)^n = 902.32(1.02)^1 = \$920.37$$

El cual representa un pago mayor en el mes 24.

CD5.24
¿Cuántos pagos mensuales vencidos de $3 019.25 se tendrían que realizar para saldar una deuda, pagadera el día de hoy de $500 000, si el primer pago se realiza dentro de un mes y el interés es de 12% convertible mensualmente?

Datos
$T = 12\%$ ACM
$i = 0.12$ mensual
$R = \$3\,019.25$
$C = \$500\,000$
Incógnita: n

$$n = \frac{\log\left[\frac{1}{1-\frac{Ai}{R}}\right]}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{1-\frac{500\,000(0.01)}{3019.25}}\right)}{\log(1.01)}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{0.65604}\right)}{\log(1.01)}$$

$$n = \frac{\log(1.5242973)}{\log(1.01)}$$

$$n = \frac{0.18306968}{0.004321374}$$

$n = 42.37$ pagos mensuales

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.25
¿El físico Javier Mendoza desea acumular la cantidad de $50 000. Para reunir esta cantidad decide hacer depósitos de $600 bimestrales vencidos, en una cuenta de inversión la cual paga el 8.5% anual capitalizable bimestralmente. ¿En cuánto tiempo el físico reunirá los $50 000?

Datos
$T = 8.5\%$ ACB
$i = 0.014167$ bimestral
$R = \$600$
$M = \$50\,000$
Incógnita: n

$$n = \frac{\log\left(\frac{50\,000(0.014167)}{600} + 1\right)}{\log(1 + 0.014167)}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{708.35}{600} + 1\right)}{\log(1 + 0.014167)}$$

$$n = \frac{\log(1.18058 + 1)}{\log(1.014167)}$$

$$n = \frac{\log(2.18058)}{\log(1.014167)}$$

$$n = \frac{0.338567}{0.006109}$$

$n = 55.41$ bimestres

CD5.26
¿Cuántos pagos mensuales vencidos de $3 019.25 se tendrían que realizar para juntar la cantidad de $300 000, si el primer pago se realiza dentro de un mes y el interés es de 12% convertible mensualmente?

Datos
$T = 12\%$ ACM
$i = 0.01$ mensual
$R = \$3\,019.25$
$M = \$300\,000$
Incógnita: n

$$n = \frac{\log\left(\frac{300\,000(0.01)}{3019.25} + 1\right)}{\log(1 + 0.01)}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{3000}{3019.25} + 1\right)}{\log(1 + 0.01)}$$

$$n = \frac{\log(0.993624 + 1)}{\log(1.01)}$$

$$n = \frac{\log(1.993624)}{\log(1.01)}$$

$$n = \frac{0.2996433}{0.0043213}$$

$n = 69.33$ pagos mensuales

Anualidades anticipadas

CD5.27
Un artesano deposita en una cuenta de ahorros $50 al principio de cada mes. Si la cuenta paga 2.3% mensual de interés, ¿cuánto habrá ahorrado durante el primer año?

Datos
$R = \$50$
$n = 12$ meses
$i = 2.3\%$ mensual
Incógnita: M

Para solucionar ese problema existen tres alternativas

1)
a) En este primer caso se encuentra el monto utilizando la anualidad vencida durante el periodo 11 y realizando para ello 12 pagos.

$$M_{11} = R\left[\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right] = 50\left[\frac{(1+0.023)^{12} - 1}{0.023}\right] = \$682.03$$

b) Para cubrir el plazo de un año hace falta calcular el periodo número 12, ya que en el cálculo anterior el periodo inició en el punto –1, y el cálculo del monto se realizó hasta el periodo 11.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.27 cont.

Si $M_{11} = C_1$

$$M_{12} = C_1(1+i) = 682.03(1.023) = \$697.72$$

2)

a) En este segundo caso utilizaremos la ecuación (9) que se deduce de los pasos planteados en los incisos 1.1 y 1.2:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)^1$$

$$M = 50\left[\frac{(1.023)^{12} - 1}{0.023}\right](1.023)^1$$

$$M = \$697.72$$

3)

a) Los cálculos se hacen con base en 12 periodos, por lo que se tendrán que realizar 13 pagos. Para calcular el monto se utiliza la ecuación de la anualidad vencida en la que se deberá restar el pago número 13:

$$M = R\left[\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right]$$

b) Sustituyendo valores en la fórmula de monto de anualidad vencida se obtiene:

$$M = R\left[\frac{(1+t)^{13} - 1}{t}\right]$$

$$M = 50\left[\frac{(1.023)^{13} - 1}{0.023}\right]$$

$$M = \$747.72$$

c) El monto de 13 pagos calculado con la anualidad vencida en 12 periodos es superior al calculado en los incisos 1.1 y 2.1 porque se realizó un pago de más. Para corregir dicho pago debemos modificar la ecuación de la siguiente forma:

$$M = R\left[\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right] - R$$

$$M = 50\left[\frac{(1.023)^{13} - 1}{0.023}\right] - 50$$

$$M = 747.72 - 50$$

$$M = \$697.72$$

d) De los pasos anteriores se deduce que la ecuación para calcular el monto de la anualidad anticipada es:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

$$M = 50\left[\frac{(1.023)^{13} - 1}{0.023} - 1\right]$$

$$M = \$697.72$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.28
Encontrar el monto de 18 pagos que debe realizar al principio de cada bimestre el anestesista Joaquín Murillo, si la cantidad que deposita bimestralmente es de $1 985. El interés es de 15% anual capitalizable bimestralmente.

Datos
$R = \$1\ 985$
$n = 18$ bimestres
$T = 15\%$ ACbimestral
$i = 0.025$ bimestral
Incógnita: M

$$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)^1$$

$$M = 1985\left[\frac{(1.025)^{18} - 1}{0.025}\right](1.025)$$

$$M = 1985\left[\frac{1.15596587 - 1}{0.025}\right](1.025)$$

$$M = 1985\left[\frac{0.15596587}{0.025}\right](1.025)$$

$$M = 1985(22.386348)(1.025)$$

$$M = \$45\ 547.82$$

CD5.29
Determinar el monto de 6 pagos que debe realizar el día uno de cada mes el plomero Feliciano Arroyo, por la cantidad de $985, para la compra de herramienta para su negocio. El tipo de interés contratado es de 25% anual capitalizable mensualmente.

Datos
$R = \$985$
$n = 6$ meses
$T = 25\%$ ACM
$i = 0.020833$ mensual
Incógnita: M

$$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)^1$$

$$M = 985\left[\frac{(1.02083)^6 - 1}{0.02083}\right](1.02083)$$

$$M = 985\left[\frac{0.131694}{0.02083}\right](1.02083)$$

$$M = 985(6.322328895)(1.02083)$$

$$M = \$6\,357.21$$

CD5.30
El pianista Alfredo Cerdán desea comprar una casa dentro de 4 años y decide guardar su dinero en un fondo de inversión realizando 24 depósitos bimestrales adelantados de $22 850. El interés que proporciona este fondo es de 13% anual capitalizable bimestralmente. ¿Cuánto dinero tendrá el pianista Alfredo Cerdán dentro de 4 años?

Datos
$R = \$22\ 850$
$n = 24$ bimestres
$T = 13\%$ ACB
$i = 0.021667$
Incógnita: M

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

$$M = 22\,850\left[\frac{(1.021667)^{25} - 1}{0.021667} - 1\right]$$

$$M = 22\,850\left[\frac{0.708968}{0.021667} - 1\right]$$

$$M = 22\,850[32.721135 - 1]$$

$$M = 22\,850(31.721135)$$

$$M = \$724\ 827.94$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.31
Encuentre el monto de 6 pagos de $775 que debe realizar el día uno de cada mes el señor Enrique Pruneda, por la compra de un desayunador para su consultoría. El tipo de interés es de 25% anual capitalizable mensualmente.

Datos
$R = \$775$
$n = 6$ meses
$T = 25\%$ ACM
$i = 0.0208333$ mensual
Incógnita: M

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]$$

$$M = 775\left[\frac{(1.0208333)^{7}-1}{0.0208333}-1\right]$$

$$M = 775\left[\frac{0.1552708}{0.0208333}-1\right]$$

$$M = 775\left[7.45301-1\right]$$

$$M = 775.00\left(6.452301\right)$$

$$M = \$5001.08$$

Valor actual en anualidades anticipadas

CD5.32
¿Cuál es el valor de contado de una casa que compró la diputada Amalia González en la colonia Fuentes del Pedregal, hace 15 años, si realizaba pagos anticipados de $50 000 mensuales, con una tasa de interés de 28% anual convertible mensualmente?

Datos
$R = \$50\,000$
$n = 180$ meses
$T = 28\%$ ACM
$i = 0.02333$ mensual
Incógnita: A

$$A = R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$A = 50\,000\left[1+\frac{1-(1.02333)^{-180+1}}{0.02333}\right]$$

$$A = 50\,000\left[1+\frac{1-0.01611345}{0.02333}\right]$$

$$A = 50\,000\left[1+\frac{0.9838865}{0.02333}\right]$$

$$A = 50\,000\left(43.17258894\right)$$

$$A = \$2\,158\,629.45$$

CD5.33
¿Cuál es el valor actual de 12 pagos trimestrales anticipados de $1 500, con un interés de 7.68% anual capitalizable trimestralmente.

Datos
$R = \$1\,500$
$n = 12$ trimestres
$T = 28\%$ ACM
$i = 0.0192$ trimestral
Incógnita: A

$$A = R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$A = 1\,500\left[1+\frac{1-(1.0192)^{-12+1}}{0.0192}\right]$$

$$A = 1\,500\left[1+\frac{1-(1.0192)^{-11}}{0.0192}\right]$$

$$A = 1\,500\left[1+\frac{1-0.88112345}{0.0192}\right]$$

$$A = 1\,500\left[1+\frac{0.1887654}{0.0192}\right]$$

$$A = 1\,500\left[1+9.831534\right]$$

$$A = 1\,500\left(10.831534\right)$$

$$A = \$16\,247.30$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.34
Encontrar el valor de contado de un sistema de videojuego por el cual se realizaron 18 pagos mensuales anticipados de $433 con una tasa de interés de 13.6% capitalizable mensualmente.

Datos
$R = \$433$
$n = 18$ meses
$T = 13.6\%$ ACM
$i = 0.013333$
Incógnita: A

$$A = R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$
$$A = 433\left[1+\frac{1-(1.013333)^{-18+1}}{0.013333}\right]$$
$$A = 433\left[1+\frac{1-(1.013333)^{-17}}{0.013333}\right]$$
$$A = 433\left[1+\frac{1-0.79838}{0.013333}\right]$$
$$A = 433\left[1+\frac{0.2016185}{0.013333}\right]$$
$$A = 433\left[1+15.1217655\right]$$
$$A = 433\left[16.1217655\right]$$
$$A = \$6\,980.72$$

CD5.35
La licenciada Jimena Soria compró a crédito una camioneta usada para transportar sus mercancías. Tuvo que realizar 24 pagos mensuales anticipados de $5 890 y los intereses que le cobran son de 18% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál es el valor de contado de la camioneta?

Datos
$R = \$5\,890$
$n = 24$ meses
$T = 18\%$ ACM
$i = 0.01$
Incógnita: C

$$C = R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$
$$C = 5\,980\left[1+\frac{1-(1.015)^{-24+1}}{0.013333}\right]$$
$$C = 5\,980\left[1+\frac{1-(1.015)^{-23}}{0.015}\right]$$
$$C = 5\,980\left[1+\frac{1-0.710037}{0.015}\right]$$
$$C = 5\,980\left[1+\frac{0.28996}{0.015}\right]$$
$$C = 5\,980\left[1+19.33086\right]$$
$$C = 5\,980\left[20.33086\right]$$
$$C = \$121\,578.55$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Renta en anualidades anticipadas

CD5.36

¿Cuánto debe pagar mensualmente el señor Cándido por la compra de un comedor y una sala? El acordó con la mueblería realizar sus pagos el día 1 de cada mes y cuando realizó su noveno pago acumuló $44 819 y la tasa de interés aplicada fue de 18% anual convertible mensualmente.

Datos
$M = \$44\,819$
$n = 9$ meses
$T = 18\%$ ACM
$i = 0.015$ mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{M}{\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]}$$

$$R = \frac{44\,819}{\left[\frac{(1.015)^{9+1}-1}{0.015}-1\right]}$$

$$R = \frac{44\,819}{\left[\frac{(1.015)^{10}-1}{0.015}-1\right]}$$

$$R = \frac{44\,819}{\left[\frac{1.16054-1}{0.015}-1\right]}$$

$$R = \frac{44\,819}{\left[\frac{0.16054}{0.015}-1\right]}$$

$$R = \frac{\$44\,819}{\left[10.702722-1\right]}$$

$$R = \frac{44\,819}{9.702722}$$

$R = \$4\ 619.22$

CD5.37

La psicóloga Angélica Oviedo tiene que pagar un préstamo personal de $100 000 en un plazo de 2 años. El día de pago fijado por Bansur es el primero de cada mes durante el tiempo que dure el plazo. ¿Cuánto debe pagar cada mes la psicóloga, si la tasa de interés aplicada es de 18% anual convertible mensualmente.

Datos
$M = \$100\,000$
$n = 24$ meses
$T = 18\%$ ACM
$i = 0.015$ mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{M}{\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]}$$

$$R = \frac{100\,000}{\left[\frac{(1.015)^{24+1}-1}{0.015}-1\right]}$$

$$R = \frac{100\,000}{\left[\frac{(1.015)^{25}-1}{0.015}-1\right]}$$

$$R = \frac{100\,000}{\left[\frac{1.4509454-1}{0.015}-1\right]}$$

$$R = \frac{100\,000}{\left[\frac{0.4509454}{0.015}-1\right]}$$

$$R = \frac{100\,000}{\left[30.063024-1\right]}$$

$$R = \frac{100\,000}{29.063024}$$

$R = \$3\ 440.79$

Recursos Académicos en línea

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.38
Juan Manuel decide regalarle a su mamá una batería de cocina de 12 piezas con un precio de $3 540 y también decide comprarle una olla de presión de aluminio de 6 litros con un precio de $999. ¿Cuánto debe pagar al inicio de cada mes durante 6 meses para liquidar el gasto de la batería y la olla, si la tasa de interés es de 24% anual convertible mensualmente?

Datos
$A = 3540 + 999 = \$4\,539$
$n = 6$ meses
$T = 24\%$ ACM
$i = 0.02$ mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{A}{\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]}$$

$$R = \frac{4\,539}{\left[1 + \frac{1-(1.02)^{-6+1}}{0.02}\right]}$$

$$R = \frac{4\,539}{\left[1 + \frac{1-(1.02)^{-5}}{0.02}\right]}$$

$$R = \frac{4\,539}{\left[1 + \frac{1-0.90573}{0.02}\right]}$$

$$R = \frac{4\,539}{\left[1 + \frac{0.0942692}{0.02}\right]}$$

$$R = \frac{4\,539}{\left[1 + 4.713459\right]}$$

$$R = \frac{4\,539}{5.713459}$$

$$R = \$794.44$$

CD5.39
La fábrica de muebles Delgado Hermanos S.A. pone a la venta un comedor con valor de contado de $68 000 o mediante 12 abonos mensuales anticipados. El interés es de 16.8% anual convertible mensualmente. Encontrar el valor de cada pago.

Datos
$A = \$68\,000$
$n = 12$ meses
$T = 16.8\%$ ACM
$i = 0.014$ mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{A}{\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]}$$

$$R = \frac{68\,000}{\left[1 + \frac{1-(1.014)^{-12+1}}{0.014}\right]}$$

$$R = \frac{68\,000}{\left[1 + \frac{1-(1.014)^{-11}}{0.014}\right]}$$

$$R = \frac{68\,000}{\left[1 + \frac{1-0.858188}{0.014}\right]}$$

$$R = \frac{68\,000}{\left[1 + \frac{0.1418119}{0.014}\right]}$$

$$R = \frac{68\,000}{\left[1 + 10.12942\right]}$$

$$R = \frac{68\,000}{11.12942}$$

$$R = \$6\,109.93$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.40
Bicimundo pone a la venta en el mes de diciembre bicicletas de montaña rodada 28, con valor de $7 819.50 al contado o mediante 9 pagos mensuales anticipados. Si el joven Juan de Dios decide comprar una bicicleta a crédito, ¿cuánto tiene que pagar al principio de cada mes, si el interés a pagar es de 26% anual capitalizable mensualmente?

Datos
$A = \$7\,819.50$
$n = 9$ meses
$T = 26\%$ ACM
$i = 0.021666$ mensual
Incógnita: R

$$R = \frac{A}{\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]}$$

$$R = \frac{7\,819.50}{\left[1 + \frac{1-(1.021666)^{-9+1}}{0.021666}\right]}$$

$$R = \frac{7\,819.50}{\left[1 + \frac{1-(1.021666)^{-8}}{0.021666}\right]}$$

$$R = \frac{7\,819.50}{\left[1 + \frac{1-0.84241522}{0.021666}\right]}$$

$$R = \frac{7\,819.50}{\left[1 + \frac{0.157584775}{0.021666}\right]}$$

$$R = \frac{7\,819.50}{\left[1 + 7.2733673\right]}$$

$$R = \frac{7\,819.50}{8.2733673}$$

$$R = \$945.14$$

Plazo en anualidad anticipada

CD5.41
El arquitecto Martín Morales desea comprar cuatro archiveros de tres cajones de madera para su oficina con valor de $20 000 al contado. También los puede comprar en abonos anticipados mensuales de $1 569.15, con un interés de 27% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuántos pagos tendría que hacer el arquitecto Morales si decide comprar los archiveros en abonos?

Datos
$A = \$20\,000$
$T = 27\%$ ACM
$i = 0.0225$ mensual
$R = \$1\,569.15$
Incógnita: n

$$n = 1 - \left[\frac{\log\left[(1+i) - \frac{Ai}{R}\right]}{\log(1+i)}\right]$$

$$n = 1 - \left[\frac{\log\left[(1.0225) - \frac{(20000.00)(0.0225)}{\$1569.15}\right]}{\log(1.0225)}\right]$$

$$n = 1 - \left[\frac{\log\left[(1.0225) - \frac{450}{\$1569.15}\right]}{\log(1.0225)}\right]$$

$$n = 1 - \left[\frac{\log\left[1.0225 - 0.286779\right]}{\log(1.0225)}\right]$$

$$n = 1 - \left[\frac{\log(0.73572)}{\log(1.0225)}\right]$$

$$n = 1 - \left[\frac{-0.133287}{0.009663}\right]$$

$$n = 1 - (-13.79)$$

$$n = 14.79 \text{ pagos}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.42
La trabajadora social Isabela compra un paquete de cocina que consta de una cafetera para 10 tazas, extractor de jugos, juego de sartenes con teflón (16 piezas). El precio de contado del paquete es de $5 866, Isabela decide pagarlo en abonos con una la tasa de interés de 18% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuántos pagos de $585 debe realizar al principio de cada mes?

Datos
$A = \$5\,866$
$T = 18\%$ ACM
$i = 0.015$ mensual
$R = \$585$
Incógnita: n

$$n = 1 - \left[\frac{\log\left[(1+i) - \frac{Ai}{R}\right]}{\log(1+i)}\right]$$

$$n = 1 - \left[\frac{\log\left[(1.015) - \frac{(5\,866)(0.015)}{585.00}\right]}{\log(1.015)}\right]$$

$$n = 1 - \left[\frac{\log\left[(1.015) - \frac{87.99}{585.00}\right]}{\log(1.015)}\right]$$

$$n = 1 - \left[\frac{\log\left[1.015 - 0.15041\right]}{\log(1.015)}\right]$$

$$n = 1 - \left[\frac{\log(0.8645897)}{\log(1.015)}\right]$$

$$n = 1 - \left(\frac{-0.0631899}{0.006466}\right)$$

$$n = 1 - ((-9.77258))$$

$$n = 10.77 \text{ pagos}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.43

La tienda Ciclobici vende de contado una motocicleta en $8 560 o mediante pagos mensuales anticipados de $995. El interés es de 19.64% anual convertible mensualmente. ¿Cuántos pagos se deben realizar si se compra a crédito?

Datos
A = $8 560
T = 19.64% ACM
i = 0.0163667 mensual
R = $995
Incógnita: n

$$n = 1 - \left[\frac{\log\left[(1+i) - \frac{Ai}{R} \right]}{\log(1+i)} \right]$$

$$n = 1 - \left[\frac{\log\left[(1.0163667) - \frac{(8560)(0.0163667)}{995.00} \right]}{\log(1.0163667)} \right]$$

$$n = 1 - \left[\frac{\log\left[(1.0163667) - \frac{140.09}{995.00} \right]}{\log(1.0163667)} \right]$$

$$n = 1 - \left[\frac{\log\left[1.0163667 - 0.140803 \right]}{\log(1.0163667)} \right]$$

$$n = 1 - \left[\frac{\log(0.875564)}{\log(1.0163667)} \right]$$

$$n = 1 - \left(\frac{-0.057712}{0.00705} \right)$$

$$n = 1 - (-8.1856)$$

$$n = 9.18 \text{ pagos}$$

CD5.44

¿Cuántos pagos de $1 975 debe realizar el señor Arteaga, el día primero de cada mes para saldar una deuda por la compra de una estufa? Al cubrir su último pago acumuló $6 560. La tasa de interés aplicada fue de 22% anual convertible mensualmente.

Datos
M = $6 560
T = 22% ACM
i = 0.01833 mensual
R = $1 975
Incógnita: n

$$n = \left[\frac{\log\left(\frac{Mi}{R} + (1+i) \right)}{\log(1+i)} \right] + 1$$

$$n = \left[\frac{\log\left(\frac{(6560)(0.01833)}{1975} + (1.01833) \right)}{\log(1.01833)} \right] + 1$$

$$n = \left[\frac{\log\left(\frac{120.2448}{1975} + (1.01833) \right)}{\log(1.01833)} \right] + 1$$

$$n = \left[\frac{\log(0.0608834 + 1.01833)}{\log(1.01833)} \right] + 1$$

$$n = \left[\frac{\log(1.07921678)}{\log(1.01833)} \right] + 1$$

$$n = \left[\frac{0.033108688}{0.00788854} \right] + 1$$

$$n = 4.1969 + 1$$

$$n = 5.2 \text{ pagos}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.45

Gabriela abre una cuenta de ahorros en Bonos del Ahorro Nacional el día de hoy. Ella acuerda con el banco realizar depósitos mensuales de $3 550, al inicio de cada mes. Desea reunir la cantidad $30 000. La tasa de interés es de 1% mensual. ¿En cuánto tiempo reunirá la cantidad deseada?

Datos
M = $30 000
T = 1% mensual
R = $3 550
Incógnita: n

$$n = \left[\frac{\log\left(\frac{Mi}{R} + (1+i)\right)}{\log(1+i)}\right] + 1$$

$$n = \left[\frac{\log\left(\frac{(30\,000)(0.01)}{3\,550} + (1.01)\right)}{\log(1.01833)}\right] + 1$$

$$n = \left[\frac{\log\left(\frac{300}{3\,550} + (1.01)\right)}{\log(1.01)}\right] + 1$$

$$n = \left[\frac{\log(0.084507 + 1.01)}{\log(1.01)}\right] + 1$$

$$n = \left[\frac{\log(1.094507)}{\log(1.01)}\right] + 1$$

$$n = \left[\frac{0.0392186}{0.00432137}\right] + 1$$

$$n = 9.0755 + 1$$

$$n = 10.08 \text{ pagos}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Anualidades diferidas

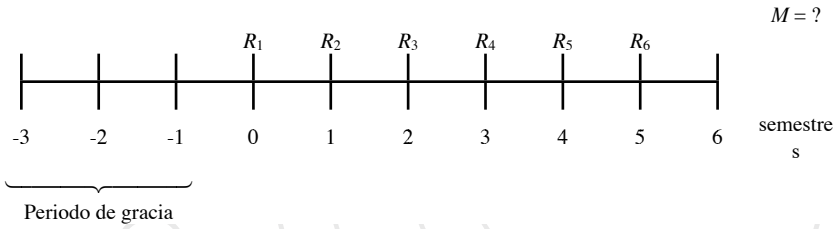
Monto en anualidades diferidas

CD5.46

La bióloga Adriana Dussel compró a crédito una centrifugadora de plasma el día de hoy para su laboratorio y su acreedor le concede un periodo de gracia de un año; sin embargo, realizará 6 pagos semestrales anticipados de $34 850 por la compra de la centrifugadora con un interés de 19% anual convertible semestralmente. Encontrar el monto.

Datos
$R = \$50\,000$
$n = 6$ semestres
Periodo de gracia de dos semestres
$T = 19\%$ ACS
$i = 0.095$ semestral
Incógnita: M

Gráfica 2. Anualidad diferida de 2 semestres, plazo de 6 semestres y pago de $34 850 cada semestre.



Se emplea la fórmula de monto de una anualidad anticipada, porque el pago se realiza al principio del periodo (pagos semestrales anticipados).

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] = 34\,850\left[\frac{(1.095)^{6+1}-1}{0.095}-1\right] = 34\,850\left[\frac{(1.095)^{7}-1}{0.095}-1\right]$$

$$M = 34\,850\left[\frac{1.8875-1}{0.095}-1\right] = 34\,850\left[\frac{0.8875}{0.095}-1\right] = 34\,850\left[9.3426-1\right]$$

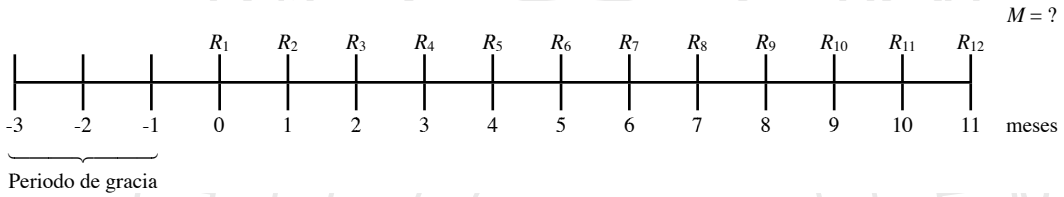
$$M = 34\,850(8.3426) = \$290\,741.30$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.47
Encontrar el pago total que debe realizar el señor Patiño por la compra de una alacena el día de hoy, si después de 3 meses realiza 12 pagos al inicio de cada mes de $790 con un interés de 24% anual convertible mensualmente.

Datos
$R = \$790$
$T = 24\%$ ACM
$i = 0.02$ mensual
$n = 12$ meses
Periodo de gracia de 2 meses
Incógnita: M

Gráfica 3. Anualidad diferida de 3 meses, plazo de 12 meses y pago de $790 cada mes.



Se emplea la fórmula de monto de una anualidad anticipada, porque el pago se realiza al principio del periodo (al inicio de cada mes).

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] = 790\left[\frac{(1.02)^{12+1}-1}{0.02}-1\right] = 790\left[\frac{(1.02)^{13}-1}{0.02}-1\right]$$

$$M = 790\left[\frac{1.2936-1}{0.02}-1\right] = 790\left[\frac{0.2936}{0.02}-1\right] = 790\left[14.6803-1\right]$$

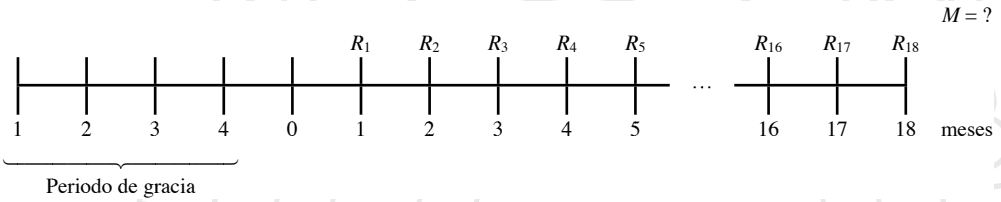
$$M = 790(13.6803) = \$10\,807.46$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.48
Encontrar el pago que debe realizar la dentista Ana Karen por la compra de material dental el día de hoy si después de 4 meses realiza 18 pagos al final de cada mes de $1 950 con un interés de 18% anual convertible mensualmente.

Datos
$R = \$1\,950$
$T = 18\%$ ACM
$i = 0.015$ mensual
$n = 18$ meses
Periodo de gracia de 3 meses
Incógnita: M

Gráfica 4. Anualidad diferida de 4 meses, plazo de 18 meses y pago de $1 950 cada mes.



Se emplea la fórmula de monto de una anualidad vencida, porque el pago se realiza al final del periodo (al final de cada mes).

$$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 1\,950\left[\frac{(1.015)^{18} - 1}{0.015}\right] = 1\,950\left[\frac{(1.015)^{18} - 1}{0.015}\right]$$

$$M = 1\,950\left[\frac{1.3073 - 1}{0.015}\right] = 1\,950\left[\frac{0.3073}{0.015}\right] = 1\,950(20.48937)$$

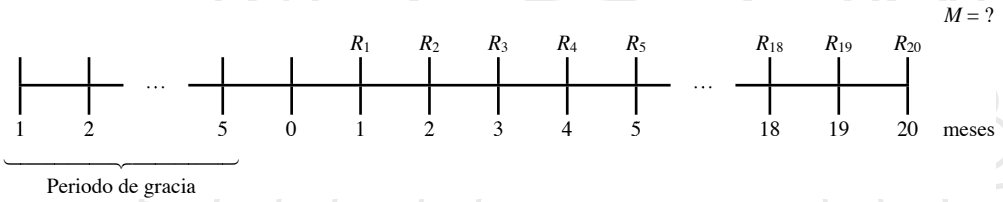
$$M = \$39\,954.28$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.49
¿Cuál es el monto de una renta semestral de $16 000 durante 10 años, si el primer pago vencido semestral se realiza dentro de 3 años y medio y el interés es de 16% capitalizable semestralmente?

Datos
Primer pago = después de 3 años y medio
m = periodo de gracia de 6 semestres
n = 20 semestres
R = $16 000
T = 16% ACS
i = 0.08 semestral
Incógnita: M

Gráfica 5. Anualidad diferida de 3 años y medio, plazo de 10 años y renta de $16 000 cada semestre.



Se emplea la fórmula de monto de una anualidad vencida, porque el pago se realiza al final del periodo (al final de cada semestre).

$$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 16\,000\left[\frac{(1.08)^{20} - 1}{0.08}\right] = 16\,000\left[\frac{(1.08)^{20} - 1}{0.08}\right]$$

$$M = \$6\,000\left[\frac{4.660957 - 1}{0.08}\right] = 16\,000\left[\frac{3.660957}{0.08}\right] = 16\,000(45.76)$$

$$M = \$732\,191.43$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

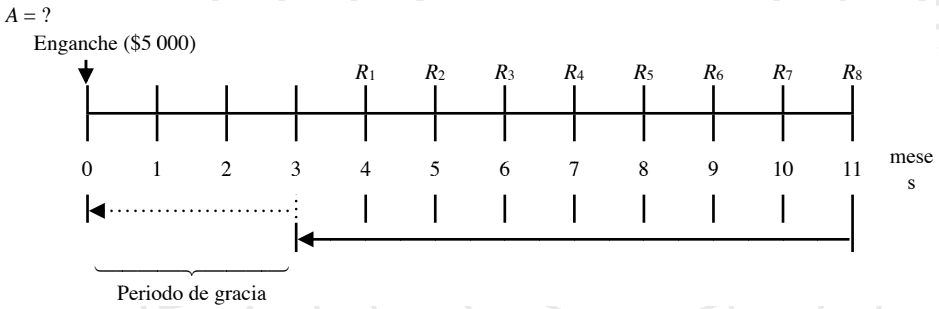
Valor presente en anualidades diferidas

CD5.50

El periodista Ulises Gutiérrez compra un comedor con un pago inicial de $5 000 y 8 mensualidades de $4 800 cada una. La primera mensualidad la paga después de 4 meses de la compra; además, le cobran 19.56% de interés anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál es el precio del comedor?

Datos
Primer pago = después de 4 meses
m = periodo de gracia de 3 meses
n = 8 meses
R = $4 800
T = 19.56% ACM
i = % mensual
Incógnita: A

Gráfica 6. Anualidad diferida del valor actual para 8 pagos mensuales de $4 800.



$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-m} = 4\,800\left[\frac{1-(1+0.0163)^{-8}}{0.0163}\right](1+0.0163)^{-3}$$

$$A = 480\left[\frac{1-0.878667}{0.0163}\right](1+0.0163)^{-3} = 4\,800\left[\frac{0.12133}{0.0163}\right](1+0.0163)^{-3}$$

$$A = 4\,800(7.4437)(0.95265) = \$34\,038$$

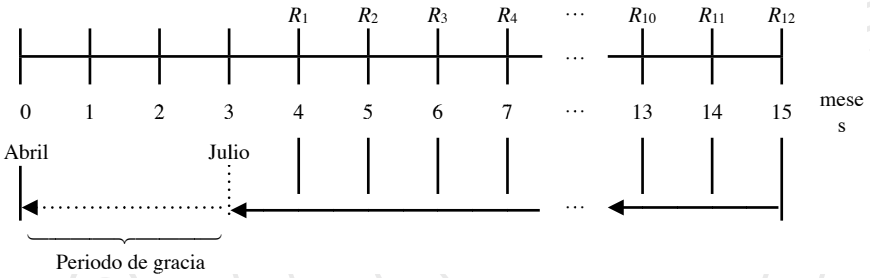
Precio = A + pago inicial
Precio = 34 038 + 5 000
Precio = $39 038

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.51
El alpinista Juan Antonio Sierra compra en abril una casa de campaña a crédito y acepta pagarla en 12 mensualidades de $3 300 con una tasa de interés de 24% anual capitalizable mensualmente. El primer pago lo realizará en el mes de julio del mismo año. ¿Cuál es el valor de contado?

Datos
Primer pago = después de 3 meses
m = periodo de gracia de 2 meses
n = 12 meses
R = $3 300
T = 24% ACM
i = 2% mensual
Incógnita: A

Gráfica 7. Anualidad diferida del valor actual para 12 pagos mensuales de $3 300.
A = ?



Se emplea la fórmula de valor actual de una anualidad vencida, porque al no indicarse si el pago se realiza al principio o al final del periodo, se debe entender o interpretar que el pago se realiza al final del periodo (al final de cada mes).

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-m} = 3300\left[\frac{1-(1+0.02)^{-12}}{0.02}\right](1+0.02)^{-2}$$

$$A = 3300\left[\frac{1-0.788493}{0.02}\right](1+0.02)^{-2} = 3300\left[\frac{0.2115}{0.02}\right](1.02)^{-2}$$

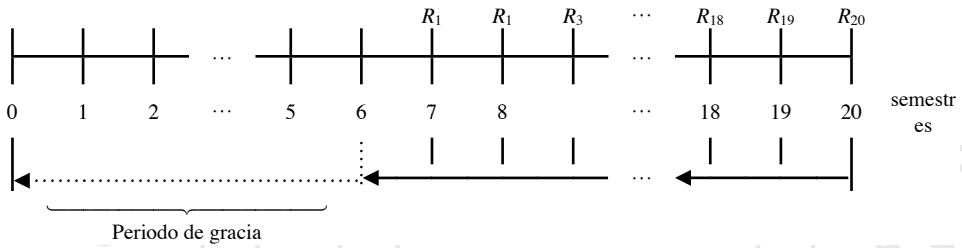
$$A = 3300(10.5753)(0.961168) = \$33\,543.46$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.52
¿Cuál es el valor presente de una renta semestral vencida de $16 000 durante 10 años, si el primer pago semestral se realiza dentro de 3 años y medio y el interés es de 16% capitalizable semestralmente?

Datos
Primer pago = después de 3 años y medio
m = periodo de gracia de 6 semestres
n = 20 semestres
R = $16 000
T = 16% ACS
i = 0.08 semestral
Incógnita: A

Gráfica 8. Anualidad diferida del valor actual para 7 pagos bimestrales de $16 000.
A = ?



$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-m} = 16000\left[\frac{1-(1+0.08)^{-20}}{0.08}\right](1+0.08)^{-6}$$

$$A = 16000\left[\frac{1-0.214548}{0.08}\right](1+0.08)^{-6} = 16000\left[\frac{0.785452}{0.08}\right](1.08)^{-6}$$

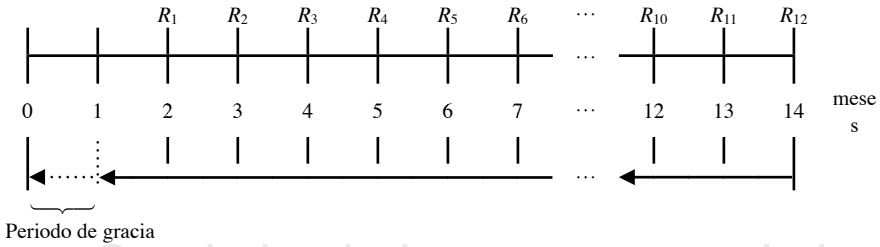
$$A = 16000(9.81815)(0.63017) = \$98\,993.57$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.53
Encontrar el valor presente por la compra de un estufa eléctrica el día de hoy, si después de 3 meses se realizan 12 pagos al inicio de cada mes de $790 con un interés de 24% anual capitalizable mensualmente.

Datos
R = $790
T = 24% ACM
i = 0.02 mensual
n = 12 meses
Periodo de gracia de 2 meses
Incógnita: M

Gráfica 9. Anualidad diferida del valor actual para 12 pagos mensuales de $790.
M = ?



Se emplea la fórmula de monto de una anualidad anticipada, porque el pago se realiza al principio del periodo (al inicio de cada mes).

$$A = R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right](1+\mathrm{i})^{-m} = \$790\left[1+\frac{1-(1+0.02)^{-12+1}}{0.02}\right](1+0.02)^{-2}$$

$$A = 790\left[1+\frac{1-(1+0.02)^{-11}}{0.02}\right](1.02)^{-2} = 790\left[1+\frac{1-1.24337}{0.02}\right](1.02)^{-2}$$

$$A = 790\left[1+\frac{0.19573696}{0.02}\right](1.02)^{-2} = 790\,(1+9.786848)(0.9611) = 790\,(10.786848)(0.9611)$$

A = $8 190.71

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

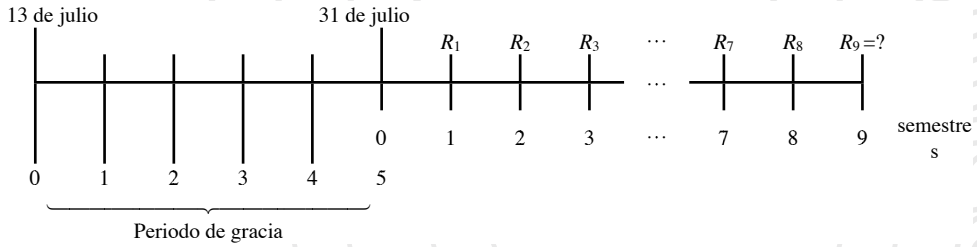
Renta en anualidades diferidas

CD5.54

El médico Federico Toscano deposita el 13 de julio la cantidad de $500 000 en un fondo de inversión en el Banco Central; ese mismo día inscribe a su hijo en la preparatoria. El médico tiene la idea de realizar 9 retiros semestrales a partir de que inscriba a su hijo en el mes de julio en la universidad. Encontrar el valor de cada retiro semestral que realizará si la tasa es de 12% anual capitalizable semestralmente.

Datos
A = $500 000
m = periodo de gracia = 5 semestres
n = 20 semestres
T = 12% ACS
i = 0.06 semestral
Incógnita: R

Gráfica 10. Anualidad diferida del valor actual para 9 retiros semestrales.



$$R = \frac{A\ (1+i)^{m}}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} = \frac{500\ 000(1+0.06)^{5}}{\frac{1-(1+0.06)^{-9}}{0.06}} = \frac{500\ 000(1.3382)}{\frac{1-(1.06)^{-9}}{0.06}}$$

$$R = \frac{669\,112.79}{\frac{1-0.5919}{0.06}} = \frac{669\,112.79}{\frac{0.4081}{0.06}} = \frac{669\,112.79}{6.8017}$$

R = $98 374.46 en cada semestre

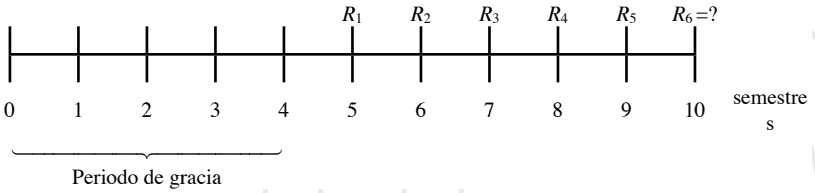
D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.55

Por su aniversario, la mueblería Hermanos Velásquez S. A. ofrece un comedor para ocho personas con un valor de contado de $43 550. Pero el comedor también se puede adquirir mediante 6 pagos mensuales, el primero de los cuales debe realizarse dentro de 5 meses después de la compra con un interés de 2.25% mensual. ¿De cuánto será la mensualidad a pagar?

Datos
A = $43 550
m = periodo de gracia = 4 meses
n = 6 meses
T = 2.25% mensual
i = 0.0225 mensual
Incógnita: R

Gráfica 11. Anualidad diferida del valor actual para 6 pagos mensuales.



$$R = \frac{A(1+i)^{m}}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} = \frac{43\,550(1+0.0225)^{4}}{\frac{1-(1+0.0225)^{-6}}{0.0225}} = \frac{43\,550(1.09308)}{\frac{1-(1.0225)^{-6}}{0.0225}}$$

$$R = \frac{47\,603.77}{\frac{1-0.87502}{0.0225}} = \frac{47\,603.77}{\frac{0.12497}{0.0225}} = \frac{47\,603.77}{5.5545}$$

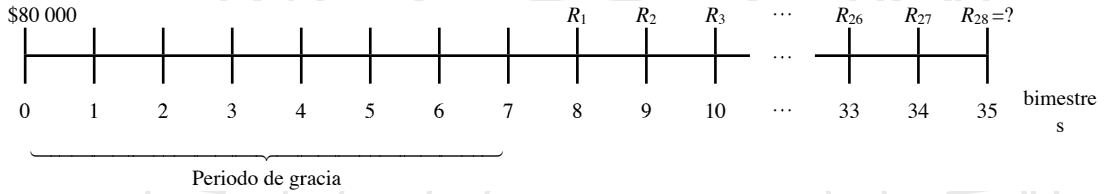
R = $8 570.31 en cada mes

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.56
El dueño de una pastelería deposita el día de hoy $80 000 en una cuenta de inversiones que paga el 27% anual capitalizable bimestralmente. Dentro de 8 bimestres realizará 28 retiros bimestrales vencidos, ¿de qué cantidad serán éstos?

Datos
A = $80 000
m = periodo de gracia = 7 bimestres
n = 28 bimestres
T = 27% ACB
i = 0.045 bimestral
Incógnita: R

Gráfica 12. Anualidad diferida del valor actual para 28 retiros bimestrales.



$$R = \frac{A(1+i)^{m}}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} = \frac{\$80\,000(1+0.045)^{7}}{\frac{1-(1+0.045)^{-28}}{0.0225}} = \frac{\$80\,000(1.36086)}{\frac{1-(1.045)^{-28}}{0.045}}$$

$$R = \frac{108\,868.94}{\frac{1-0.29157}{0.045}} = \frac{108\,868.94}{\frac{0.708429}{0.045}} = \frac{108\,868.94}{15.7428}$$

R = $6 915.44 en cada bimestre

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

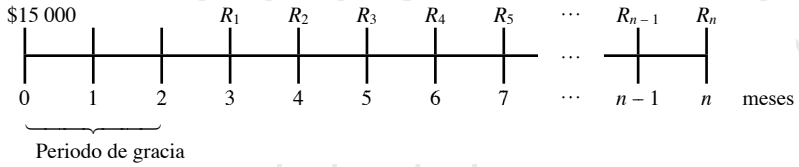
Plazo en anualidades diferidas

CD5.57

El señor Ordóñez contrae una deuda de $15 000 por la compra de un equipo de sonido. Acordó comenzar a pagar dentro de 3 meses realizando cuantos pagos sean necesarios de $900 hasta saldar la deuda. La tasa de interés es de 23.25% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuántos pagos debe realizar para saldar su deuda?

Datos
A = $15 000
R = $900
m = periodo de gracia = 2 meses
T = 23.25% ACM
i = 0.019375 mensual
Incógnita: n

Gráfica 13. Anualidad diferida del valor actual para conocer el número de pagos mensuales de $900.



$$n = \frac{\log\left[\frac{R}{R-\left[A(1+i)^{m}\right](i)}\right]}{\log(1+i)} = \frac{\log\left[\frac{900}{900-\left[15000(1.019375)^{2}\right](0.019375)}\right]}{\log((1.019375))}$$

$$n = \frac{\log\left[\frac{900}{900-\left[15000(1.0391254)\right](0.019375)}\right]}{\log(1.019375)} = \frac{\log\left[\frac{900}{900-(15586.88)(0.019375)}\right]}{\log(1.019375)}$$

$$n = \frac{\log\left[\frac{900}{900-301.99}\right]}{\log(1.019375)} = \frac{\log\left[\frac{900}{598}\right]}{\log(1.019375)} = \frac{\log[1.50501672]}{\log(1.019375)} = \frac{0.17754132}{0.008334}$$

n = 21.30 pagos

Como n = 21.30 pagos, deberá pagar 21 pagos de $900 más otro pago menor y para saber de cuánto sería utilizamos la siguiente ecuación:

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.57 cont.

$$X = \left[15\,000(1.019375)^{23} - 900\left[\frac{(1.019375)^{21}-1}{0.019375}\right]\right](1.019375)$$

$$X = \left[15\,000(1.554825) - 900\left[\frac{1.4962824-1}{0.019375}\right]\right](1.019375)$$

$$X = \left[23\,322.37 - 900\left[\frac{0.4962824}{0.019375}\right]\right](1.019375)$$

$$X = [\,21599.1 - 900(25.6145755)\,](1.019375)$$

$$X = (23\,322.37 - 23053.12)(1.019375)$$

$$X = (269.22)(1.019375)$$

$$X = \$274.44$$

También se pueden realizar 20 pagos de $900, más otro de mayor cantidad:

$$X = \left[15\,000(1.019375)^{22} - 900\left[\frac{(1.019375)^{20}-1}{0.019375}\right]\right](1.019375)$$

$$X = \left[15\,000(1.525273) - 900\left[\frac{1.467843-1}{0.019375}\right]\right](1.019375)$$

$$X = \left[22\,879.09 - 900\left[\frac{0.467843}{0.019375}\right]\right](1.019375)$$

$$X = [\,21599.1 - 900(24.1467355)\,](1.019375)$$

$$X = (22\,879.09 - 21732.06)(1.019375)$$

$$X = (1147.03)(1.019375)$$

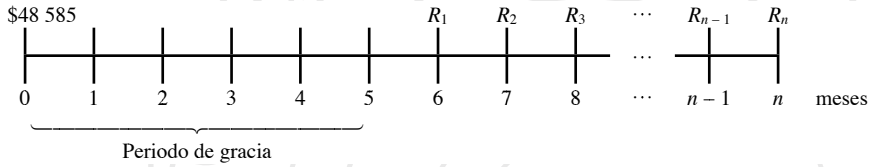
$$X = \$1169.26$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.58
Karla Díaz contrae una deuda por $48 585 por la compra de una pantalla plana, la que comenzará a pagar dentro de 6 meses y realizando cuantos pagos sean necesarios de $1 900 hasta saldar la deuda. La tasa de interés es de 24% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuántos pagos debe realizar para saldar su deuda?

Datos
A = $48 585
R = $1 900
m = periodo de gracia = 6 meses
T = 24% ACM
i = 0.02 mensual
Incógnita: n

Gráfica 14. Anualidad diferida del valor actual para conocer el número de pagos mensuales de $1 900.



$$n = \frac{\log\left[\frac{R}{R-\left[A(1+i)^n\right](i)}\right]}{\log(1+i)} = \frac{\log\left[\frac{1900}{1900-\left[48\,585(1.02)^5\right](0.02)}\right]}{\log(1.02)}$$

$$n = \frac{\log\left[\frac{1900}{1900-\left[48\,585(1.1040808)\right](0.02)}\right]}{\log(1.02)} = \frac{\log\left[\frac{1900}{1900-(53641.77)(0.02)}\right]}{\log(1.02)}$$

$$n = \frac{\log\left[\frac{1900}{1900-1072.84}\right]}{\log(1.02)} = \frac{\log\left[\frac{1900}{827.16}\right]}{\log(1.02)} = \frac{\log[2.29700329]}{\log(1.02)} = \frac{0.3611641}{1.0086}$$

$$n = 41.995 = 42$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tasa de interés en anualidad vencidas

CD5.59

¿A qué tasa nominal capitalizable semestralmente el sociólogo Juan Molina acumulará $500 000 para el enganche del departamento que habita en la actualidad? Él acordó con el dueño del departamento realizar 15 depósitos semestrales y con el último depósito haber acumulado la cantidad acordada, para pagar la cantidad faltante por el valor del departamento. Él solicitará un préstamo hipotecario al ISSSTE.

Datos
$C = \$500\,000$
$R = \$10\,000$
$n = 15$
Incógnita: i

$$500\,000 = 10\,000\frac{1-(1+i)^{-15}}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-15}}{i} = \frac{500\,000}{10\,000}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-15}}{i} = 50$$

Encontrar dos valores que estén cercanos a 50, uno mayor y otro menor.

Si $i = 0.1560$ entonces:

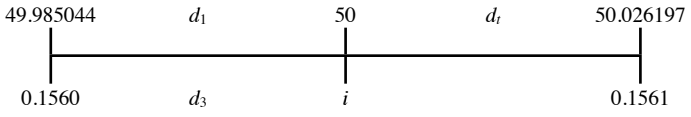
$$\frac{(1+0.01560)^{-15}-1}{0.01560} = 49.985044$$

Si $i = 0.1561$ entonces:

$$\frac{(1+0.01561)^{-15}-1}{0.01561} = 50.026197$$

Es necesario interpolar entre los dos valores anteriores para determinar de forma más exacta la tasa de interés que se desea conocer la cual se encuentra entre 0.018 y 0.0175.

Gráfica 15. Interpolación del cálculo de la tasa de interés.



D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.59 cont.
La proporción queda de la siguiente forma

$$\frac{d_1}{d_t} = \frac{d_t}{d_T}$$

$$\frac{50 - 49.985044}{50.026197 - 49.985044} = \frac{i - 0.1560}{0.1561 - 0.1560}$$

$$\frac{0.014956}{0.041153} = \frac{i - 0.1560}{0.0001}$$

$$0.363424 = \frac{i - 0.1560}{0.0001}$$

$$i - 0.1560 = 0.363424(0.0001)$$
$$i - 0.1560 = 0.000036342$$
$$i = 0.1560 + 0.000036342$$
$$i = 0.156036$$
$$i = 15.60\% \quad \text{semestral}$$

CD5.60
El señor Francisco Peña desea comprar una camioneta cuyo costo al contado es de $350 000. Él solicita un crédito a la agencia automotriz, realizando 6 abonos mensuales de $62 000. ¿Cuál es la tasa de interés si el primer pago lo realizará dentro de un mes?

Datos
R = $62 000
C = $350 000
n = 6
Incógnita: i

$$350\ 000 = 62\ 000\frac{1-(1+i)^{-6}}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-6}}{i} = \frac{350\ 000}{62\ 000}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-6}}{i} = 5.645161$$

Encontrar dos valores que estén cercanos a 5.645161, uno mayor y otro menor.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.60 cont.

Si $i = 0.0175$ entonces:

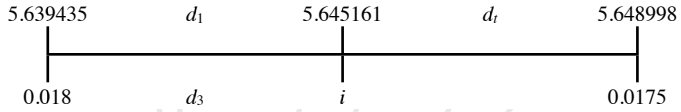
$$\frac{(1+0.0175)^{-6}-1}{0.0175} = 5.648998$$

Si $i = 0.018$ entonces:

$$\frac{(1+0.018)^{-6}-1}{0.018} = 5.639435$$

Hay que interpolar entre los dos valores anteriores para determinar de forma más exacta la tasa de interés que se desea conocer la cual se encuentra entre 0.018 y 0.0175.

Gráfica 16. Interpolación del cálculo de la tasa de interés



La proporción queda de la siguiente forma:

$$\frac{d_1}{d_t} = \frac{d_t}{d_T}$$

$$\frac{5.645161-5.639435}{5.648998-5.639435} = \frac{i-0.018}{0.0175-0.018}$$

$$\frac{0.005726}{0.009563} = \frac{i-0.018}{-0.0005}$$

$$0.598766 = \frac{i-0.018}{-0.0005}$$

$$i-0.018 = 0.598766(-0.0005)$$
$$i-0.018 = 0.000299383$$
$$i = 0.018-0.000299383$$
$$i = 0.00177$$
$$i = 1.77\% \text{ mensual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.61
Se realizan 6 depósitos anuales anticipados de $18 338.90 equivalentes a un valor actual de $55 000. ¿Cuál es la tasa de interés?

Datos
$R = \$18\ 338.90$
$C = \$55\ 000$
$n = 6$
Incógnita: i

$$C = R\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$55\ 000 = 18\ 338.90\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-6+1}}{i}\right]$$

$$\frac{55\ 000}{18\ 338.90} - 1 = \frac{1-(1+i)^{-5+1}}{i}$$

$$\frac{55\ 000}{18\ 338.90} - 1 = \frac{1-(1+i)^{-5+1}}{i}$$

$$2 = \frac{1-(1+i)^{-5+1}}{i}$$

Encontrar dos valores que estén cercanos a 2, uno mayor y otro menor.

Si $i = 0.041$ entonces:

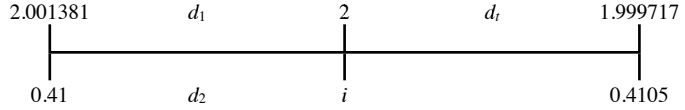
$$\frac{1-(1+0.041)^{-5}}{0.041} = 2.001381$$

Si $i = 0.4105$ entonces:

$$\frac{1-(1+0.4105)^{-5}}{0.4105} = 1.999717$$

Hay que interpolar entre los dos valores anteriores para determinar de forma más exacta la tasa de interés que se desea conocer la cual se encuentra entre 0.018 y 0.0175.

Gráfica 17. Interpolación del cálculo de la tasa de interés.



D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.61 cont.
La proporción queda de la siguiente forma:

$$\frac{d_1}{d_t} = \frac{d_t}{d_T}$$

$$\frac{2.001381 - 2}{2.001381 - 1.999717} = \frac{i - 0.41}{0.4105 - 0.41}$$

$$\frac{0.001381}{0.001664} = \frac{i - 0.41}{0.0005}$$

$$0.82992788 = \frac{i - 0.018}{0.0005}$$

$$i - 0.41 = 0.82992788(0.0005)$$
$$i - 0.41 = 0.000415$$
$$i = 0.41 + 0.000415$$
$$i = 0.410415$$
$$i = 41.04\% \text{ anual}$$

CD5.62
¿Cuál es la tasa de interés anual de 15 depósitos anuales anticipados de $1 800 que acumulan un monto de $450 000?

Datos
R = $1 800
M = $450 000
n = 15
Incógnita: i

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]$$

$$450\ 000 = 1\ 800\left[\frac{(1+i)^{15+1}-1}{i}-1\right]$$

$$\frac{450\ 000}{1\ 800}+1=\frac{(1+i)^{16}-1}{i}$$

$$250+1=\frac{(1+i)^{16}-1}{i}$$

$$251=\frac{(1+i)^{16}-1}{i}$$

CD5.62 cont.
Encontrar dos valores que estén cercanos a 251, uno mayor y otro menor.

Si $i = 0.31516075$ entonces:

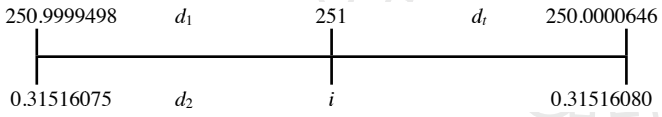
$$\frac{(1+0.31516075)^{16}-1}{0.31516075} = 250.9999498$$

Si $i = 0.31516080$ entonces:

$$\frac{(1+0.31516080)^{16}-1}{0.31516080} = 251.0000646$$

Hay que interpolar entre los dos valores anteriores para determinar de forma más exacta la tasa de interés que se desea conocer la cual se encuentra entre 0.018 y 0.0175.

Gráfica 18. Interpolación del cálculo de la tasa de interés



La proporción queda de la siguiente forma:

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{d_t}{d_T}$$

$$\frac{251 - 250.9999498}{251.0000646 - 250.9999498} = \frac{i - 0.31516075}{0.31516080 - 0.31516075}$$

$$\frac{0.0000502}{0.0001148} = \frac{i - 0.31516075}{0.00000005}$$

$$0.43728223 = \frac{i - 0.31516075}{0.00000005}$$

$$\begin{aligned} i - 0.31516075 &= 0.43728223(0.00000005) \\ i - 0.31516075 &= 0.00000002 \\ i &= 0.31516075 + 0.00000002 \\ i &= 0.31516077 \\ i &= 31.52\% \text{ anual} \end{aligned}$$

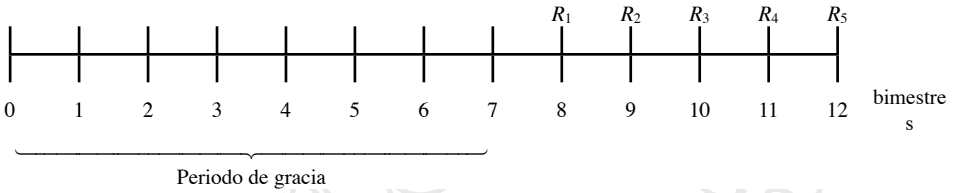
recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.63

El señor Zima tiene que pagar una deuda de $100 000. Para saldarla acuerda con su acreedor realizar el día de hoy un pago de $42 000 y efectuar 5 pagos mensuales de $28 000 comenzando el primero dentro de 8 meses a partir del día de hoy. ¿Cuál es la tasa de interés?

Gráfica 19. Anualidad diferida del valor actual para 5 pagos mensuales de $28 000.

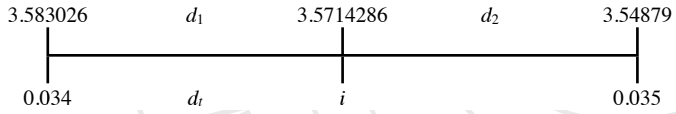


$$100\ 000(1+i)^{7} = 28\ 000\left[\frac{1-(1+i)^{-5}}{i}\right]$$

$$\left[\frac{1-(1+i)^{-5}}{i(1+i)^{7}}\right] = \frac{100\ 000}{28\ 000} = 3.5714286$$

Encontrar dos valores que estén cercanos a 3.5714286, uno mayor y otro menor.

Gráfica 20. Interpolación del cálculo de la tasa de interés.



La proporción queda de la siguiente forma:

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$\frac{d_1}{d_t} = \frac{d_2}{d_T}$$

$$\frac{3.5714286 - 3.583026}{3.54879 - 3.583026} = \frac{i - 0.034}{0.035 - 0.034}$$

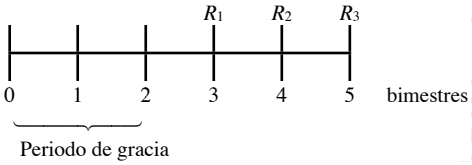
$$\frac{-0.0115974}{-0.0342367} = \frac{i - 0.034}{0.001}$$

$$0.33874868 = \frac{i - 0.034}{0.001}$$

$$i - 0.034 = 0.33874868\,(0.001)$$
$$i - 0.034 = 0.00033874868$$
$$i = 0.034 + 0.00033874869$$
$$i = 0.034338063$$
$$i \approx 3.43\%\ \text{anual}$$

CD5.64
El comerciante Antonino Villalobos compró un camión para su negocio con valor de $1 050 000 Él acordó con su acreedor dar un enganche $450 000 y 3 pagos mensuales de $220 000, el primero de ellos se realizaría dentro de 3 meses, ¿cuál es la tasa de interés anual capitalizable mensualmente que pagó el comerciante?

Gráfica 21. Anualidad diferida del valor actual para 3 pagos mensuales de $220 000.



Valor del camión – enganche = 1 050 000 – 450 000 = $600 000
Tres pagos mensuales de $220 000
Periodo de gracia 3 meses

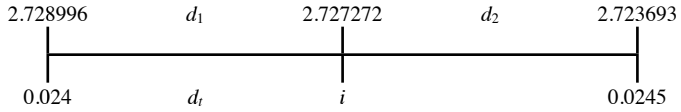
$$600\ 000(1+i)^2 = 220\ 000\left[\frac{1-(1+i)^{-3}}{i}\right]$$

$$\left[\frac{1-(1+i)^{-3}}{i(1+i)^2}\right] = \frac{600\ 000}{220\ 000} = 2.727272$$

Encontrar dos valores que estén cercanos a , uno mayor y otro menor.

Gráfica 22. Interpolación del cálculo de la tasa de interés.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.



La proporción queda de la siguiente forma:

$$\frac{d_1}{d_t} = \frac{d_2}{d_T}$$

$$\frac{2.727272 - 2.728996}{2.723696 - 2.728996} = \frac{i - 0.024}{0.0245 - 0.024}$$

$$\frac{0.001724}{0.0053} = \frac{i - 0.024}{0.0005}$$

$$0.325283 = \frac{i - 0.024}{0.0005}$$

$$i - 0.024 = 0.325283(0.0005)$$
$$i - 0.024 = 0.000162642$$
$$i = 0.024 + 0.00028063$$
$$i = 0.0241626$$
$$i \approx 2.42\% \text{ anual}$$

Anualidades generales

Monto de anualidades generales

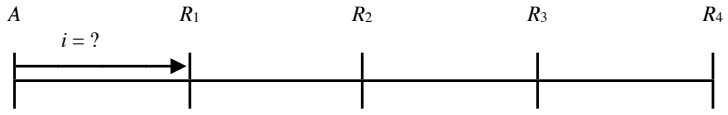
CD5.65

Calcular el monto de 4 pagos de $100 al final de cada bimestre si el interés es de 24% anual capitalizable mensualmente.

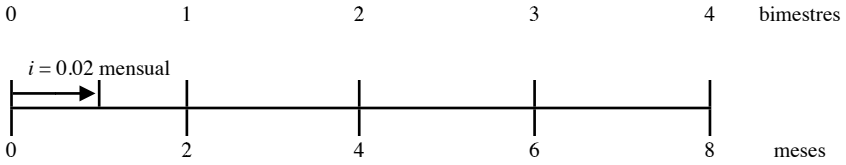
Datos
$R = \$100$
$T = 24\%$ ACM
$i = 0.02$ mensual
$n = 4$ bimestres
Incógnita: M

a) El periodo de pago es de 2 meses y el de capitalización de los intereses de 1 mes, entonces, el periodo de pago es mayor que el de capitalización. Para encontrar la anualidad general primero se calcula la tasa de interés equivalente.

Gráfica 23. Anualidad general.



D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.



b) Calcular la tasa de interés equivalente:

$$\left(1+\frac{i'}{6}\right)^{6}=\left(1+\frac{0.24}{12}\right)^{12}$$

$i' = 0.2424$

$i' = 24.24\%$ ACB

$i' = 0.0404$ bimestral

c) Una vez encontrada la tasa anual capitalizable bimestralmente se transforma la anualidad general a una anualidad simple.

$$M = R\left[\frac{(1+i')^{n}-1}{i'}\right] = 100\left[\frac{(1+0.0404)^{4}-1}{0.0404}\right] = \$424.90$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.65 cont.
d) Encontrar la renta equivalente mensual (R') durante dos meses que sea equivalente a una renta bimestral (R) de \$100 es decir, debemos calcular a partir del monto la renta mensual utilizando la fórmula de anualidad simple.

$$M = R'\left[\frac{(1+t)^p - 1}{t}\right]$$

$$100 = R'\left[\frac{(1+0.02)^2 - 1}{0.02}\right]$$

$$R' = \$49.50 \text{ mensual}$$

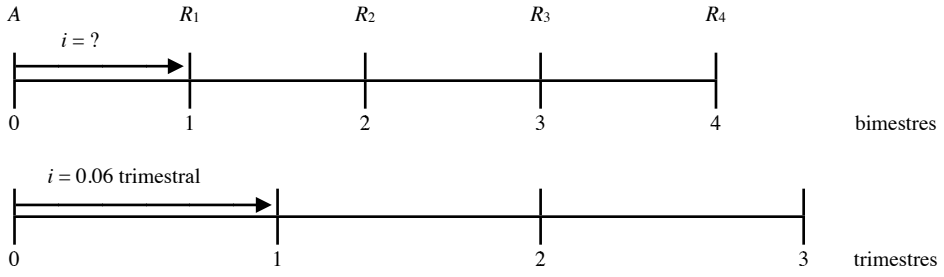
$$M = R\left[\frac{(1+i')^n - 1}{i'}\right] = 49.50\left[\frac{(1+0.02)^8 - 1}{0.02}\right] = \$424.86$$

CD5.66
Calcular el monto de 4 pagos de \$100 al final de cada bimestre, si el interés es de 24% anual capitalizable trimestralmente.

Datos
$R = \$100$
$T = 24\%$ ACM
$i = 6\%$ trimestral
$n = 4$ bimestres
Incógnita: M

a) En los datos del problema, el periodo de pago es de 2 meses y el de capitalización de los intereses es cada 3 meses, entonces, el periodo de pago es menor que el de capitalización. Para dar solución a este problema, a la anualidad general primero se le calcula la tasa de interés equivalente.

Gráfica 24. Anualidad general.



D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.66 cont.

$$\left(1+\frac{i'}{12}\right)^{6}=\left(1+\frac{0.24}{4}\right)^{4}$$

$$\left(1+\frac{i'}{6}\right)^{6}=(1+0.06)^{4}$$

$$1+\frac{i'}{6}=(1.26247696)^{1/6}$$
$$i'=6\left[1.039610308-1\right]$$
$$i'=6(0.039610308)$$
$$i'=0.23661845$$
$$i'=23.66\%\ \text{ACB}$$
$$i'=0.033961\ \text{bimestral}$$

b) Al encontrar la tasa anual capitalizable bimestralmente se transforma la anualidad general a una anualidad simple.

$$M=R\left[\frac{(1+i')^{n}-1}{i'}\right]$$

$$M=100\left[\frac{(1+0.03961)^{4}-1}{0.03961}\right]$$

$$M=\$424.40$$

c) Encontrar la renta equivalente que coincide con el periodo de 3 meses.

$$R'=R'\left[\frac{(1+t)^{p}-1}{t}\right]$$

$$R'=100\left[\frac{(1+0.06)^{3}-1}{0.06}\right]$$

$$R'=\$318.36\ \text{ trimestral}$$

Si $R'=M$, entonces:

$$M=318.36\left[\frac{(1+0.06)^{4/3}-1}{0.06}\right]$$

$$M=\$428.66$$

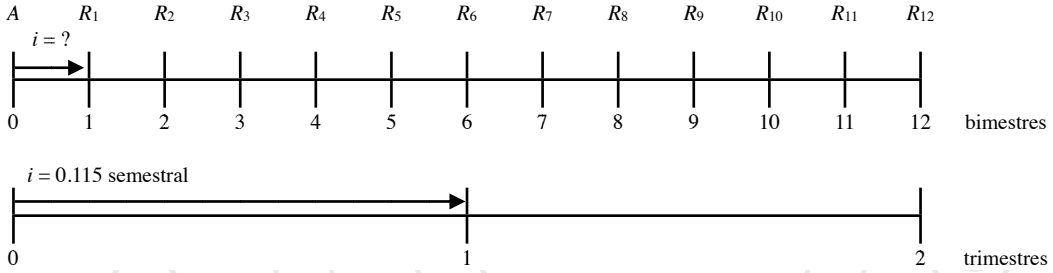
D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.67
Encontrar el monto de 10 depósitos mensuales de $550, si el interés es de 23% anual capitalizable semestralmente.

Datos
R = $550
n = 10 depósitos mensuales
T = 23% ACS
i = 1.15% semestral
Incógnita: M
Solución:

a) Como las rentas son mensuales es necesario encontrar el interés efectivo mensual equivalente a 15% también efectivo semestral.

Gráfica 25. Anualidad general.



$$\left(1+\frac{i'}{12}\right)^{12}=\left(1+\frac{0.23}{2}\right)^{2}$$

$$\left(1+\frac{i'}{12}\right)^{12}=(1+0.115)^{2}$$

$$1+\frac{i'}{12}=(1.243225)^{1/12}$$

$$i'=12\left[1.018308-1\right]$$

$$i'=12(0.018308)$$

$$i'=0.219695 \quad \text{ACM}$$

$$i'=1.83\% \quad \text{mensual}$$

b) Al encontrar la tasa anual capitalizable mensualmente se transforma la anualidad general en una anualidad simple.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$M = R\left[\frac{(1+i')^n - 1}{i'}\right]$$

$$M = 550\left[\frac{(1+0.0183079)^{10} - 1}{0.0183079}\right]$$

$$M = \$5\,975.97$$

c) Encontrar la renta equivalente que coincide con el periodo de 6 meses.

$$M = R'\left[\frac{(1+t)^p - 1}{t}\right]$$

$$R' = 550\left[\frac{(1+0.0183079)^6 - 1}{0.0183079}\right]$$

$$R' = \$3\,454.78$$

$$M = 3454.78\left[\frac{(1+0.115)^{10/6} - 1}{0.115}\right] = 3454.78\left[\frac{0.198923425}{0.115}\right]$$

$$M = 3454.78(1.729768912)$$

$$M = \$5\ 975.97$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Valor actual en anualidades generales

CD5.68

Encontrar el valor actual de un conjunto de 4 pagos trimestrales de $50, si el interés es de 36% anual convertible mensualmente.

Datos
$R = \$50$
$n = 4$ trimestres
$T = 36\%$ ACM
$i = 0.03$ mensual
Incógnita: A

a) El problema se resuelve utilizando la tasa equivalente. Para su cálculo se considera un sólo trimestre.

$$1 + i' = (1 + i)^p$$
$$i' = (1 + 0.03)^3 - 1$$
$$i' = 0.09273 \text{ trimestral}$$

b) Para calcular el valor presente:

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$
$$A = 50\left[\frac{1-(1.09273)^{-4}}{0.09273}\right]$$
$$A = \$161.02$$

c) Para calcular el monto:

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$
$$A = 50\left[\frac{1-(1.09273)^{-4}}{0.09273}\right]$$
$$A = \$161.02$$

Si $A = M$, entonces:

$$M = 161.02(1.09273)^4$$
$$M = \$229.58$$

d) Para la renta equivalente, la solución es:

$$M = R'\left[\frac{(1+t)^p - 1}{t}\right]$$
$$50 = R'\left[\frac{(1+0.03)^3 - 1}{0.03}\right]$$
$$R' = \$16.1765 \text{ mensual}$$

e) El cálculo del valor presente sería:

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$
$$A = 16.1765\left[\frac{1-(1.03)^{-12}}{0.03}\right]$$
$$A = \$161.02$$

f) Para calcular el monto:

$$M = R'\left[\frac{(1+t)^p - 1}{t}\right]$$
$$M = 16.1765\left[\frac{(1+0.03)^{12} - 1}{0.03}\right]$$
$$R' = \$229.58 \text{ mensual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Plazo

CD5.69

Una persona desea acumular $3 950 mediante depósitos semestrales de $75.50 en una cuenta que rinde 6.3% capitalizable bimestralmente.

La tasa semestral equivalente a 1.25% bimestral es:

$$\left(1+\frac{i'}{2}\right)^{2}=\left(1+\frac{0.063}{6}\right)^{6}$$

$$\left(1+\frac{i'}{2}\right)^{2}=\sqrt[2]{(1.0105)^{6}}$$

$$1+\frac{i'}{2}=\sqrt[2]{1.064677086}$$

$$1+\frac{i'}{2}=1.031831907$$

$$i'=2\left[1.031831907-1\right]$$

$$i'=2(0.031831907)$$

$$i'=0.063664 \quad \text{ACS}$$

$$i'=0.063664/2$$

$$i'=0.031831907 \quad \text{semestral}$$

De la expresión de monto de la anualidad vencida se despeja n:

$$M=R\left[\frac{(1+i')^{n}-1}{i'}\right] \quad \therefore \quad n=\frac{\log\left(\frac{Mi'}{R}+1\right)}{\log(1+i')}$$

$$n=\frac{\log\left(\frac{3894(0.03183192)}{75.50}+1\right)}{\log(1+0.031831907)}$$

$$n=\frac{\log(1.64177+1)}{0.01360896}$$

$$n=\frac{\log(2.64177)}{0.01360896}$$

$$n=\frac{0.421895}{0.01360896}$$

$$n=31$$

CD5.70

El señor Javier Molero debe pagar un préstamo para la compra de un local en Irapuato Guanajuato. El valor de contado es de $1 450 000 y lo debe liquidar con pagos mensuales de $40 060 comenzando un mes después de la autorización del crédito hipotecario, con un interés de 9.8% efectivo anual. ¿Cuántos pagos completos debe hacer?

La tasa mensual equivalente a 15% efectivo anual es:

$$\left(1+\frac{i'}{12}\right)^{12}=(1+0.098)$$

$$\left(1+\frac{i'}{12}\right)^{12}=\sqrt[12]{(1.098)^{1}}$$

$$1+\frac{i'}{12}=1.007822$$

$$i'=12(0.007822)$$

$$i'=0.093864 \quad \text{ACM}$$

$$i'=0.093864/12$$

$$i'=0.007822 \quad \text{mensual}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.70 cont.
De la expresión de monto de la anualidad vencida se despeja *n*:

$$M = R\left[\frac{(1+i')^n - 1}{i'}\right]$$

$$\therefore \quad n = \frac{\log\left(\frac{Mi'}{R} + 1\right)}{\log(1+i')}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{1\,450\,000(0.007822)}{40\,060} + 1\right)}{\log(1+0.007822)}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{11341.9}{40\,060} + 1\right)}{0.00338383}$$

$$n = \frac{\log(1.28312)}{0.00338383}$$

$$n = \frac{0.108268}{0.00338383}$$

$$n = 32$$

CD5.71
Jacinto Morales, quien es el dueño de una granja, pidió prestado al Banco Ejidal un préstamo $2 872 000 y lo va a liquidar en pagos mensuales de $280 000 comenzando un mes después de contratado el crédito; el interés pactado es de 18% efectivo anual. ¿Cuántos pagos completos tendrá que realizar Jacinto y de qué valor es el último pago menor?

La tasa mensual equivalente a 18% efectivo anual es:

$$\left(1 + \frac{i'}{12}\right)^{12} = (1 + 0.18)$$

$$\left(1 + \frac{i'}{12}\right)^{12} = \sqrt[12]{(1.18)^1}$$

$$1 + \frac{i'}{12} = 1.013888$$

$$i' = 12(0.013888)$$
$$i' = 0.166666 \quad \text{ACM}$$
$$i' = 0.166666/12$$
$$i' = 0.013888 \quad \text{mensual}$$

De la expresión de monto de la anualidad vencida se despeja *n*:

$$A = R\left[\frac{1 - (1+i')^{-n}}{i'}\right]$$

$$\therefore \quad n = \frac{\log\left(\frac{1}{1 - \frac{Ai'}{R}}\right)}{\log(1+i')}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$n = -\frac{\log\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{2\,872\,000(0.013888)}{280\,000}}\right)}{\log(1+0.013888)}$$

$$n = \frac{\log\left(\dfrac{1}{0.8575488}\right)}{0.00598998}$$

$$n = \frac{\log(1.166114395)}{0.00598998}$$

CD5.71 cont.

$$n = \frac{\log\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{39887.336}{280\,000}}\right)}{0.00598998}$$

$$n = \frac{0.06674116}{0.00598998}$$

$$n = 11.14$$

Se tienen 11 pagos de $280 000 y el pago 12 ($x$) debe ser menor de $280 000.

$$n = \frac{\log\left(\dfrac{1}{1-0.1424512}\right)}{0.00598998}$$

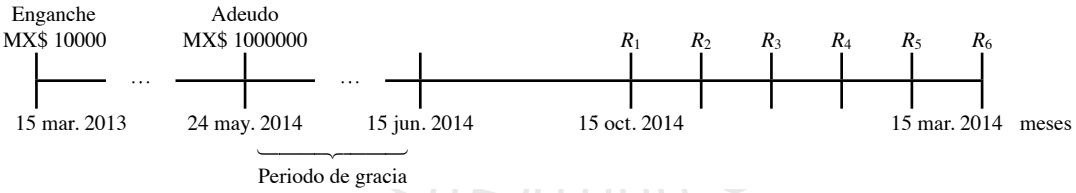
Renta

CD5.72

El 15 de marzo de 2013 el comerciante Humberto Juárez compró un departamento nuevo con valor $2 000 000. De enganche dio el 50% y pretende liquidar el resto en un pago único el 15 de junio de 2014. El 28 mayo de 2014 el señor Juárez acuerda con EXE-Banco cambiar la forma de liquidar el departamento por 6 pagos mensuales y realizar el primero el 15 de octubre de 2014. La tasa de interés efectivo anual acordada es de 10.5%.

¿Cuánto tiene que pagar mensualmente el señor Juárez?

Gráfica 26. Anualidad diferida.



Valor del departamento – enganche = 1 000 000 – 0.5 (1 000 000) = $500 000
Periodo de gracia: 4 meses
6 pagos mensuales de = ?

Tasa equivalente

$$(1+i)^{12} = 1+0.105$$

$$1+i = \sqrt[12]{1.105}$$

$$i = 1.0083552 - 1$$

$$i = 0.0083552$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.72 cont.
El valor del adeudo al 15 de octubre de 2015

$$1\ 000\ 000(1.0083552)^{3} = \$1\ 025\ 275.61$$

La anualidad equivalente:

$$1\ 025\ 275.61 = R\left[\frac{1-(1.0083552)^{-6}}{0.0083552}\right]$$

$$1\ 025\ 275.61 = R\left[\frac{1-0.95130274}{0.0083552}\right]$$

$$1\ 025\ 275.61 = R\left[\frac{0.0486973}{0.0083552}\right]$$

$$R = \frac{1\ 025\ 275.61}{5.8283778} = \$175\ 910.97$$

CD5.73
La secretaria Julia Martínez desea ahorrar $15 000 en los próximos 2 años. Ella puede realizar depósitos semanales en una cuenta que paga 3.6% capitalizable mensualmente. ¿Qué cantidad de dinero tiene que depositar Julia cada semana?

La tasa semanal equivalente a 3.6% capitalizable mensualmente es:

$$\left(1+\frac{i'}{52}\right)^{52} = \left(1+\frac{0.036}{12}\right)^{12}$$

$$1+\frac{i'}{52} = \sqrt[52]{(1.003)^{12}}$$

$$1+\frac{i'}{52} = \sqrt[52]{1.0366}$$

$$\frac{i'}{52} = 1.0006915 - 1$$

$$i' = 52(0.0006915)$$

$$i' = 0.03596 \quad \text{AC semanalmente}$$

$$i' = 0.03596/52$$

$$i' = 0.0006915 \quad \text{semanal}$$

CD5.73 cont.
Al despejar *R:*

$$M = R\left[\frac{(1+i')^{n}-1}{i'}\right] \quad \therefore \quad R = \frac{M}{\left[\frac{(1+i')^{n}-1}{i'}\right]}$$

$$R = \frac{M}{\left[\frac{(1+i')^{n}-1}{i'}\right]}$$

$$R = \frac{15\,000}{\left[\frac{(1.0006915)^{156}-1}{0.0006915}\right]}$$

$$R = \frac{15\,000}{\left[\frac{1.11386586-1}{0.0006915}\right]}$$

$$R = \frac{15\,000}{\left[\frac{0.11386586}{0.0006915}\right]}$$

$$R = \frac{15\,000}{164.665}$$

$$R = \$91.10$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.74
Hay un nuevo plan de ventas de un automóvil compacto con valor de $177 680. El plan consiste en dar el 30% de enganche del precio de contado, 36 pagos mensuales y la tasa de interés de 3.26% efectivo trimestral, ¿de cuánto es cada pago mensual?

La tasa mensual es:

$$(1+i)^3 = 1.0326$$

$$i'_2 = \sqrt[3]{1.0326} - 1 = 0.0107507$$

El valor actual del adeudo es:
Saldo = precio – enganche = 177 680 – 0.30 (177 680) = 177 680 – 53 304 = 124 376

$$A = R\left[\frac{(1+i')^n - 1}{i'}\right] \quad \therefore \quad R = \frac{A}{\left[\frac{1-(1+i')^{-n}}{i'}\right]}$$

$$R = \frac{124\,376}{\left[\frac{1-(1+0.0107507)^{-36}}{0.0107507}\right]}$$

$$R = \frac{124\,376}{\left[\frac{1-0.680478}{0.0107507}\right]}$$

$$R = \frac{124\,376}{\left[\frac{0.319522}{0.0107507}\right]}$$

$$R = \frac{124\,376}{29.721041}$$

$$R = \$4\,184.78$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tasa

CD5.75

¿Cuál es el valor actual de un conjunto de 18 pagos semestrales anticipados de $2 500 si el interés es de 25% capitalizable trimestralmente?

Encontrar la tasa efectiva semestral:

$$\left(1+\frac{i'}{2}\right)^{2}=\left(1+\frac{0.25}{4}\right)^{4}$$

$$\left(1+\frac{i'}{2}\right)^{2}=(1+0.0625)^{4}$$

$$1+\frac{i'}{2}=\sqrt[2]{(1.2744293)}$$

$$i'=2\left[1.1289039-1\right]$$
$$i'=2(0.1289039)$$
$$i'=0.2578 \quad \text{AC semestral}$$
$$i'=0.1289 \quad \text{semestral}$$

El valor actual de la anualidad anticipada es:

$$A=R\left[\frac{1-(1+i')^{-n+1}}{i'}+1\right]$$

$$A=2\,500\left[\frac{1-(1+0.1289)^{-18+1}}{0.1289}+1\right]$$

$$A=2\,500\left[\frac{1-(1.1289)^{-17}}{0.1289}+1\right]$$

$$A=2\,500\left[\frac{1-0.1273084}{0.1289}+1\right]$$

$$A=2500\left[\frac{0.872692}{0.1289}+1\right]$$

$$A=2\,500(7.7702997)+1$$

$$A=\$19\,425.75$$

CD5.76

El comerciante José Luis Balboa realiza por anticipado depósitos quincenales durante 8 bimestres para acumular $40 000, a una tasa de interés capitalizable de 24% cada mes. Encontrar la tasa efectiva quincenal:

$$\left(1+\frac{i'}{24}\right)^{24}=\left(1+\frac{0.24}{12}\right)^{12}$$

$$\left(1+\frac{i'}{24}\right)^{24}=(1+0.02)^{12}$$

$$1+\frac{i'}{24}=\sqrt[24]{(1.2682418)}$$
$$i'=24\left[1.00995-1\right]$$
$$i'=24\,(0.00995)$$
$$i'=0.2388 \quad \text{AC quincenal}$$
$$i'=0.00995 \quad \text{quincenal}$$

Un bimestre tiene 4 quincenas:

$$n=8\,(4)=32$$

$$M=R\left[\frac{(1+i')^{n+1}-1}{i'}-1\right] \quad \therefore \quad R=\frac{M}{\left[\frac{(1+i')^{n+1}-1}{i'}-1\right]}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$R = \frac{M}{\left[\frac{(1+i')^{n+1}-1}{i'}-1\right]}$$

$$R = \frac{40\,000}{\left[\frac{(1+0.00995)^{32+1}-1}{0.00995}-1\right]}$$

$$R = \frac{40\,000}{\left[\frac{1.38642323-1}{0.00995}-1\right]}$$

$$R = \frac{40\,000}{\left[\frac{0.38642323}{0.00995}-1\right]}$$

$$R = \frac{40\,000}{\left[\frac{0.2808458}{0.00995}-1\right]}$$

$$R = \frac{40\,000}{38.836506-1}$$

$$R = \$1057.18$$

Plazo

CD5.77

Adrián Méndez deposita en su cuenta de inversión en Invix-Banco la cantidad de $180 000 la cual produce 6% capitalizable mensualmente. Él piensa realizar retiros bimestrales de $9 000 dentro de 3 años. ¿Cuántos retiros de $9 000 podrá realizar Adrián?

$$\left(1+\frac{i'}{6}\right)^{6} = \left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{12}$$

$$\left(1+\frac{i'}{6}\right)^{6} = (1+0.005)^{12}$$

$$1+\frac{i'}{6} = \sqrt[6]{(1.0616778)}$$

CD5.77 cont.

$$i' = 6[1.010025-1]$$

$$i' = 6(0.010025)$$

$$i' = 0.06015 \quad \text{ACB}$$

$$i' = 0.010025 \quad \text{bimestral}$$

El valor del depósito antes de cumplir los 3 años es:

3 años × 6 bimestres por año = 18 bimestres

Anualidad simple:

$$A = R\left[\frac{1-(1+i')^{-n}}{i'}\right] \quad \therefore \quad n = \frac{\log\left(1-\frac{Ai'}{R}\right)}{\log(1+i')}$$

$$n = -\frac{\log\left(1-\frac{180\,000(0.010025)}{9\,000}\right)}{\log(1+0.010025)}$$

$$n = -\frac{\log\left(1-\frac{1804.5}{9\,000}\right)}{0.004332124}$$

$$n = -\frac{\log(1-0.2005)}{0.004332124}$$

$$n = -\frac{\log(0.7995)}{0.004332124}$$

$$n = \frac{0.0971815}{0.004332124}$$

$$n = 22.43$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.78
La mueblería Delher ofrece una cocina integral con 24 abonos semanales de $480 e intereses del 26% capitalizable mensualmente. El primer pago se realiza dentro de 3 meses después de la compra. ¿Cuál es el precio de contado de la cocina integral?

La tasa de capitalización por semana equivalente a la tasa de 26% anual capitalizable mensualmente es:

$$\left(1+\frac{i'}{52}\right)^{52}=\left(1+\frac{0.26}{12}\right)^{12}$$

$$\left(1+\frac{i'}{52}\right)^{52}=(1+0.021666)^{12}$$

$$1+\frac{i'}{52}=\sqrt[52]{(1.293324)}$$

$$i'=52\left[1.0049587-1\right]$$

$$i'=52(0.0049587)$$
$$i'=0.2578527 \quad \text{ACsemanal}$$
$$i'=0.0049587 \quad \text{semanal}$$

El valor presente de la cocina integral una semana antes de hacer el primero de los 24 pagos de $480 a la semana es:

$$A=R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$A=480\left[\frac{1-(1+0.0049587)^{-24}}{0.0049587}\right]$$

$$A=480\left[\frac{1-0.888061}{0.0049587}\right]$$

$$A=480\left[\frac{0.11194}{0.0049587}\right]$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.78 cont.

$A = 480(22.57426)$

$A = \$\,10\,835.64$

Para conocer el precio de contado de la cocina integral se tiene que encontrar el valor actual 12 semanas antes del primer pago.

$C = 10\,835.64\ (1.0049587)^{-12} = 10\,835.64$
$(0.94237) = \$10\,211.18$

Anualidades variables

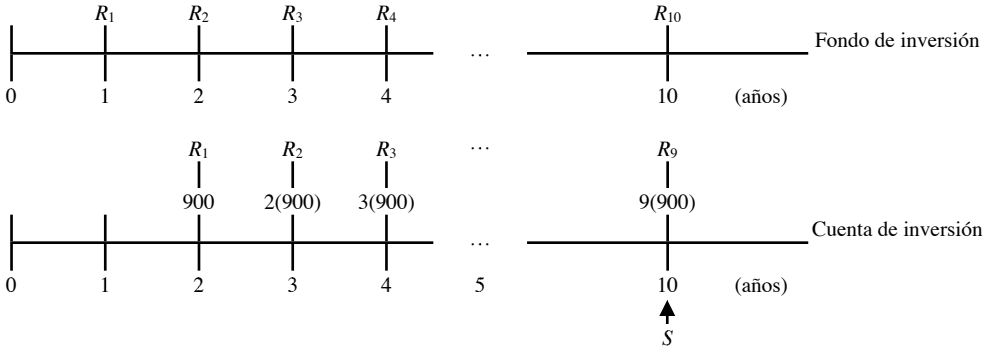
CD5.79

El señor Gilberto Noroña invierte $10 000 al final de cada año, durante 10 años en un fondo de inversión (FI) que paga el 9%. El fondo paga los intereses al final de cada año. La persona deposita su pago anual de intereses en una cuenta de inversión inmediata (CII) en Anvex Banco, que paga de intereses el 3.5% anual. ¿Cuánto dinero tendrá al final de los 10 años?

Como los intereses se pagan al final de cada año el señor Noroña tendrá al final de los diez años $100 000 en el fondo de inversión.

Los depósitos realizados en Anvex Banco también se pagan al final de cada año, pero su primer pago de intereses será a partir del segundo año.

Gráfica 27. Anualidad variable.



$M = 10\,000\ (1 + i) = 10\,000\ (1.09) = \$10\,900$
$I = 10\,900 - 10\,000 = \$900$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.79 cont.
Si I = R ∴

$$S = \frac{900}{0.035}\left[\left[\frac{1-(1+0.035)^{-9}}{0.035}\right](1+0.035)^{9+1} - 9\right]$$

$$S = \frac{900}{0.035}\left[\left[\frac{1-0.733730972}{0.035}\right](1+0.035)^{10} - 9\right]$$

$$S = \frac{900}{0.035}\left[\left[\frac{0.266269027}{0.035}\right](1.410598761) - 9\right]$$

$$S = \frac{900}{0.035}\left[(7.607687)(1.410598761) - 9\right]$$

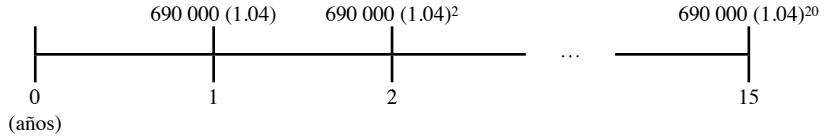
$$S = (25\ 714.29)\left[(10.73139316) - 9\right]$$

$$S = (25\ 714.29)(1.73139316)$$

$$S = \$44\ 521.54$$

CD5.80
La aseguradora EXE tiene que determinar el valor de los ingresos futuros del antropólogo Homero Garibay, quien sufre una lesión en la columna vertebral. En el momento del evento él percibía ingresos de $690 000 anuales y estimaba tener incrementos anuales de 4.0%. Al antropólogo Garibay le faltaban 20 años para jubilarse. Si el dinero tiene un valor de 4.5% anual, ¿cuál es el valor descontado del ingreso futuro del antropólogo Garibay?

Gráfica 28. Anualidad variable.



$A = 690\ 000\ (1.04)\ (1.045)^{-1} + 690\ 000\ (1.04)^2\ (1.045)^{-2} + \cdots + 690\ 000\ (1.04)^{20}\ (1.045)^{-20}$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$A = t_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$A = 69\ 000(1.04)(1.045)^{-1}\left[\frac{1-(1.04)^{20}(1.045)^{-20}}{1-(1.04)(1.045)^{-1}}\right]$$

$$A = 717\ 600(1.045)^{-1}\left[\frac{1-(2.191123143)(0.414642859)}{1-(1.04)(0.956937799)}\right]$$

$$A = 686\ 698.56\left[\frac{1-0.908533563}{1-0.9952115311}\right]$$

$$A = 686\ 698.56\left[\frac{0.091466434}{0.00484688995}\right]$$

$$A = 686\ 698.56(19.11.648475)$$

$$A = \$13\ 127\ 262.62$$

CD5.81

El señor Zamano va a mandar pintar la fachada de su taller mecánico y encerar la pared para evitar los grafiti, trabajo que le costaría $60 540. También tiene la alternativa de poner pintura y el barniz antigrafiti. Él sabe que este gasto lo tiene que realizar cada 8 años (por siempre) y sabe que el impermeabilizante aumentará 3% anual (por siempre). ¿Cuánto deben estar dispuestos los integrantes de la familia a pagar por la pintura y el barniz antigrafiti si él puede ganar 9% anual con su dinero?

$A = 60\ 540 + 60\ 540\ (1.03)^8\ (1.045)^{-8} + 60\ 540\ (1.03)1^8\ (1.045)^{-18} + 60\ 540\ (1.03)^{24}\ (1.045)^{-24} + \cdots$

La progresión geométrica es en general: $t_1, t_1r, t_1r^2, t_1r^3, \cdots$ entonces la suma de los n primeros términos se escribe en la forma:

$$S_n = t_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_n = t_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) = \frac{t_1}{1-r} - \frac{t_1r^n}{1-r}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Cuando $-1 < r < 1$ y si n aumenta sin límite entonces el término r^n tiende a 0 y S_n tiende a $t_1(1 - r)$. La suma de la progresión geométrica infinita se expresa de la siguiente forma:

$$S = \frac{t_1}{1-r}$$

Como: $0 < r = (1.03)^8 (1.09)^{-8} < 1$

El valor descontado se calcula de la siguiente forma:

$$A = \frac{t_1}{1-r} = \frac{60\ 540}{1-(1.03)^8(1.09)^{-8}} = \frac{60\ 540}{1-(1.266770081)(0.501266279)} = \frac{60\ 540}{0.635749187}$$

$$A = \$95\ 226.23$$

El señor Zamano debe estar dispuesto a pagar hasta $95 226.23 por el barniz antigrafiti.

CD5.82

Calcular la serie de pagos de $30 000 que se realiza al final de 2014 y se incrementan en $4 000 cada año por siempre. La tasa del interés es de 4.6%.

$$A = 30\ 000(1.046)^{-1} + 34\ 000(1.046)^{-2} + 38\ 000(1.046)^{-3} \qquad (1)$$

Al multiplicar por $(1+i) = 1.046$, se obtiene:

$$1.046A = 30\ 000 + 34\ 000(1.046)^{-1} + 38\ 000(1.046)^{-2} \qquad (2)$$

Al estar la ecuación (1) de (2):

$$0.046A = 30\ 000 + 4\ 000\underbrace{\left[(1.046)^{-1} + (1.046)^{-2} + (1.046)^{-3} + \cdots\right]}_{\text{Suma de la progresión geométrica infinita}} \qquad (3)$$

$t_1 = (1.046)^{-1}$
$r = (1.046)^{-1}$

Suma de una progresión geométrica infinita:
$(1 + i)^{-1}, (1 + i)^{-2}, (1 + i)^{-3}, (1 + i)^{-4}, (1 + i)^{-5}, \cdots$

Donde $i > 0$, para este caso $t_1 = (1.046)^{-1}$ y $r = (1.046)^{-1}$, $(-1 < r < 1)$

$$S = \frac{(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}}\left[\frac{1+i}{1+1}\right] = \frac{1}{(1+i)-1} = \frac{1}{i} \qquad 5.29$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.82 cont.
Al sustituir en la expresión anterior se obtiene:

$$(1.046)^{-1}+(1.046)^{-2}+(1.046)^{-3}+\cdots=\left[\frac{(1.046)^{-1}}{1-(1.046)^{-1}}\right]\left[\frac{1.046}{1.046}\right]=\frac{1}{1.046-1}=\frac{1}{0.046}$$

$$=21.74$$

Al sustituir en la ecuación (3):

$$0.046A=30\ 000+4\ 000(21.74)=30\ 000+86\ 960=116\ 960$$

$$A=\frac{116\ 960}{0.046}=\$2\ 542\ 608.70$$

Anualidades perpetuas

CD5.83
Encontrar el valor descontado de una perpetuidad simple ordinaria que paga $8 000 mensuales, con una tasa de 10% capitalizable mensualmente.

Datos
$R = \$8\ 000$
$T = 10\%$ ACM
$i = 0.10 / 12 = 0.008333$ mensual
Incógnita: C

$$R=Ci$$

$$\therefore C=\frac{R}{i}=\frac{8\ 000}{0.008333}=\$960\ 000$$

CD5.84
Se tiene una renta perpetua de $500 000 pagadera al final de cada año. El interés que paga la institución financiera por la inversión es de 12.15% anual. ¿Cuál es el valor actual del legado?

Datos
$R = \$500\ 000$
$T = 12.15\%$ anual
Incógnita: C

$$R=Ci$$

$$\therefore C=\frac{R}{i}=\frac{500\ 000}{0.1215}=\$4\ 115\ 226.34$$

CD5.85
Se tiene previsto que ciertas acciones generen un dividendo $600 al final de cada trimestre durante un periodo indefinido en el futuro. Si un inversionista desea obtener rendimiento anual efectivo de 10%, ¿cuánto debe pagar por las acciones?

Se calcula la tasa trimestral:

$$\left(1+\frac{i'}{4}\right)^{4}=(1+0.10)^{1}$$

$$1+\frac{i'}{4}=\sqrt[4]{1.10}$$

$$i'=4\left[1.0241137-1\right]$$

$$i'=4(0.0241137)$$

$$i'=0.09645477\ \ \text{ACT}$$

$$i'=0.0241137\ \ \text{trimestral}$$

El precio para obtener el rendimiento de 10% o por trimestre es el valor descontado C de una perpetuidad simple ordinaria:

$$R=Ci$$

$$\therefore C=\frac{R}{i}=\frac{600}{0.0241137}=\$24\ 882.13$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD5.86
¿Cuál es el pago mensual de una perpetuidad de $750 000, suponiendo una tasa de interés de 1.25% mensual?

Datos
$C = \$750\ 000$
$T = 1.25\%$ mensual
Incógnita: R

$$R = Ci$$
$$R = (75\ 000)(0.0125) = \$9\ 375$$

CD5.87
¿Cuánto dinero se requiere para un fondo de beca que pague $22 000 anualmente, si el capital gana 9% anual y el primer pago se realizará al final del primer año?

Datos
$R = \$22\ 000$
$T = 9\%$ anual
Incógnita: C

$$R = Ci$$
$$\therefore C = \frac{R}{i} = \frac{22\ 000}{0.09} = \$244\ 444.44$$

CD5.88
El empresario Gerardo Degaray establece que parte de sus bienes serán invertidos de tal forma que los intereses generados se paguen al Instituto Nacional de Nutrición mediante una renta perpetua de $800 000 al inicio de cada semestre. ¿Cuál es el valor presente de este legado, suponiendo que se encuentra invertido a 10.48% interés semestral?

Datos
$C = \$800\ 000$
$T = 10.48\%$ semestral
Incógnita: R

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$R = Ci$$

$$\therefore C = \frac{R}{i} = \frac{800\ 000}{0.1048} = \$7\ 633\ 587.79$$

CD5.89
¿Cuánto puede retirar cada mes el joven Antonio Morales si le depositan en una cuenta de inversión $1 250 000? INVURSA paga una tasa de interés de 12.75% capitalizable mensualmente.

Datos
$C = \$1\ 250\ 000$
$T = 12.75\%$ ACM
$i = 0.01063$ mensual
Incógnita: R

$$R = Ci$$

$$R = (1\ 250\ 000)(0.01063) = \$13\ 281.25$$

CD5.90
La contadora Yuritzi Alejo desea rentar un departamento en $4 500 mensuales. ¿Cuál es la tasa de interés si el departamento está valuado en $800 000?

Datos
$C = \$\ 800\ 000.00$
$R = \$\ 4\ 500.00$ mensuales

$$R = Cin$$

$$\therefore i = \frac{R}{Cn} = \frac{\$4\ 500}{\$800\ 000\left(\frac{1}{12}\right)} = 0.675 = 6.75\%\ \text{mensual}$$

CD5.91
Al señor Martínez le llega en el mes de enero de cada año un recibo del servicio de alumbrado público, desazolve del alcantarillado y limpieza de calles del municipio en que vive. En este año el recibo es de $1 834, ¿cuál será el costo estimado por bimestre, suponiendo que los bancos en promedio cargan 4.6% capitalizable bimestralmente?
Solución:

Datos
El valor presente $C = \$1\ 834$
La tasa $T = 4.6\%$ ACB
Plazo $n = 1$ año
La incógnita es la renta bimestral $R = ?$

CD5.91 cont.
Es una anualidad vencida.

$$C = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$1\ 834 = R\left[\frac{1-(1+0.046/6)^{-6}}{0.046/6}\right]$$

$$1\ 834 = R\left[\frac{1-(1.007666666)^{-6}}{0.007666666}\right]$$

$$1\ 834 = R\left[\frac{0.955209526}{0.007666666}\right]$$

$$R = \frac{1\ 834}{124.5925578}$$

CD5.92
La familia Robles acuerda crear un fondo inversión en EC Banco, el cual ofrece una tasa de interés de 9.8% capitalizable mensualmente. ¿Cuál es la renta mensual que podrían disponer 1 mes después de cumplirse los 6 años? Los retiros se realizarán por tiempo ilimitado y los ocho integrantes de la familia robles aportará al fondo $100 000 cada uno.

Datos
La cantidad invertida en el fondo es de $800 000
En 6 años es equivalente a 72 meses.
Tasa de interés: 9.8% ACM.
Tasa mensual

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

El cálculo del valor futuro del capital es de 72 meses antes de hacer el primer pago (o el primer retiro):

$$M = 800\ 000(1 + 0.008166667)^{72}$$
$$M = 800\ 000(1.796089886)$$
$$M = \$1\ 436\ 871.91$$

La renta mensual perpetua a partir del mes 73 es igual a los intereses que genere el capital durante un mes ($n = 1$)

$$i = R = 1\ 436\ 871.91(0.008166667)$$
$$R = \$11\ 734.45$$

A cada integrante de la familia le correspondería mensualmente $1 466.80. Como se observa, es menos de un salario mínimo. Para que cada uno de ellos recibiera por lo menos un salario mínimo, tienen dos alternativas: hacer una aportación mayor a $100 000 o buscar una institución bancaria que ofrezca una tasa de interés mucho más alta.

Cada uno de los integrantes de la familia Robles tendría que aportar al fondo más de $140 000 para tener una renta de aproximadamente un salario mínimo en el mes 73, considerando un incremento del 4% al salario mínimo anual.

Realizar el cálculo con una aportación de $150 000 por cada integrante de la familia Robles y la tasa de interés de 9.8% capitalizable mensualmente. La respuesta es de:

$$R = \$17\ 601.68$$
$$R = \frac{17\ 601.68}{8} = \$2\ 200.21$$

En el mes 73 cada integrante de la familia Robles recibirá = $2 200.21

Cursos en línea Grupo Editorial Patria

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Ampliación del conocimiento en anualidades
Ejercicios con Excel

CDEx4.1
El ingeniero Alberto de la Rosa al leer el periódico encuentra un anuncio de venta de automóviles de la marca JM. La unidad se puede adquirir haciendo un pago inicial de $52 200 pesos y 36 pagos fijos mensuales de $2 516 pesos (no incluye el seguro automotriz) La tasa de interés es del 10% anual convertible mensualmente (i*). La fecha fijada por la empresa financiadora es el día 30 de cada mes .¿Cuánto en realidad pagaría el ingeniero de la Rosa por el automóvil, si se decidiera a comprarlo?

CDEx4.2
Encontrar el valor actual pagado por una computadora si se dió un enganche de $10 400 pesos y se realizaron 6 pagos mensuales vencidos de 1 600 pasos y un séptimo pago de 2 300 pesos,!la tasa de interés pactada es de 18% convertible mensualmente.

CDEx4.3

¿Cuánto debe pagar al final de cada mes un trabajador a la caja de ahorros del sindicato del IMSS por un crédito de 35 000 pesos pagaderos a tres años, a una tasa de interés del 4% mensual?

CDEx4.4
¿Cuántos pagos mensuales vencidos de 540 pesos se tendrían que realizar para saldar una deuda, pagadera el día de hoy de 10450 pesos, si el primer pago se realiza dentro de un mes y el interés es del 24% convertible mensualmente?

CDEx4.5
Encuentre el monto de seis pagos que debe realizar el día uno de cada mes la Sra. Ruiz, por la cantidad de 775 pesos, al comprar un Desayunador “Dinamarca” de madera de Maple con cuatro sillas tapizadas, siendo el tipo de interés del 25% anual capitalizable mensualmente.

CDEx4.6
¿Cuál es el valor de contado da una casa que compro la familia López en la colonia Fuentes del Pedregal, hace 15 años, si realizaban pagos anticipados de 30 000 pesos mensuales, con una tasa de interés del 28% anual convertible mensualmente?

CDEx4.8
¿Cuántos pagos de 775 pesos debe realizar el ingeniero Gómez, el día uno de cada mes para saldar una deuda, por la compra de un desayunador que consta de una mesa con cuatro sillas tapizadas, al cubrir su último pago el ha acumulado la cantidad de 5 000 pesos, si la tasa de interés aplicada fue del 25% anual convertible mensualmente?

CDEx4.9
Encontrar el pago total de que debe realizar el li. Hernández por la compra de un librero el día de hoy y después de tres meses realiza doce pagos al final de cada mes de 950 pesos, el interés es del 24% anual convertible mensualmente

CDEx4.10

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

El médico Jesus Ramírez compra una televisión de pantalla: plana de 17" con un pago inicial de 3 000 pesos y ocho mensualidades de 3 500 pesos cada una pagando la primera después de cuatro meses de la compra, le están cobrando de intereses el 19 55% anual convertible mensualmente ¿Encontrar el precio del equipo?

CDEx4.11

El papá del alumno Arturo Anguiano deposita al 13 da julio la cantidad de 500 000 pesos en un fondo de inversión, ese mismo día inscribe a su hijo a la preparatoria. El papá tiene la idea de realizar nueve retiros semestrales a partir de cuando inscriba a si hijo en el mes de julio a la universidad, encontrar el valor de cada retiro semestral a realizar, si la tasa es del 12% anual capitalizable semestralmente

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

GLOSARIO

Acreedor. Persona o razón social a la que se debe pagar el dinero que nos han prestado.

Actividad financiera. Costumbre de pagar un rédito por el uso de dinero prestado.

Anualidad. Cuota anual de devolución de un crédito.

Capital. En términos financieros, es una determinada cantidad de dinero que permite ganar más (dinero) en operaciones de préstamo, llamada esta última interés.

Compra. Acción de adquirir algo a cambio de dinero. Conjunto de bienes y servicios obtenidos en el acto de una compra.

Compra a crédito. Compra cuyo importe no se paga en efectivo en el momento de la adquisición, sino que la propia entidad vendedora o una tercera entidad concede crédito por la suma debida. En bolsa es la adquisición de acciones financiada a través de créditos por una autoridad bursátil.

Compra de contado. Compra cuyo importe se paga en el momento de la adquisición.

Compra a plazos. Contrato de compraventa en el cual el vendedor entrega el bien objeto de la transacción en el momento en que ésta se produce, y el comprador puede postergar sus pagos a futuras cuotas o plazos, aunque puede efectuar uno de estos pagos en el momento de la compra.

Comprador. Persona que adquiere un bien o derecho producto de una operación de compraventa.

Compraventa. Contrato por el que uno de los contratantes (vendedor), se obliga a entregar una cosa determinada y el otro (comprador) a pagar por ella un precio determinado. Negocio de objetos que se revenden.

Contado. Procedimiento de cobro o pago que implica la entrega del bien o servicio con contrapartida monetaria en ese mismo momento.

Crédito. Reputación, fama, prestigio que tiene una persona respecto al cumplimiento de sus obligaciones financieras.

Crédito a clientes. Cantidad que los clientes de una empresa le adeudan en función de los suministros que reciben.

Debe. Adeudar, estar en deuda con otra persona. Estar obligado a cumplir una obligación o realizar un pago.

Deuda. Obligación que se ha contraído con un tercero y que se ha de satisfacer. En general, es una obligación de pagar cierta cantidad de dinero.

Deudor. Persona o razón social que solicita dinero prestado y se compromete a pagarlo posteriormente, extendiendo para ello un pagaré.

Factura. Documento o recibo entregado por el vendedor al comprador como prueba de que éste ha adquirido una mercancía determinada o recibo de un servicio a un precio dado, y que representa, por tanto, el derecho de cobro a favor del vendedor. En la factura se especifican datos personales de ambos, las características de los productos, así como la fecha y el precio de compra.

Operación. Registro de una entrada o salida de dinero de un depósito bancario.

Rédito. Renta de un capital.

Saldo. Diferencia existente en un momento dado entre el debe y el haber en una cuenta corriente.

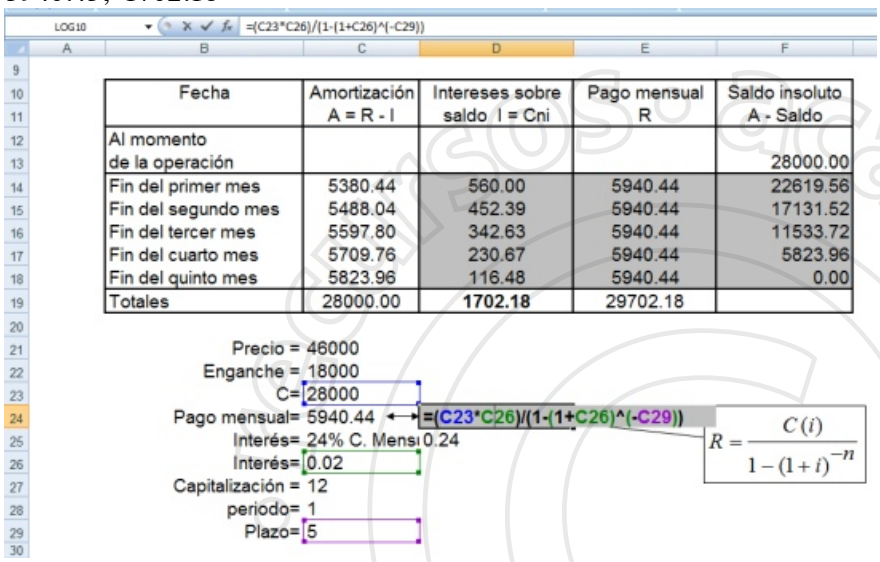
Tiempo. Número de periodos (tiempo predeterminado) que dura el préstamo de un capital.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

6.1
3570.52

6.2
5940.43, 1702.18

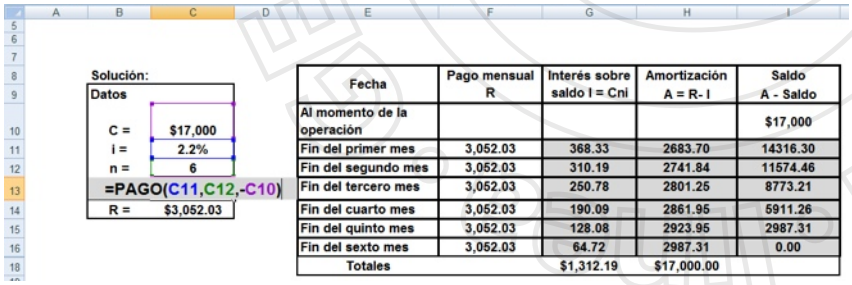


Fecha	Amortización A = R - I	Intereses sobre saldo I = Cni	Pago mensual R	Saldo insoluto A - Saldo
Al momento de la operación				28000.00
Fin del primer mes	5380.44	560.00	5940.44	22619.56
Fin del segundo mes	5488.04	452.39	5940.44	17131.52
Fin del tercer mes	5597.80	342.63	5940.44	11533.72
Fin del cuarto mes	5709.76	230.67	5940.44	5823.96
Fin del quinto mes	5823.96	116.48	5940.44	0.00
Totales	28000.00	**1702.18**	29702.18	

Precio = 46000
Enganche = 18000
C= 28000
Pago mensual= 5940.44 =(C23*C26)/(1-(1+C26)^(-C29))
Interés= 24% C. Mensi 0.24
Interés= 0.02
Capitalización = 12
periodo= 1
Plazo= 5

$$R = \frac{C(i)}{1-(1+i)^{-n}}$$

6.3
3052.03



Solución:

Datos	
C =	$17,000
i =	2.2%
n =	6
=PAGO(C11,C12,-C10)	
R =	$3,052.03

Fecha	Pago mensual R	Interés sobre saldo I = Cni	Amortización A = R- I	Saldo A - Saldo
Al momento de la operación				$17,000
Fin del primer mes	3,052.03	368.33	2683.70	14316.30
Fin del segundo mes	3,052.03	310.19	2741.84	11574.46
Fin del tercero mes	3,052.03	250.78	2801.25	8773.21
Fin del cuarto mes	3,052.03	190.09	2861.95	5911.26
Fin del quinto mes	3,052.03	128.08	2923.95	2987.31
Fin del sexto mes	3,052.03	64.72	2987.31	0.00
Totales		$1,312.19	$17,000.00	

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

6.4

Fecha	Amortización A = R - I	Intereses sobre saldo I = Cni	Pago mensual R	Saldo insoluto A - Saldo
Al momento de la operación				20000.00
Fin del primer trimestre	1919.61	1485.32	3404.94	18080.39
Fin del segundo trimestre	2062.18	1342.76	3404.94	16018.21
Fin del tercer trimestre	2215.33	1189.61	3404.94	13802.88
Fin del cuarto trimestre	2379.85	1025.09	3404.94	11423.03
Fin del quinto trimestre	2556.59	848.35	3404.94	8866.44
Fin del sexto trimestre	2746.46	658.48	3404.94	6119.98
Fin del septimo trimestre	2950.43	454.51	3404.94	3169.55
Fin del octavo trimestre	3169.55	235.39	3404.94	0.00
Totales	20000.00	7239.50	27239.50	

A= 20000
Pago mensual= **3404.94** ↔ **3404.94**
Interés= 29% C. Mens 0.29
Interés= 0.02416667
Capitalización Mensual = 12
Capitalización trimestral = 4
Periodo= 1
Tasa equivalente trimestral= 0.0742662
n/m= 3
Plazo= 8

$$R = \frac{C(i)}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$i' = (1+i)^{n/m} - 1 \quad efectiva$$

6.5
3 500.68

6.6
6643.10

6.7
91 277.89

Fecha	Amortización A = R - I	Intereses sobre saldo I = Cni	Pago mensual R	Saldo insoluto A - Saldo
Al momento de la operación				528998.85
Fin del primer mes	85987.90	5289.99	91277.89	443010.95
Fin del segundo mes	86847.78	4430.11	91277.89	356163.17
Fin del tercer mes	87716.26	3561.63	91277.89	268446.92
Fin del cuarto mes	88593.42	2684.47	91277.89	179853.50
Fin del quinto mes	89479.35	1798.53	91277.89	90374.15
Fin del sexto mes	90374.15	903.74	91277.89	0.00
Totales	528998.85	18668.48	547667.33	

Precio de lista = 459999
IVA = 68999.85
C= 528998.85
Pago mensual= 91277.89 ↔ 91277.89
Interés= 12% C. Mensual= 0.12
Interés= 0.01
Capitalización = 12
periodo= 1
Plazo= 6

$$R = \frac{C(i)}{1-(1+i)^{-n}}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

6.8
21 812.70

Fecha	Amortización A = R - I	Intereses sobre saldo I = Cni	Pago mensual R	Saldo insoluto A - Saldo
Al momento de la operación				95000.00
Fin del primer semestre	**12312.70**	9500.00	21812.70	82687.30
Fin del segundo semestre	13543.97	8268.73	21812.70	69143.33
Fin del tercer semestre	14898.37	6914.33	21812.70	54244.96
Fin del cuarto semestre	16388.21	5424.50	21812.70	37856.75
Fin del quinto semestre	18027.03	3785.68	21812.70	19829.73
Fin del sexto semestre	19829.73	1982.97	21812.70	0.00
Totales	95000.00	35876.21	130876.21	

A= 95000
Pago mensual= **21812.70** ⟷ **21812.70**
Interés= 20% C. Semestral= 0.2
Interés= 0.1
Capitalización = 2
periodo= 1
Plazo= 6

$$R = \frac{C(i)}{1-(1+i)^{-n}}$$

6.9
9436.29

6.10
74%

6.11
a) 10 604.53,
b) 78 254.82

6.12

	Amortización A = R - I	Intereses sobre saldo I = Cni	Pago mensual R	Saldo insoluto A - Saldo
Al momentode la operación				103100.00
Fin del mes 1	3822.27	1031.00	4853.27	99277.73
Fin del mes 2	3860.50	992.78	4853.27	95417.23
Fin del mes 3	3899.10	954.17	4853.27	91518.12
Fin del mes 4	3938.09	915.18	4853.27	87580.03
Fin del mes 5	3977.47	875.80	4853.27	83602.56
Fin del mes 6	4017.25	836.03	4853.27	79585.31
Fin del mes 7	4057.42	795.85	4853.27	75527.88
Fin del mes 8	4098.00	755.28	4853.27	71429.89
Fin del mes 21	4663.90	189.37	4853.27	14273.41
Fin del mes 22	4710.54	142.73	4853.27	9562.87
Fin del mes 23	4757.65	95.63	4853.27	4805.22
Fin del mes 24	4805.22	48.05	4853.27	0.00
Totales	39989.45	8543.30	48532.75	

A= 103100
Pago mensual= **4853.27** ⟷ **4853.27**
Interés= 12% AC. mensual= 0.12
Interés= 0.01 Capitalización = 12 Periodo= 1 Plazo= 24

$$R = \frac{C(i)}{1-(1+i)^{-n}}$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

6.13

$R = \$3\,091.87$

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
sep				16000.00
oct		320.00		16320.00
nov		326.40		16646.40
dic		332.93		16979.33
ene		339.59		17318.91
feb	2552.25	346.38	2898.63	14766.66
mar	2603.30	295.33	2898.63	12163.37
abr	2655.36	243.27	2898.63	9508.00
may	2708.47	190.16	2898.63	6799.53
jun	2762.64	135.99	2898.63	4036.89
jul	2817.89	80.74	2898.63	1219.00
Total	16099.91	2610.78	17391.78	

C_1 = Deuda al 31 de enero $= 16000(1.02)^4$

C = 16000.00
C_1 = 17318.91
Interés= 24% C. M.= 0.24
Interés= 0.02
Capitalización = 12
Periodo= 1
n = 6

1 + i = 1.02
R = 2856.41

$$R = \frac{C_1\,(i)}{1-(1+i)^{-n}}$$

$n_1 = 4$

6.14

$R = \$25\,792.68$

$M_2 = \$1\,697\,996.32$

6.15

Datos
C = $22,500
n = 9
R = $2,500.00
T_1 = 18% AC mensual
i_1 = 1.5%
T_1 = 24% AC mensual
i_2 = 2.00%

Fecha	Pago por período	Interés sobre saldo I = Cni	Amortización A = $22,500/9	Saldo
10-ene	R = A + I			22,500.00
10-feb	2,837.50	337.50	2500.00	20000.00
10-mar	2,800.00	300.00	2500.00	17500.00
10-abr	2,762.50	262.50	2500.00	15000.00
10-may	2,725.00	225.00	2500.00	12500.00
10-jun	2,687.50	187.50	2500.00	**10000.00**
10-jul	**2,700.00**	**200.00**	2500.00	7500.00
10-ago	2,650.00	150.00	2500.00	5000.00
10-sep	2,600.00	100.00	2500.00	2500.00
10-oct	2,550.00	50.00	2500.00	0.00
Totales	24,312.50	$1,812.50	$22,500.00	

6.16

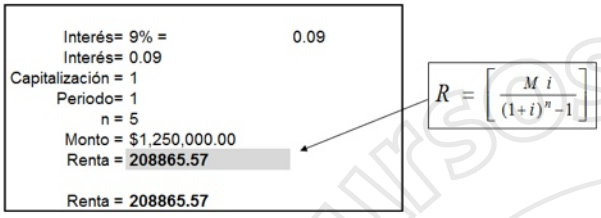
$R = 474.983383$ *UDI*

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

6.17

$1 250 000

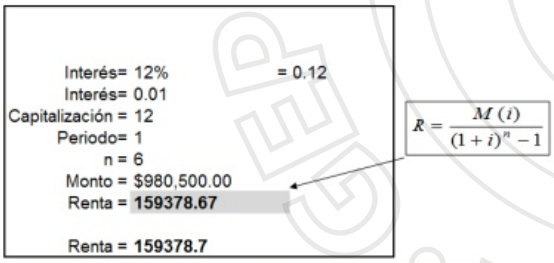
Fecha	Depósito por periodo	Intereses	Total que se suma al monto	Saldo
1	208865.57		150383.56	208865.57
2	208865.57	18797.90	227663.47	436529.04
3	208865.57	39287.61	248153.19	684682.23
4	208865.57	61621.40	270486.97	955169.20
5	208865.57	85965.23	294830.80	1250000.00
Total	1044327.86	205672.14	1191517.99	



6.18

$R = \$159\ 378.67$

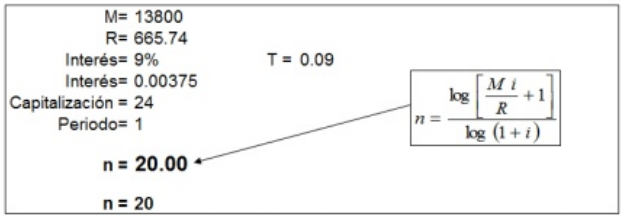
Fecha	Depósito por periodo	Intereses	Total que se suma al monto	Saldo
1	159378.67		159378.67	159378.67
2	159378.67	1593.79	160972.46	320351.13
3	159378.67	3203.51	162582.18	482933.32
4	159378.67	4829.33	164208.01	647141.33
5	159378.67	6471.41	165850.09	812991.41
6	159378.67	8129.91	167508.59	**980500.00**
Total	956272.04	24227.96	980500.00	



6.19

20 quincenas

Fecha	Depósito por periodo	Intereses	Total que se suma al monto	Saldo
1	665.74		665.74	665.74
2	665.74	2.50	668.24	1,333.98
3	665.74	5.00	670.74	2,004.72
4	665.74	7.52	673.26	2,677.98
5	665.74	10.04	675.78	3,353.76
6	665.74	12.58	678.32	4,032.08
7	665.74	15.12	680.86	4,712.94
18	665.74	43.74	709.48	12,373.04
19	665.74	46.40	712.14	13,085.18
20	665.74	49.07	714.81	13,799.98
Total	7,988.88	166.85	8,155.73	



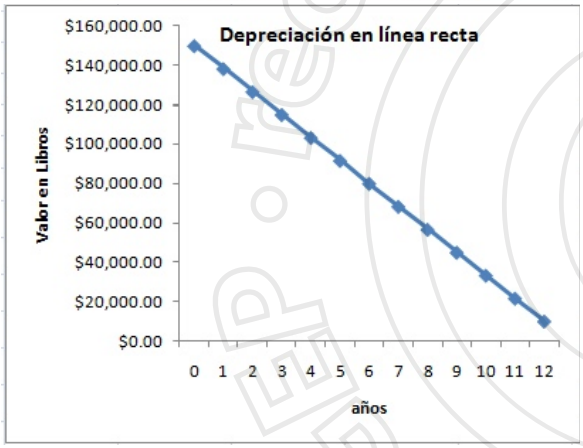
D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

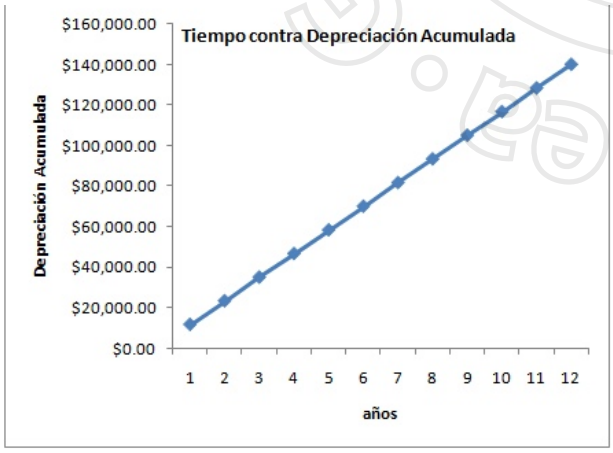
6.20

$B = \$140\,000$

DATOS	
C =	$150,000.00
S =	$10,000.00
n =	12
B =	$140,000.00
D =	$11,666.67

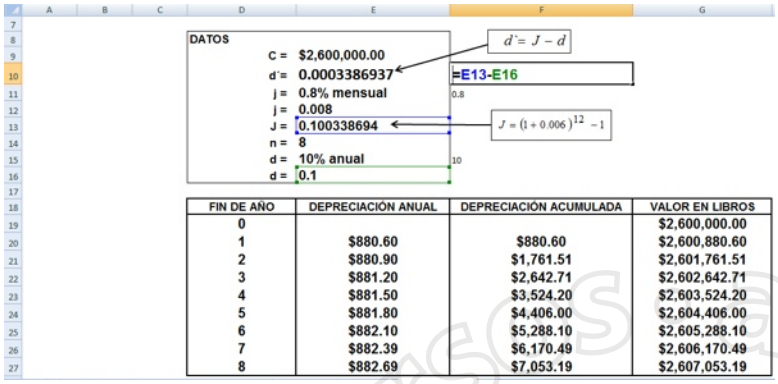
FIN DE AÑO	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0			$150,000.00
1	$11,666.67	$11,666.67	$138,333.33
2	$11,666.67	$23,333.33	$126,666.67
3	$11,666.67	$35,000.00	$115,000.00
4	$11,666.67	$46,666.67	$103,333.33
5	$11,666.67	$58,333.33	$91,666.67
6	$11,666.67	$70,000.00	$80,000.00
7	$11,666.67	$81,666.67	$68,333.33
8	$11,666.67	$93,333.33	$56,666.67
9	$11,666.67	$105,000.00	$45,000.00
10	$11,666.67	$116,666.67	$33,333.33
11	$11,666.67	$128,333.33	$21,666.67
12	$11,666.67	$140,000.00	$10,000.00





D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

6.21



FIN DE AÑO	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0			$2,600,000.00
1	$880.60	$880.60	$2,600,880.60
2	$880.90	$1,761.51	$2,601,761.51
3	$881.20	$2,642.71	$2,602,642.71
4	$881.50	$3,524.20	$2,603,524.20
5	$881.80	$4,406.00	$2,604,406.00
6	$882.10	$5,288.10	$2,605,288.10
7	$882.39	$6,170.49	$2,606,170.49
8	$882.69	$7,053.19	$2,607,053.19

6.22

DATOS
C = $250,000.00
d´= 0.06
j = 7% anual
j = 0.07
n = 5
d = 13% anual
d = 0.13

FIN DE AÑO	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0			$250,000.00
1	$15,000.00	$15,000.00	$265,000.00
2	$15,900.00	$30,900.00	$280,900.00
3	$16,854.00	$47,754.00	$297,754.00
4	$17,865.24	$65,619.24	$315,619.24
5	$18,937.15	$84,556.39	$334,556.39

6.23

$d' = 0.055607836$

$C = \$1975.11$

6.24

DATOS
C = $190,000.00
B = $175,000.00
n = 5
S = $15,000.00

AÑO	FRACCIÓN	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0				$190,000.00
1	0.3333	$58,333.33	$58,333.33	$131,666.67
2	0.2667	$46,666.67	$105,000.00	$85,000.00
3	0.2000	$35,000.00	$140,000.00	$50,000.00
4	0.1333	$23,333.33	$163,333.33	$26,666.67
5	0.0667	$11,666.67	$175,000.00	$15,000.00

Recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

6.25

DATOS	
C =	$3,700,000.00
B =	$2,950,000.00
n =	6
denominador =	21
S =	$750,000.00

AÑO	NUMERADOR	FRACCIÓN	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0					$3,700,000.00
1	6	0.2857	$842,857.14	$842,857.14	$2,857,142.86
2	5	0.2381	$702,380.95	$1,545,238.10	$2,154,761.90
3	4	0.1905	$561,904.76	$2,107,142.86	$1,592,857.14
4	3	0.1429	$421,428.57	$2,528,571.43	$1,171,428.57
5	2	0.0952	$280,952.38	$2,809,523.81	$890,476.19
6	1	0.0476	$140,476.19	$2,950,000.00	$750,000.00

6.26

DATOS	
C =	$480,000.00
B =	$358,000.00
n =	3
Dk =	$2.24
T =	160,000
S =	122,000
S =	$122,000.00

AÑO	Km	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0				$480,000.00
1	50,000	$111,875.00	$111,875.00	$368,125.00
2	58,000	$129,775.00	$241,650.00	$238,350.00
3	52,000	$116,350.00	$358,000.00	$122,000.00
T	160,000			

6.27

$B = \$618\ 400$

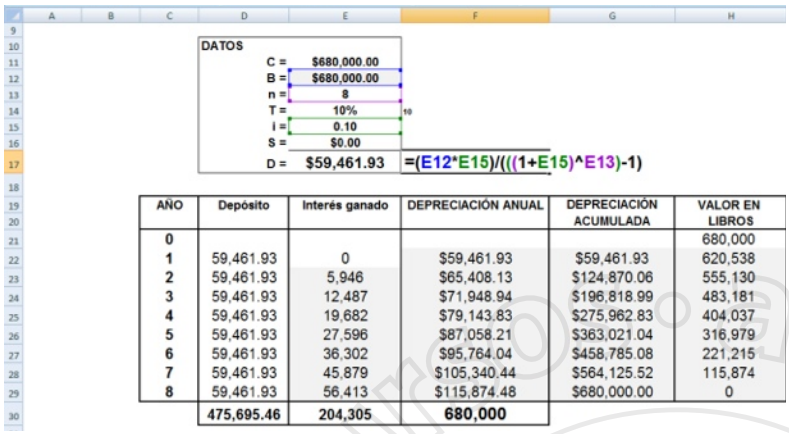
$D = \$\,105\ 410.27$

DATOS		
C =	$798,400.00	
B =	$618,400.00	
n =	5	
T =	8%	
i =	0.08	
S =	$180,000.00	
D =	$105,410.27	=(E12*E15)/(((1+E15)^E13)-1)

AÑO	Depósito	Interés ganado	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0					798,400
1	105,410.27	0	$105,410.27	$105,410.27	692,990
2	105,410.27	8,433	$113,843.09	$219,253.36	579,147
3	105,410.27	17,540	$122,950.54	$342,203.91	456,196
4	105,410.27	27,376	$132,786.58	$474,990.49	323,410
5	105,410.27	37,999	$143,409.51	$618,400.00	180,000
	527,051.36	91,349	618,400		

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

6.28



DATOS		
C =	$680,000.00	
B =	$680,000.00	
n =	8	
T =	10%	
i =	0.10	
S =	$0.00	
D =	$59,461.93	=(E12*E15)/(((1+E15)^E13)-1)

AÑO	Depósito	Interés ganado	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0					680,000
1	59,461.93	0	$59,461.93	$59,461.93	620,538
2	59,461.93	5,946	$65,408.13	$124,870.06	555,130
3	59,461.93	12,487	$71,948.94	$196,818.99	483,181
4	59,461.93	19,682	$79,143.83	$275,962.83	404,037
5	59,461.93	27,596	$87,058.21	$363,021.04	316,979
6	59,461.93	36,302	$95,764.04	$458,785.08	221,215
7	59,461.93	45,879	$105,340.44	$564,125.52	115,874
8	59,461.93	56,413	$115,874.48	$680,000.00	0
	475,695.46	204,305	680,000		

Respuestas a problemas reto

Reto 1

1 098.42

Mes	Saldo Insoluto	% sobre Saldo Insoluto	Pago Mensual	Amortización
0	6,000			
1	5,066.58	165.00	1098.42	933.42
2	4,107.48	139.33	1098.42	959.09
3	3,122.01	112.96	1098.42	985.47
4	2,109.44	85.86	1098.42	1012.57
5	1,069.03	58.01	1098.42	1040.42
6	0.00	29.40	1098.42	1069.03
TOTAL		590.55	6590.55	6000.00

Pago Mensual	$1,098.42
	=PAGO(E21,E22,-E23)

DATOS	
i =	*0.0275*
n =	*6*
Valor Actual =	*6,000*

Reto 2

238 206.86

		Tabla de Fondo de Amortización		
Fecha	Depósito por periodo	Intereses	Total que se suma al monto	Saldo
1	238206.93		238206.93	238206.93
2	238206.93	22867.87	261074.80	499281.73
3	238206.93	47931.05	286137.98	785419.70
4	238206.93	75400.29	313607.22	1099026.92
5	238206.93	105506.58	343713.51	1442740.44
Total	1191034.65	251705.79	1442740.44	

M=	1442740		R=	238206.93
Interés=	9.6%	T= 0.096		
Interés=	0.096			
Capitalización =	1			
Periodo=	1			

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Reto 3

5 725.69

3.-		Tabla de Amortización		
Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
0				371000.00
1	160.69	5565.00	5725.69	370839.31
2	163.10	5562.59	5725.69	370676.22
3	165.54	5560.14	5725.69	370510.67
4	168.03	5557.66	5725.69	370342.65
5	170.55	5555.14	5725.69	370172.10
6	173.10	5552.58	5725.69	369999.00
7	175.70	5549.98	5725.69	369823.30
8	178.34	5547.35	5725.69	369644.96
Totales	1001.00	33353.11	34354.1	
C=	530000	Enganche=159000	C_1=	371000
Interés=	18% C. M.=	0.18	R=	5725.686
Interés=	0.015			
Capitalización =	12			
Periodo=	1			
n=	20 años			
n=	240 meses			

Reto 4

530.48

Periodo	Saldo Insoluto	% sobre Saldo Insoluto	Pago Quincenal	Amortización
0	2,100			
1	1,578.27	8.75	530.48	521.73
2	1,054.37	6.58	530.48	523.90
3	528.28	4.39	530.48	526.09
4	0.00	2.20	530.48	528.28
TOTAL		21.92	2121.92	2100.00

Pago Quincenal $530.48

=PAGO(E22,E23,-E24)

DATOS	
i =	*0.004166667*
n =	*4*
Valor Actual =	*2,100*

Reto 5

El último pago es de: $ 7 309.45

Periodo	Saldo Insoluto	% sobre Saldo Insoluto	Pago Bimestral	Amortización
0	90,000			
1	75,675.00	675.00	15000.00	14325.00
2	61,242.56	567.56	15000.00	14432.44
3	46,701.88	459.32	15000.00	14540.68
4	27,052.15	350.26	20000.00	19649.74
5	7,255.04	202.89	20000.00	19797.11
6	0.00	54.41	7,309.45	7255.04
TOTAL		2309.45	92309.45	90000.00

DATOS	
i =	*0.0075*
n =	*6*
Valor Actual =	*90,000*

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

AMORTIZACIÓN Y DEPRECIACIÓN

Objetivos

- Aplicar los conceptos de amortización, fondos de amortización y depreciación.
- Identificar y resolver los diferentes problemas de amortización, fondos de amortización y depreciación.
- Aprender a construir e interpretar cuadros de amortización, fondo de inversión y depreciación, utilizando la hoja electrónica de cálculo Excel.

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Formulario

El saldo insoluto después del $(k-1)$-ésimo pago es el valor descontado de los $n-(k-1)=n-k+1$ pagos restantes.

$$Saldo\ insoluto = R\left[\frac{1-(1+i)^{-(n-k+1)}}{i}\right] \quad 6.1$$

El interés pagado en el k-ésimo pago es:

$$I = R\left[1-(1+i)^{-(n-k+1)}\right] \quad 6.2$$

El k-ésimo pago de la amortización es:

$$A = R(1+i)^{-(n-k+1)} \quad 6.3$$

Método prospectivo: el saldo insoluto P inmediatamente después del k-ésimo pago será igual al valor descontado de los $n-k$ pagos que quedan por realizar.

$$P = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n-k}}{i}\right] \quad 6.4$$

Método retrospectivo: el saldo insoluto P inmediatamente después del k-ésimo pago es igual al valor acumulado de la deuda menos el valor acumulado de los k-ésimos pagos hechos hasta la fecha.

$$P = A(1+i)^k - R\left[\frac{(1+i)^{-k}-1}{i}\right] \quad 6.5$$

$$\begin{matrix} Valor\ de\ la \\ operación \end{matrix} = \begin{matrix} derechos\ del \\ deudo\ r \end{matrix} + \begin{matrix} derechos\ del \\ acreedor \end{matrix}$$

6.6

Método de línea recta

Depreciación para cada año

$$\text{Depreciación por año} = \frac{(\text{Costo original})-(\text{Valor de desecho})}{\text{Vida útil en años}}$$

$$D = \frac{C-S}{n} = \frac{B}{n} \quad 6.7$$

Base de depreciación

$$B = C - S \quad 6.8$$

Valor de reemplazo

$$V_R = (\text{depreciación acumulada}) + (\text{valor de desecho})$$

$$V_R = D_A + S \quad 6.9$$

Depreciación

$$D = \frac{\text{Base de depreciación del activo fijo}}{\text{Vida útil (en un año)}}$$

$$D = \frac{B}{n} \quad 6.10$$

Depreciación acumulada

$$D_A = (\text{Depreciación})(\text{vida útil en años})$$

$$D_A = (D)(n) \quad 6.11$$

Valor de reposición

$$V_{re} = C(1+j)^n \quad 6.12$$

Valor de desecho o salvamento

$$S = C(1+j)^n - D\left[\frac{(1+j)^n-1}{j}\right] \quad 6.13$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Método del porcentaje fijo

Valor en libros

$$V_k = C\,(1-d)^k \qquad 6.14$$

Valor en libros al final de la vida útil del activo fijo

$$V_n = C\,(1-d)^n \qquad 6.15$$

Tasa de depreciación anual

$$d = 1 - \left(\frac{V_n}{C}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad 6.16$$

Depreciación en el primer año

$$D_1 = Cd \qquad 6.17$$

Valor en libros

$$V_1 = C - D_1 \qquad 6.18$$

Depreciación e inflación

$$d' = j - d \qquad 6.19$$

Precio original C

$$C = \frac{S}{(1-d')^{-n}} \qquad 6.20$$

Método de la suma de dígitos o enteros

Depreciación del activo

$$B = C - S \qquad 6.21$$

$$s = k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + n \qquad n = 1, 2, 3...$$

6.22

$$s = \frac{n(n+1)}{2} \qquad 6.23$$

Base de depreciación para obtener el cargo anual

$$s = \frac{n(n+1)}{2} \qquad 6.23$$

$$D_k = \left[\frac{n-k+1}{s}\right](C-S) \qquad 6.24$$

Método de unidades de producción o servicio

La base de depreciación

$$D_k = \frac{B}{T} \qquad 6.25$$

Método del fondo de amortización

El cargo anual o aportación a realizar al fondo

$$D = \frac{Bi}{(1+i)^n - 1} \qquad 6.26$$

Terminología

C	Costo original del activo
S	Valor de desecho, rescate o salvamento
V_R	Valor de reemplazo
V_k	Valor en libros en el año k
V_n	Valor en libros al final de la vida útil
V_{RE}	Valor de reposición
B	Base de depreciación del activo
D	Depreciación anual
D_A	Depreciación acumulada
D_k	Depreciación por unidad de servicio (kilómetro, hora, etc.)
d	Tasa de depreciación anual
$d`$	Tasa de inflación anual equivalente
n	Vida útil en años
j	Tasa de inflación
s	Suma de dígitos de la vida útil del activo fijo
T	Total de kilómetros horas, etc.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

¿Qué sabes?

Aplica tus conocimientos y encuentra los resultados de cada problema.

6.1 ¿Cómo se llama al proceso financiero mediante el cual se cancela una deuda en pagos periódicos con interés compuesto?

6.2 Cuando un acreedor recibe pagos por un bien, ¿seguirá siendo dueño de todos los derechos del mismo? ¿Por qué?

6.3 ¿Para qué sirve un fondo de amortización?

6.4 ¿Qué significa la palabra depreciación?

6.5 ¿Qué es el activo fijo?

6.6 Menciona un método que conozcas de depreciación.

6.7 ¿El método de unidades de producción o servicio es un método reconocido por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público para ser utilizado en los libros contables?

cursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas a resolver

CD6.1
Sandra pide prestado la cantidad de $20 000, que se van a amortizar mediante 6 pagos mensuales vencidos. Si la tasa de interés es de 24% capitalizable mensualmente encontrar de cuánto es el abono mensual.

CD6.2.
El centro de lavado "Hernán" compró una compresora para agua, la cual tiene un precio de contado de $46 000. El administrador del negocio solo cuenta con
$18 000. Esta cantidad le sirve para dar el enganche del equipo y la diferencia pagarla a crédito. Acuerda con el vendedor realizar 5 pagos mensuales, con una tasa de interés de 24% anual capitalizable mensualmente.
a) Calcular el valor de la renta.
b) Construir una tabla de amortización.
c) ¿Cuánto pagó de intereses?

CD6.3.
La costurera Juana Morales solicita al Banco Invex un préstamo de $17 000, cantidad que va a pagar en 6 mensualidades vencidas. Si la tasa de interés es de 26% capitalizable mensualmente encontrar de cuánto es el abono mensual y construir una tabla de amortización.

CD6.4.
El señor Abelardo Uscanga pide un préstamo $20 000 al Banco Nacional. Acuerda realizar pagos trimestrales durante 2 años a una tasa de 29% capitalizable mensualmente. Elaborar un cuadro de amortización.

CD6.5.
El señor Ramón Valdez pidió prestado $18 000 al Banco Invex a pagar en abonos mensuales iguales durante 4 años a una tasa de 9% capitalizable mensualmente. Calcular el interés total a pagar por el señor Valdez.

CD6.6.
El dueño de una planchadora está pagando un préstamo de $8 000 por la compra de dos planchadoras de vapor. El préstamo se va a amortizar con pagos mensuales iguales durante 2 años a una tasa de interés de 25% capitalizable mensualmente. Calcular el saldo insoluto después de 5 meses.

CD6.7.
Mirtha Hernández compra una camioneta con un costo de $528 998.85. Ella acuerda realizar 6 pagos mensuales con una tasa de interés de 12% anual; el primero de los pagos se hace a fin de mes.
1. ¿Cuál es el valor de la renta?
2. Construir una tabla de amortización.
3. Indicar los derechos adquiridos por el deudor y el saldo a favor del acreedor.

CD6.8.
El dueño de una ferretería tiene una deuda de $95 000 por la compra de mercancía. La tasa de interés es de 20% convertible semestralmente y se acordó liquidar en 6 pagos semestrales al final de cada semestre.
1. Calcular el valor de la renta.
2. Construir una tabla de amortización.
3. Indicar los derechos adquiridos por el deudor y el saldo a favor del acreedor en el segundo mes.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.9.
El señor adquiere un departamento en condominio valuado en $1 600 000 por el cual paga un enganche de $400 000. El resto se financia con préstamo de Banco Ixe a 20 años, con tasa de interés de 8.75% convertible mensualmente. Calcular:

a) El valor de los pagos mensuales.
b) El saldo insoluto al final a los 8 años.

CD6.10.
La dueña de un restaurante compró mesas y sillas a crédito para su negocio. El valor del mobiliario de contado era de $89 500. Ella dio de enganche 15% del valor del mobiliario y acordó realizar 36 abonos al final de cada mes. La tasa de interés que cobra el Banco Invursa es de 24% capitalizable mensualmente. ¿Qué proporción del saldo habrá amortizado exactamente al realizar el decimoquinto abono mensual?

CD6.11.
El señor Aragón adquirió un condominio valuado en $1 600 000 el 1 de marzo de 2014, por el cual dio un enganche del 25%. El resto se financia con crédito hipotecario del Banco HBC a 20 años, con tasa de interés de 8.75% convertible mensualmente sobre el saldo, iniciando en el mes de abril del mismo año. El préstamo se amortizará con pagos al final de cada mes. Calcular:
a) El valor de los pagos mensuales.
b) ¿Cuánto de interés puede deducir al realizar su declaración anual de persona física del año 2102, si el tiempo límite que tiene para realizar su declaración es el día 30 de abril de 2013?

CD6.12.
Construir un cuadro de amortización que incluye el cálculo del IVA (16%) con un plan de financiamiento por dos años para la compra de un automóvil sedán que tiene un precio de $143 000.

CD6.13.
En el mes de julio una mueblería ofrece una promoción de compre ahora y realice su primer pago el último día de enero del año entrante y los siguientes 6 pagos en los meses subsecuentes con una tasa de interés de 24% capitalizable mensualmente. El señor Suárez compra una sala con valor de $16 000 el último día de septiembre. Encontrar el valor de cada uno de los pagos y construir un cuadro de amortización

CD6.14.
El doctor Gabriel Urquiza compró una casa hace dos años como regalo de bodas para cuando su única nieta decidiera casarse. El valor del inmueble era de $2 000 000 y $300 000 en gastos fijos (escrituración, avalúo, etc.). El doctor dio de enganche el 40% del valor de la casa y el 60% restante lo pagaría con un crédito hipotecario otorgado por Banco Invursa durante 5 años de plazo contados desde el día de la compra en abonos mensuales vencidos. El día de hoy su nieta le da la noticia que se va a casar. El doctor quiere saber en realidad cuánto le está dando de regalo en dinero a su nieta con la casa. La tasa de interés que le cobran es de 10.5% anual capitalizable mensualmente. El valor del inmueble aumentó 0.5% mensual con la inflación. Su nieta y su futuro esposo después de una larga plática acordaron seguir pagando la casa durante los próximos tres años hasta liquidar el préstamo.

CD6.15.
El arquitecto Zúñiga compró el 10 de enero de 2015 una computadora con un precio de $22 500. Él acuerda pagarla mediante 9 pagos mensuales; para los primeros 5 meses se aplica una tasa de interés de 18% y en los últimos 4 meses una tasa de 24%, ambas con capitalización mensual y si además debe amortizarse una novena parte de la deuda por pago. ¿Cómo serán sus pagos y la amortización de esta deuda?

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Construir un cuadro de amortización que muestre los cambios en las tasas de interés considerando una amortización constante.

CD6.16.
La señora Julia Jiménez compra un refrigerador $11 499.00 más IVA. Ella acuerda con el vendedor realizar 6 pagos mensuales en UDI con una tasa de interés de 21% anual capitalizable cada mes. El primero de los pagos se hace al final del mes, Si en el momento en que se celebra la operación el valor de las UDI es de $4.971272 y se estima una inflación mensual de 0.48%, calcule el pago mensual en pesos. ¿Cuál es el valor de la renta (el pago mensual)?

CD6.17.
La dueña de un molino de nixtamal obtiene un préstamo de $1 250 000, el cual debe liquidar en una sola exhibición dentro de 5 años. La dueña del molino decide realizar reservas anuales iguales con el objetivo de pagar la deuda a su vencimiento mediante un fondo de inversión bancario con 9% de interés anual.

CD6.18.
El psicólogo Diego Tovar debe pagar dentro de 6 meses la cantidad de $980 500 por la compra de un local comercial. Para tener el dinero en la fecha de liquidación decide realizar depósitos mensuales en una cuenta de inversión que paga 12% anual capitalizable mensualmente.
¿De cuánto deben ser los depósitos en su cuenta de inversión?
Construir un cuadro que muestre la forma en la que se acumula el fondo.

CD6.19.
¿Cuántos depósitos debe realizar la doctora Valeria Escalona si desea comprar de contado una cama de exploración de $13 800 para su consultorio? Para lograr esta compra, la doctora Escalona deposita al principio de cada mes en la cuenta de inversión la cantidad de $665.74. Si el banco paga una tasa de interés de 9% convertible quincenalmente, ¿cuántos depósitos deberá hacer para poder realizar la compra de la cama?

CD6.20.
La fábrica Plásticos de México S. A. compra equipo con valor $150 000. El administrador espera que la vida útil del equipo sea de 12 años con un valor de desecho de $10 000.
a) Encontrar la base de depreciación.
b) Calcular la depreciación anual.
c) Determinar el valor de reemplazo.
d) Construir el cuadro de depreciación.
e) Hacer una gráfica de tiempo contra valor en libros.
f) Construir una gráfica de tiempo contra depreciación acumulada.

CD6.21.
La empresa Control de Plagas del Sur compró equipo de fumigación con valor de $95 000. Se estima que su vida útil sea de 6 años con un valor de salvamento de $1 500.
a) Elaborar el cuadro de depreciación con ayuda de Excel.
b) Encontrar el valor de reposición del equipo de fumigación si la inflación promedio esperada es de 5% anual.

CD6.22.
Encontrar el valor de salvamento de un horno para panadería que costó $155 900 con una vida útil de 10 años. Este equipo se deprecia $12 884.60 cada año. Debido a la inflación su valor aumenta 4% en promedio anual.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.23.
La bodega de pisos y azulejos Estilo y Decoración compró un montacargas con valor de $345 680 y se espera que tenga una vida útil de 8 años. El departamento de contabilidad va a depreciarlo en $48 560 cada año. Debido a la inflación su valor aumenta en promedio anual 6%. Encontrar el valor de salvamento del montacargas.

CD6.24
El administrador de la mueblería Armarios Diko compra una camioneta para transportar muebles, libreros, cocinas y refrigeradores. El vehículo tiene un valor de $750 000 de contado. Él estima su vida útil en 5 años y al final un valor de salvamento de $40 000.
a) Encontrar la tasa de depreciación que debe aplicarse.
b) Elaborar el cuadro de depreciación correspondiente.

CD6.25.
Una compañía de venta de materiales de construcción compró un camión. El valor de contado es de $1 800 000. Se espera que tenga una vida útil de 6 años y valor de salvamento de $360 000. Elabore el cuadro de depreciación por el método de porcentaje fijo.

CD6.26.
Encontrar la depreciación anual de una trituradora industrial con valor de $50 000, si se estima un valor de desecho de $4 000 dentro de 5 años. Encontrar la depreciación hasta el tercer año.

Depreciación e inflación

CD6.27.
El ingeniero Andrés Martínez desea vender una góndola de carga después de 8 años de uso que le costó $2 600 000. La inflación promedio durante este tiempo ha sido de 0.8% mensual y el ingeniero considera una tasa de depreciación de porcentaje fijo de 10% anual. Elaborar el cuadro de depreciación por el método de porcentaje fijo.

CD6.28.
La distribuidora Vidrio Sacro desea vender mobiliario después de 5 años de uso que le costó $250 000. La inflación promedio durante este tiempo ha sido de 7% anual. El administrador considera una tasa de depreciación de porcentaje fijo de 13% anual. Elaborar el cuadro de depreciación por el método de porcentaje fijo.

CD6.29.
Encontrar el precio original de un comedor que la señora Gema compró hace 10 años. La hija de la señora Gema lo desea vender en $3 500. Ella considera una tasa de depreciación de 6% anual y una tasa de inflación de 1.1 por bimestre.

Método de la suma de dígitos o enteros

CD6.30.
La empresa de fertilizantes compra equipo de cómputo con valor de $190 000. La empresa estima la vida útil de este activo en 5 años y un valor de desecho de $15 000. Elabora un cuadro de depreciación por el método de suma de dígitos.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.31.
El dueño de un balneario, en el estado de Morelos compra una caldera para calentar el agua de las albercas que tiene un costo de $3 700 000. Estima una vida útil de 6 años y un valor de salvamento de $750 000. Elaborar el cuadro de depreciación utilizando el método de la suma de dígitos.

Método de unidades de producción o servicio

CD6.32.
Una consultoría de contadores adquiere una camioneta de carga con un costo de $480 000 y espera que la vida útil del vehículo sea de 160 000 kilómetros con un valor de desecho de $122 000. El kilometraje recorrido por la unidad durante los tres primeros años es de:

Año	Kilómetros
1	50 000
2	58 000
3	52 000
Total	160000

a) Encontrar la base de depreciación por kilómetro recorrido.
b) Construir el cuadro de depreciación.

CD6.33.
La panificadora La Viga adquiere una batidora con un costo de $150 600 y espera que su vida útil sea de 30 000 horas y que tenga un valor de desecho de $42 000. El número de horas de servicio del aparato durante los 4 primeros años es de:

Año	Horas de servicio
1	2 000
2	1 900
3	1 800
4	1 700
Total	7 400

a) Encontrar la base de depreciación por hora de servicio.
b) Construir la tabla de depreciación.

Método del fondo de amortización

CD6.34.
La Universidad Autónoma de Tonalá compró para sus oficinas un equipo de aire acondicionado con valor de $798 400. Estiman que el equipo tiene un tiempo de vida útil de 5 años, al cabo de los cuales el valor de desecho será de $180 000. Los cargos por depreciación anual se invierten en un fondo de reserva de depreciación que paga un interés de 8% anual. Calcular:
a) La base de depreciación.
b) El cargo anual por depreciación.
c) Elaborar una tabla de depreciación.

CD6.35.
Un gimnasio compró 30 colchones, para sus salas de gimnasia con valor de $680 000. Con la experiencia que tiene el área de mantenimiento el administrador estima que tiene una vida útil en promedio de 8 años y ningún valor de desecho (cero pesos). Se sabe que la tasa promedio de interés es de 10% anual. Construya un cuadro de depreciación utilizando el método de fondo de amortización.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.36.
La fábrica de ropa *Keep Calm* compró maquinas de coser con valor de $3 769 432 para sus talleres y estima una vida útil para este equipo de 10 años. Al cumplir estos años se espera venderlo en $90 000. Considerando una tasa para depreciación de 18% anual, determinar:
a) La base de depreciación.
b) El cargo anual por depreciación.
c) La depreciación acumulada.
d) El valor en libros después de 6 años de uso.

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

RESPUESTAS

¿Qué sabes?

6.1
¿Cómo se llama al proceso financiero mediante el cual se cancela una deuda en pagos periódicos con interés compuesto?
La palabra amortización proviene del latín y significa dar muerte.

6.2
Cuando un acreedor recibe pagos por un bien, ¿seguirá siendo dueño de todos los derechos del mismo? ¿Por qué?
No, porque el deudor al realizar algunos pagos adquiere parcialmente el bien, mientras que el acreedor al recibir pagos ya no es propietario de todos los derechos.

6.3
¿Para qué sirve un fondo de amortización?
Para pagar obligaciones a futuro.

6.4
¿Qué significa la palabra depreciación?
La palabra depreciación viene del latín y significa rebajar el precio o valor de una cosa.

6.5
¿Qué es el activo fijo?
Son los bienes sujetos al desgaste, descomposturas y a los cambios tecnológicos.

6.6
Menciona un método que conozcas de depreciación.
Método de línea recta, método del porcentaje fijo, método de suma de dígitos, método de unidades de producción o servicio y método de fondo de amortización.

6.7
¿El método de unidades de producción o servicio es un método reconocido por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público para ser utilizado en los libros contables?
No es reconocido.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas a resolver

CD6.1

Sandra pide prestado la cantidad de $20 000, que se van a amortizar mediante 6 pagos mensuales vencidos. Si la tasa de interés es de 24% capitalizable mensualmente encontrar de cuánto es el abono mensual.

Datos:
A = $20 000
i = 0.24/12 = 0.02 mensual
n = 6 meses
Incógnita: R

El abono mensual se obtiene con la siguiente ecuación:

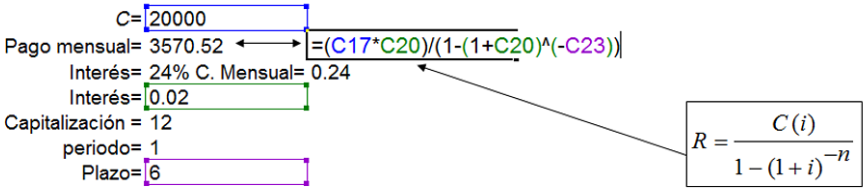
$$C = R\left[\frac{1-(1+ip)^{-np}}{i/p}\right]$$

Despejando R se tiene:

$$R = \frac{C(i)}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$R = \frac{20\,000(0.02)}{1-(1.02)^{-6}} = \frac{400}{1-0.88797} = \frac{400}{0.112028} = \$3570.52$$

Fecha	Amortización $A = R - I$	Intereses sobre saldo $I = Cni$	Pago mensual R	Saldo insoluto A - Saldo
Al momento de la operación				20000.00
Fin del primer mes	3170.52	400.00	3570.52	16829.48
Fin del segundo mes	3233.93	336.59	3570.52	13595.56
Fin del tercer mes	3298.61	271.91	3570.52	10296.95
Fin del cuarto mes	3364.58	205.94	3570.52	6932.37
Fin del quinto mes	3431.87	138.65	3570.52	3500.51
Fin del sexto mes	3500.51	70.01	3570.52	0.00
Totales	20000.00	1423.10	21423.10	



Cuadro 1. Cálculo en Excel sobre la amortización con renta fija y tasa de interés constante.

Se realizaran 6 pagos mensuales vencidos de $3 570.53 que amortizan una deuda con valor de $20 000 con interés de 24% anual capitalizable mensualmente.

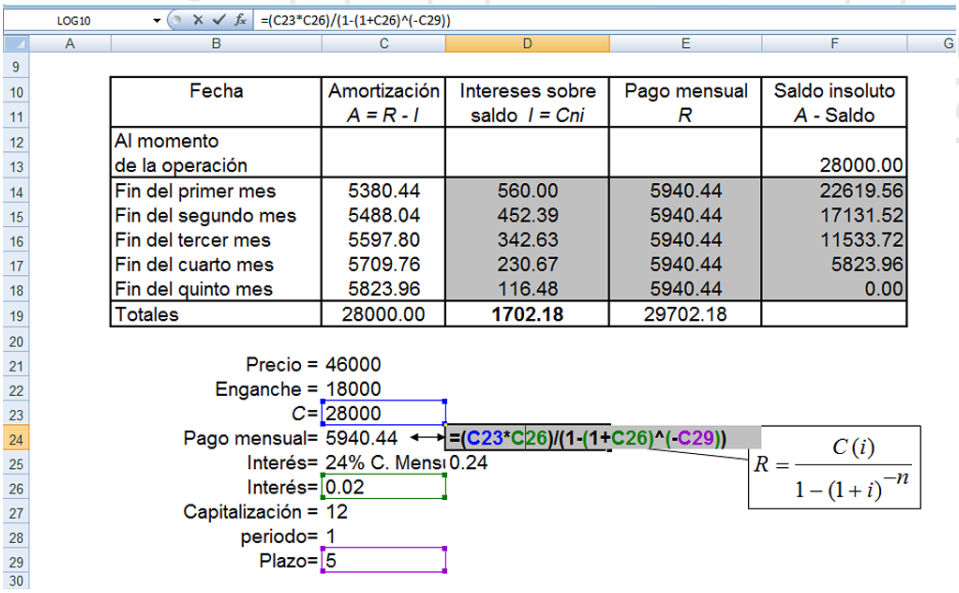
D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.2.
El centro de lavado "Hernán" compró una compresora para agua, la cual tiene un precio de contado de $46 000. El administrador del negocio solo cuenta con
$18 000. Esta cantidad le sirve para dar el enganche del equipo y la diferencia pagarla a crédito. Acuerda con el vendedor realizar 5 pagos mensuales, con una tasa de interés de 24% anual capitalizable mensualmente.
a) Calcular el valor de la renta.
b) Construir una tabla de amortización.
c) ¿Cuánto pagó de intereses?

Datos
Precio de contado = $46 000
Enganche = $18 000
C = $28 000
i = 0.24/12 = 0.02 mensual
n = 5 meses
Incógnita: R

El abono mensual:

$$R = \frac{C(i)}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{28\,000(0.02)}{1-(1.02)^{-5}} = \frac{560}{1-0.905730809} = \frac{560}{0.09426919} = \$5\,940.43$$



Fecha	Amortización $A = R - I$	Intereses sobre saldo $I = Cni$	Pago mensual R	Saldo insoluto A - Saldo
Al momento de la operación				28000.00
Fin del primer mes	5380.44	560.00	5940.44	22619.56
Fin del segundo mes	5488.04	452.39	5940.44	17131.52
Fin del tercer mes	5597.80	342.63	5940.44	11533.72
Fin del cuarto mes	5709.76	230.67	5940.44	5823.96
Fin del quinto mes	5823.96	116.48	5940.44	0.00
Totales	28000.00	**1702.18**	29702.18	

Cuadro 2. Cálculo en Excel sobre la amortización con renta fija y tasa de interés constante

El interés total pagado es de $1 702.18.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.3.
La costurera Juana Morales solicita al Banco Invex un préstamo de $17 000, cantidad que va a pagar en 6 mensualidades vencidas. Si la tasa de interés es de 26% capitalizable mensualmente encontrar de cuánto es el abono mensual y construir una tabla de amortización.

Datos
C = $17 000
i = 0.26/12 = 0.021666 mensual
n = 6 meses
Incógnita: R

El abono mensual:

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{17000(0.021666)}{1-(1.021666)^{-6}} = \frac{368.322}{1-0.879318793} = \frac{368.322}{0.120681206} = \$3052.02$$

LOG10 =PAGO(C11,C12,-C10)

Solución:

Datos	
C =	$17,000
i =	2.2%
n =	6
=PAGO(C11,C12,-C10)	
R =	$3,052.03

Fecha	Pago mensual R	Interés sobre saldo $I = Cni$	Amortización $A = R - I$	Saldo A - Saldo
Al momento de la operación				$17,000
Fin del primer mes	3,052.03	368.33	2683.70	14316.30
Fin del segundo mes	3,052.03	310.19	2741.84	11574.46
Fin del tercer mes	3,052.03	250.78	2801.25	8773.21
Fin del cuarto mes	3,052.03	190.09	2861.95	5911.26
Fin del quinto mes	3,052.03	128.08	2923.95	2987.31
Fin del sexto mes	3,052.03	64.72	2987.31	0.00
Totales		$1,312.19	$17,000.00	

Cuadro 3. Cálculo en Excel sobre la amortización con renta fija y tasa de interés constante

Se realizarán 6 pagos mensuales vencidos de $3 052.03 que amortizan una deuda con valor de $17 000 con interés de 26% anual capitalizable mensualmente.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.4.
El señor Abelardo Uscanga pide un préstamo $20 000 al Banco Nacional. Acuerda realizar pagos trimestrales durante 2 años a una tasa de 29% capitalizable mensualmente. Elaborar un cuadro de amortización.

Datos
A = $20 000
i = 0.29/12 = 0.0241666 mensual
n = 2 años = 8 trimestres
Incógnita: R

Se calcula la tasa i' trimestral equivalente a 24% capitalizable mensual:

$$(1+i')^4 = (1.0241666)^{12}$$

$$i' = (1.0241666)^3 - 1$$

$$i' = 0.07426599 \text{ trimestral}$$

$$i' = 7.43\% \text{ trimestral}$$

El pago trimestral es:

$$R = \frac{C(i)}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{20000(0.07426599)}{1-(1.07426599)^{-8}} = \frac{1485.31975}{1-0.563774445} = \frac{1485.31975}{0.436225554} = \$3404.94$$

Elaborar el programa completo de amortización (cuadro de amortización).

Fecha	Amortización $A = R - I$	Intereses sobre saldo $I = Cni$	Pago mensual R	Saldo insoluto A - Saldo
Al momento de la operación				20000.00
Fin del primer trimestre	1919.61	1485.32	3404.94	18080.39
Fin del segundo trimestre	2062.18	1342.76	3404.94	16018.21
Fin del tercer trimestre	2215.33	1189.61	3404.94	13802.88
Fin del cuarto trimestre	2379.85	1025.09	3404.94	11423.03
Fin del quinto trimestre	2556.59	848.35	3404.94	8866.44
Fin del sexto trimestre	2746.46	658.48	3404.94	6119.98
Fin del septimo trimestre	2950.43	454.51	3404.94	3169.55
Fin del octavo trimestre	3169.55	235.39	3404.94	0.00
Totales	20000.00	7239.50	27239.50	

A= 20000
Pago mensual= **3404.94** ↔ **3404.94**
Interés= 29% C. Mens 0.29
Interés= 0.02416667
Capitalización mensual = 12
Capitalización trimestral = 4
Periodo= 1
Tasa equivalente trimestral= 0.0742662
n/m= 3
Plazo= 8

$$R = \frac{C(i)}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$i' = (1+i)^{n/m} - 1 \quad efectiva$$

Cuadro 4. Cálculo en Excel sobre la amortización con renta fija y tasa de interés constante

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.5.
El señor Ramón Valdez pidió prestado $18 000 al Banco Invex a pagar en abonos mensuales iguales durante 4 años a una tasa de 9% capitalizable mensualmente. Calcular el interés total a pagar por el señor Valdez.

Datos:
$A = \$18\,000$
$T = 9\%$ ACM
$i = 0.09/12 = 0.0075$ mensual
$n = 4$ años $= 48$ meses
Incógnita: I_T

El abono mensual:

$$R = \frac{C(i)}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{18000(0.0075)}{1-(1.0075)^{-48}} = \frac{135}{1-0.698614135} = \frac{135}{0.301385864} = \$447.93$$

$$\text{Valor total de los pagos} = 48(447.93) = \$21500.677$$

$$\text{Interés total a pagar} = 21500.677 - 18000 = \$3500.68$$

CD6.6.
El dueño de una planchadora está pagando un préstamo de $8 000 por la compra de dos planchadoras de vapor. El préstamo se va a amortizar con pagos mensuales iguales durante 2 años a una tasa de interés de 25% capitalizable mensualmente. Calcular el saldo insoluto después de 5 meses.

Datos
$C = \$8\,000$
$i = 0.25/12 = 0.0208333$ mensual
$n = 24$ meses
$k = 5$
Incógnitas: R, P_5, I_6 y A_6

Cálculo del abono mensual:

$$R = \frac{C(i)}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{8000(0.0208333)}{1-(1.0208333)^{-24}} = \frac{166.6664}{1-0.609654967} = \frac{166.6664}{0.390345032} = \$426.972$$

El saldo insoluto P, después de 6 pagos:

$$P = 8000(1.0208333)^5 - 426.972\left[\frac{(1.0208333)^5 - 1}{0.0208333}\right]$$

$$P = 8000(1.108598132) - 426.972\left[\frac{1.108598132 - 1}{0.0208333}\right]$$

$$P = 8868.785 - 426.972\left[\frac{0.108598132}{0.0208333}\right]$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$P = 8868.785 - 426.972(5.212718676)$$
$$P = 8868.785 - 2225.685$$
$$P = \$6643.20$$

La parte del interés en el séptimo pago:
$$I = (6643.20)(0.0208333) = 138.3957023 \cong \$138.40$$

Amortización "A" (o valor del principal):
$$A = R - I = 426.9972 - 138.40 = \$288.57$$

Los resultados anteriores se pueden comprobar en el cuadro 5.

	Amortización $A = R - I$	Intereses sobre saldo $I = Cni$	Pago mensual R	Saldo insoluto A - Saldo
Al momento de la operación				8000.00
Fin del mes 1	260.31	166.67	426.97	7739.69
Fin del mes 2	265.73	161.24	426.97	7473.97
Fin del mes 3	271.26	155.71	426.97	7202.70
Fin del mes 4	276.92	150.06	426.97	6925.79
Fin del mes 5	282.68	144.29	426.97	**6643.10**
Fin del mes 6	**288.57**	**138.40**	426.97	6354.53
Fin del mes 7	294.59	132.39	426.97	6059.94
Fin del mes 8	300.72	126.25	426.97	5759.22
Fin del mes 9	306.99	119.98	426.97	5452.23
Fin del mes 10	313.38	113.59	426.97	5138.84
Fin del mes 24	418.26	8.71	426.97	0.00
Totales	2861.16	1408.57	4269.72	

$P = 8\,000\,(1.0208333)^{5} - 426.972\left[\frac{(1.0208333)^{5}-1}{0.0208333}\right]$

$P = \$6\,643.10$

$I = (6\,643.10)\,(0.020833) = 138.3976964 \cong \$138.40$

$A = R - I = 426.972 - 138.40 = \$288.57$

$R = \dfrac{C(i)}{1-(1+i)^{-n}}$

A= 8000
Pago mensual= **426.97** ⟷ **426.97**
Interés= 25% C. Mensual= 0.25
Interés= 0.020833333 Capitalización = 12 Periodo= 1 Plazo= 24

Cuadro 5. Cálculo en Excel sobre la amortización con renta fija y tasa de interés constante

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.7.
Mirtha Hernández compra una camioneta con un costo de $528 998.85. Ella acuerda realizar 6 pagos mensuales con una tasa de interés de 12% anual; el primero de los pagos se hace a fin de mes.
1. ¿Cuál es el valor de la renta?
2. Construir una tabla de amortización.
3. Indicar los derechos adquiridos por el deudor y el saldo a favor del acreedor.

Datos:
C = $528 998.85
i = 0.12/12 = 0.01 semestral
n = 6 meses
Incógnita: R

a) Los pagos constituyen una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata con valor actual de $528 998.85.

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{528\,998.85(0.01)}{1-(1.01)^{-6}} = \frac{528\,998.85(0.01)}{1-0.942} = \frac{5\,289.98}{0.057955}$$

$$R = \$91\,277.89$$

b) Se realizaran 6 pagos mensuales vencidos de R = $91 277.89 que amortizan una deuda con valor de $528 998.85, con interés de 12% anual convertible mensualmente.

Tabla de Amortización

Fecha	Amortización $A = R - I$	Intereses sobre saldo $I = Cni$	Pago mensual R	Saldo insoluto A - Saldo
Al momento de la operación				528998.85
Fin del primer mes	85987.90	5289.99	91277.89	443010.95
Fin del segundo mes	86847.78	4430.11	91277.89	356163.17
Fin del tercer mes	87716.26	3561.63	91277.89	268446.92
Fin del cuarto mes	88593.42	2684.47	91277.89	179853.50
Fin del quinto mes	89479.35	1798.53	91277.89	90374.15
Fin del sexto mes	90374.15	903.74	91277.89	0.00
Totales	528998.85	18668.48	547667.33	

Precio de lista = 459999
IVA = 68999.85
C= 528998.85
Pago mensual= 91277.89 ↔ 91277.89
Interés= 12% C. Mensual= 0.12
Interés= 0.01
Capitalización = 12
periodo= 1
Plazo= 6

$$R = \frac{C(i)}{1-(1+i)^{-n}}$$

Cuadro 6. Amortización con renta fija y tasa de interés constante

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

c) Valor de la operación = Derechos del deudor + derechos del acreedor

Los derechos del acreedor (saldo) al primer mes:
Valor de la operación = Derechos del deudor + derechos del acreedor

$$\text{Valor del acreedor} = \$528\,998.85(1.01) - \$91\,277.89\left[\frac{(1.01)-1}{0.01}\right]$$

$$\text{Valor del acreedor} = 534\,288.84 - 91\,277.89$$

$$\text{Valor del acreedor} = \$443\,010.95$$

La cantidad de $534 288.84 es el valor de la deuda al final de un mes.
Los $91 277.89 representan el valor del primer pago realizado al final de mes.

Los derechos del deudor son:
Valor de la operación = Derechos del deudor + derechos del acreedor

Derechos del deudor = Valor de la operación – Derechos del acreedor

$$\text{Valor del deudor} = 91\,277.89\frac{(1.01)-1}{0.01} - \left[(528\,998.85)(1.01) - 528\,998.85\right]$$

$$\text{Valor del deudor} = 91\,277.89 - (534\,288.84 - 528\,998.85)$$

$$\text{Valor del deudor} = 91\,277.89 - 5\,289.99$$

$$\text{Valor del deudor} = \$85\,987.90$$

La cantidad de $91 277.89 es el valor del pago realizado al final del primer mes.
Los $5 289.99 son los intereses ocasionados por el uso de los $528 998.85

Los derechos del acreedor (saldo) al segundo mes son:
Derechos del acreedor = Valor de la operación – derechos del deudor

$$\text{Derechos del acreedor} = 528\,998.85(1.01)^2 - 91\,277.89\left[\frac{(1.01)^2-1}{0.01}\right]$$

$$\text{Derechos del acreedor} = 539\,631.73 - 183\,468.56$$

$$\text{Derechos del acreedor} = \$356\,162.30$$

La cantidad de $539 630.85 es el valor de la deuda al final de dos meses.
Los $183 468.56 representan el valor del segundo pago realizado al final del segundo mes.

Los derechos del deudor son:

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Derechos del deudor = Valor de la operación – derechos del acreedor

$$\text{Derechos del deudor} = 91\,277.89\left[\frac{(1.01)^2-1}{0.01}\right]-\left[(528\,998.85)(1.01)^2-528\,998.85\right]$$

$$\text{Derechos del deudor} = 183\,468.56-(539\,631.72-528\,998.85)$$

$$\text{Derechos del deudor} = 183\,468.56-10\,632.87$$

$$\text{Derechos del deudor} = \$172\,835.69$$

La cantidad de $172 835.69 representa el valor del pago realizado al final del segundo mes.
Los $10 632.87 son los intereses ocasionados por el uso de los $528 998.85

Los derechos del acreedor (saldo) al tercer mes:
Derechos del acreedor = Valor de la operación – derechos del deudor

$$\text{Derechos del acreedor} = 528\,998.85(1.01)^3-91\,277.89\left[\frac{(1.01)^3-1}{0.01}\right]$$

$$\text{Derechos del acreedor} = 545\,028.04-276\,581.13$$

$$\text{Derechos del acreedor} = \$268\,446.90$$

La cantidad de $545 028.04 es el valor de la deuda al final de tres meses.
Los $276 581.13 representan el valor del tercer pago realizado al final del tercer mes.

Los derechos del deudor son:
Derechos del deudor = Valor de la operación – derechos del acreedor

$$\text{Derechos del deudor} = 91\,277.89\left[\frac{(1.01)^3-1}{0.01}\right]-\left[(528\,998.85)(1.01)^3-528\,998.85\right]$$

$$\text{Derechos del deudor} = 276\,581.13-(545\,028.04-528\,998.85)$$

$$\text{Derechos del deudor} = 276\,581.13-16\,029.19$$

$$\text{Derechos del deudor} = \$260\,551.94$$

Los $260 551.94 representan el valor del pago realizado al final del tercer mes.
Los $16 029.19 son los intereses ocasionados por el uso de los $528 998.85

Derechos del acreedor (saldo) al cuarto mes:
Derechos del acreedor = Valor de la operación – derechos del deudor

$$\text{Derechos del acreedor} = 528\,998.85(1.01)^4-91\,277.89\left[\frac{(1.01)^4-1}{0.01}\right]$$

$$\text{Derechos del acreedor} = 550\,478.32-370\,624.84$$

$$\text{Derechos del acreedor} = \$179\,853.48$$

La cantidad de $550 478.32 representa el valor de la deuda al final del cuarto mes.
Los $179 853.48 representan el valor del cuarto pago realizado al final del cuarto mes.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Los derechos del deudor son:

Derechos del deudor = Valor de la operación – derechos del acreedor

$$\text{Derechos del deudor} = 91\,277.89\left[\frac{(1.01)^4-1}{0.01}\right]-\left[(528\,998.85)(1.01)^4-528\,998.85\right]$$

$$\text{Derechos del deudor} = 370\,624.84-(550\,478.32-528\,998.85)$$

$$\text{Derechos del deudor} = 370\,624.84-21\,479.47$$

$$\text{Derechos del deudor} = \$\,349\,145.36$$

La cantidad de $370 624.84 es el valor del pago realizado al final del cuarto mes.
Los $21 479.47 son los intereses ocasionados por el uso de los $528 998.85

Derechos del acreedor (saldo) al quinto mes.

Derechos del acreedor = Valor de la operación – derechos del deudor

$$\text{Derechos del acreedor} = 528\,998.85(1.01)^5-91\,277.89\left[\frac{(1.01)^5-1}{0.01}\right]$$

$$\text{Derechos del acreedor} = 555\,983.11-465\,608.97$$

$$\text{Derechos del acreedor} = \$90\,374.13$$

La cantidad de $555 983.11 es el valor de la deuda al final del quinto mes.
Los $90 374.13 representan el valor del quinto pago realizado al final del quinto mes.

Los derechos del deudor son:

Derechos del deudor = Valor de la operación – Derechos del acreedor

$$\text{Derechos del deudor} = \$\,91\,277.89\left[\frac{(1.01)^5-1}{0.01}\right]-\left[(528\,998.85)(1.01)^5-528\,998.85\right]$$

$$\text{Derechos del deudor} = 465\,608.97-(555\,983.11-528\,998.85)$$

$$\text{Derechos del deudor} = 465\,608.97-26\,984.26$$

$$\text{Derechos del deudor} = \$\,438\,624.71$$

La cantidad de $438 624.71 es el valor del pago realizado al final del quinto mes.
Los $26 984.26 son los intereses ocasionados por el uso de los $528 998.85

Derechos del acreedor (saldo) al sexto mes:

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Derechos del acreedor = Valor de la operación – derechos del deudor

$$\text{Derechos del acreedor} = 528\,998.85(1.01)^6 - 91\,277.89\left[\frac{(1.01)^6-1}{0.01}\right]$$

$$\text{Derechos del acreedor} = 561\,542.94 - 561\,542.95$$

$$\text{Derechos del acreedor} = \$0.0139$$

La cantidad de $561 542.94 es el valor de la deuda al final del sexto mes.
Los $561 524.95 representan el valor del sexto pago realizado al final del sexto mes, es decir, ya no se debe nada.

Los derechos del deudor son:
Derechos del deudor = Valor de la operación – derechos del acreedor

$$\text{Derechos del deudor} = 91\,277.89\left[\frac{(1.01)^6-1}{0.01}\right] - \left[(528\,998.85)(1.01)^6 - 528\,998.85\right]$$

$$\text{Derechos del deudor} = 561\,542.95 - (561\,542.94 - 528\,998.85)$$

$$\text{Derechos del deudor} = 561\,542.95 - 32\,544.09$$

$$\text{Derechos del deudor} = \$528\,998.86$$

La cantidad de $528 998.86 es el valor del pago realizado al final del sexto mes.
Los $32 544.09 son los intereses ocasionados por el uso de los $528 998.85

CD6.8.
El dueño de una ferretería tiene una deuda de $95 000 por la compra de mercancía. La tasa de interés es de 20% convertible semestralmente y se acordó liquidar en 6 pagos semestrales al final de cada semestre.
1. Calcular el valor de la renta.
2. Construir una tabla de amortización.
3. Indicar los derechos adquiridos por el deudor y el saldo a favor del acreedor en el segundo mes.

Datos:
$C = \$95\,000$
$i = 0.20/2 = 0.10$ semestral
$n = 6$ meses
Incógnita: R

a) Los pagos constituyen una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata con valor actual de $95 000.

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{95000(0.10)}{1-(1.1)^{-6}} = \frac{9\,500}{1-0.56447393} = \frac{9\,500}{0.435526069}$$

$$R = \$21812.70$$

b) Se realizarán 6 pagos mensuales vencidos de $21 812.70 que amortizan una deuda con valor de $95 000 con interés de 20% anual convertible semestralmente.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Fecha	Amortización $A = R - I$	Intereses sobre saldo $I = Cni$	Pago mensual R	Saldo insoluto A - Saldo
Al momento de la operación				95000.00
Fin del primer semestre	**12312.70**	9500.00	21812.70	82687.30
Fin del segundo semestre	13543.97	8268.73	21812.70	69143.33
Fin del tercer semestre	14898.37	6914.33	21812.70	54244.96
Fin del cuarto semestre	16388.21	5424.50	21812.70	37856.75
Fin del quinto semestre	18027.03	3785.68	21812.70	19829.73
Fin del sexto semestre	19829.73	1982.97	21812.70	0.00
Totales	95000.00	35876.21	130876.21	

A= 95000
Pago mensual= **21812.70** ↔ 21812.70 ← $R = \dfrac{C(i)}{1-(1+i)^{-n}}$
Interés= 20% C. Semestral= 0.2
Interés= 0.1
Capitalización = 2
periodo= 1 Plazo= 6

Cuadro 7. Amortización con renta fija y tasa de interés constante

c) Cuando el deudor realiza algunos pagos adquiere parcialmente el bien, mientras que el acreedor, al recibir pagos ya no es propietario de todos los derechos sobre el bien sino sólo de una parte (saldo a favor).

Valor de la operación = derechos del deudor + derechos del acreedor

Para calcular los derechos del acreedor (saldo al final del primer semestre) se despeja de la ecuación 6.6:

Derechos del acreedor = Valor de la operación -derechos del deudor

$$\text{Derechos del acreedor} = 95\,000\,(1.1) - 21812.70\left[\frac{(1.1)-1}{0.1}\right]$$

$$\text{Derechos del acreedor} = 104\,500 - 21812.70$$

$$\text{Derechos del acreedor} = \$82\ 687.30 \quad (\text{ubicación en el cuadro: F13})$$

Los $104 500 son el valor de la deuda al cabo del primer semestre.
Los $21 812.70 representan el valor del primer pago realizado al final del semestre.

Para calcular los derechos del deudor se despeja de la ecuación 6.8:

Derechos del deudor = Valor de la operación – Derechos del acreedor

$$\text{Derechos del deudor} = 21812.70\left[\frac{(1.1)-1}{0.1}\right] - [95\,000\,(1.1) - 95\,000]$$

$$\text{Derechos del deudor} = 21812.70 - (104\,500 - 95\,000)$$

$$\text{Derechos del deudor} = 21812.70 - 9\,500$$

$$\text{Derechos del deudor} = \$12\ 312.70 \quad (\text{ubicación en el cuadro: } C13)$$

La cantidad de $21 812.70 es el valor del primer pago realizado al final del semestre.
Los $9 500 son los intereses producidos por el uso de los $95 000.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Derechos del acreedor (saldo) al segundo mes:

Derechos del acreedor = Valor de la operación – derechos del deudor

$$\text{Derechos del acreedor} = 95\,000\,(1.1)^2 - 21\,812.70\left[\frac{(1.1)^2-1}{0.1}\right]$$

$$\text{Derechos del acreedor} = 114\,950 - 45\ 806.67$$

$$\text{Derechos del acreedor} = \$69\,143.33 \quad (\text{ubicación en el cuadro: F14})$$

Los cantidad de $114 950 es el valor de la deuda al final de dos semestres.
Los $45 806.67 es el valor de los dos pagos realizados al final del segundo semestre.

Los derechos del deudor son:

Derechos del deudor = Valor de la operación – derechos del acreedor

$$\text{Derechos del deudor} = 21\,812.70\left[\frac{(1.1)^2-1}{0.1}\right] - \left[(95\,000)(1.1)^2 - 95\,000\right]$$

$$\text{Derechos del deudor} = 45\,806.67 - (114\,950 - 95\,000)$$

$$\text{Derechos del deudor} = 45\,806.67 - 19\,950$$

$$\text{Derechos del deudor} = \$25\,856.67$$

La cantidad de $45 806.67 representa el valor del pago realizado al final del segundo mes.
Los $19 950 son los intereses generados por el uso de los $95 000.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.9.
El señor adquiere un departamento en condominio valuado en $1 600 000 por el cual paga un enganche de $400 000. El resto se financia con préstamo de Banco Ixe a 20 años, con tasa de interés de 8.75% convertible mensualmente. Calcular:

a) El valor de los pagos mensuales.
b) El saldo insoluto al final a los 8 años.

Datos:
Precio de contado: $1 600 000
Enganche: $400 000
Cantidad a financiar: $1 200 000
$T = 8.75\%$ ACM
$i = 0.00729167$ mensual
$n = 20$ años $= 240$ meses
$n_8 = 96$ meses
Incógnitas: R y P_{96}

a) Cálculo de la renta:

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{1200\,000(0.00729167)}{1-(1.00729167)^{-240}} = \frac{8\,750}{1-0.174880668} = \frac{8\,750}{0.8258119331}$$

$$R = \$10\ 604.53$$

b) Saldo insoluto al final de los 8 años.

$$P = 1200\,000(1.00729167)^{96} - 10\ 604.53\left[\frac{(1.00729167)^{96}-1}{0.00729167}\right]$$

$$P = 1200\,000(2.008645417) - 10\ 604.53\left[\frac{2.008645417-1}{0.00729167}\right]$$

$$P = 1200\,000(2.008645417) - 10\ 604.53\left[\frac{1.008645417}{0.00729167}\right]$$

$$P = 1200\,000(2.008645417) - 10\ 604.53(138.3284511)$$

$$P = 2\ 410\,374.50 - 1466\,908.21$$

$$P = \$943\,466.29$$

En 8 años habrá liquidado menos de $943 466.29 del préstamo original.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.10.
La dueña de un restaurante compró mesas y sillas a crédito para su negocio. El valor del mobiliario de contado era de $89 500. Ella dio de enganche 15% del valor del mobiliario y acordó realizar 36 abonos al final de cada mes. La tasa de interés que cobra el Banco Invursa es de 24% capitalizable mensualmente. ¿Qué proporción del saldo habrá amortizado exactamente al realizar el decimoquinto abono mensual?

Datos:
$C = 89\,500 - 13425 = \$76\,075$
$i = 0.24/12 = 0.02$ mensual
$n = 36$ meses
$k = 15$
Incógnitas: R, M_{15} y % en k_{15}

a) Es necesario conocer el valor del abono mensual:

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{76\,075(0.02)}{1-(1.02)^{-36}} = \frac{1\,521.5}{1-0.49022315} = \frac{1\,521.5}{0.509776849}$$

$$R = \$2\,984.64$$

b) Calcular los derechos adquiridos por el deudor en el momento del décimo quinto abono:

$$M_{10} = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 2\,984.64\left[\frac{(1.02)^{15} - 1}{0.02}\right] = 2\,984.64\left[\frac{1.345868338 - 1}{0.02}\right]$$

$$M = 2\,984.64\left[\frac{0.345868338}{0.02}\right] = 2\,984.64(17.29341692) = \$51\,614.62$$

c) El valor de la deuda al décimo mes:

$$M = 51614.624\,(1.02)^{15} = 51614.624\,(1.345868338) = \$69\,466.488$$

d) Proporción pagada del saldo:

$$\frac{51\,614.624}{69\,466.488} = 0.743015 \cong 0.743 \cong 74\%$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.11.
El señor Aragón adquirió un condominio valuado en $1 600 000 el 1 de marzo de 2014, por el cual dio un enganche del 25%. El resto se financia con crédito hipotecario del Banco HBC a 20 años, con tasa de interés de 8.75% convertible mensualmente sobre el saldo, iniciando en el mes de abril del mismo año. El préstamo se amortizará con pagos al final de cada mes. Calcular:
a) El valor de los pagos mensuales.
b) ¿Cuánto de interés puede deducir al realizar su declaración anual de persona física del año 2102, si el tiempo límite que tiene para realizar su declaración es el día 30 de abril de 2013?

Datos:
Precio de contado $1 600 000
Enganche $400 000
Cantidad a financiar A = $1 200 000
T = 8.75% ACM
i = 0.007291667 mensual
n = 20 años = 240 meses
n_1 = 9 meses
Incógnitas: R y $I_{1\text{-}9}$

a) Calculo de la renta:

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{1\,200\,000(0.007291667)}{1-(1.007291667)^{-240}} = \frac{8\,750}{1-0.174880793} = \frac{8\,750}{0.825119206}$$

$$R = \$10\,604.53$$

b) Saldo insoluto al final de los 10 meses, en el primer año de la compra del departamento.

$$P_{1-9} = 1\,200\,000(1.007291667)^{9} - 10\,604.52\left[\frac{(1.007291667)^{9}-1}{0.007291667}\right]$$

$$P_{1-9} = 1\,200\,000(1.06757199) - 10\,604.52\left[\frac{1.06757199-1}{0.007291667}\right]$$

$$P_{1-9} = 1\,281086.38 - 10\,604.52\left[\frac{0.06757199}{0.007291667}\right]$$

$$P_{1-9} = 1\,281086.38 - 10\,604.52\,(9.267015364)$$

$$P_{1-9} = 1\,281086.38 - 98\,272.24977$$

$$P_{1-9} = \$1\,182\,814.14$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

c) La amortización el año pasado de marzo a diciembre fue:

$$A_{1-9} = 1\,200\,000 - 1\,182\,814.14 = \$17185.86$$

d) El total de intereses pagados el año pasado fueron:

$$I_{1-10} = 9(10\,604.52) - 17185.86 = 95440.68 - 17185.86 = \$78254.82$$

El señor Aragón puede declarar $78 254.82 en su declaración fiscal como deducción por el préstamo hipotecario (este documento lo extiende la institución financiera con la cual se tiene contratado el préstamo y es el documento oficial que reconoce el SAT).

CD6.12.
Construir un cuadro de amortización que incluye el cálculo del IVA (16%) con un plan de financiamiento por dos años para la compra de un automóvil sedán que tiene un precio de $143 000.

El precio de lista (incluye el IVA)	MX$ 143000.
La inversión inicial mínima (enganche) 35%	− MX$ 50050.0
Comisión por apertura de crédito, pago que debe efectuarse al contado (incluye el IVA)	+ MX$ 1,850.0
Seguro de cobertura amplia. Se debe pagar de contado por un año (incluye gastos de expedición e IVA) más un año gratis	+ MX$ 8,300.0
Tasa de interés fija de 12% anual	
Monto a financiar	MX$ 103,100
Otros gastos	
Tenencia por un año, 3% sobre el valor del automóvil (sin incluir el IVA)*	MX$ 4995.00
Placas**	MX$ 1,650.0
Gestoría	MX$ 850.00
Verificación (calcomanía doble cero) en el DF**	MX$ 385.00
* En cada estado de la república tiene un porcentaje diferente, en el DF y algunos de los estados no se cobra. ** En cada estado de la república tiene un costo distinto.	

Cuadro 8. Amortización con IVA de un plan de financiamiento por dos años para la compra de un auto

a) La tasa de interés está en forma anual, por lo que debe transformarse a una tasa de interés mensual.

$$i = \frac{12}{100} = 0.12 \text{ anual}$$

$$i = \frac{0.12}{12} = 0.01 \text{ mensual}$$

b) Cálculo del interés a pagar durante el primer periodo:

$$I = 103\,100(1)(0.01)$$

$$I = \$1031$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

c) Cálculo del IVA sobre los intereses generados en el primer periodo:

$$\text{IVA} = \$1031(0.16)$$

$$\text{IVA} = \$164.96 \quad \text{para el primer mes}$$

entonces:

$$\text{Intereses} + \text{IVA} = 1031 + 164.96 = 1\,195.96$$

d) La renta es el pago total en la columna de la tabla de amortización:

$$R = \frac{103\,100(0.01)}{1-(1.01)^{-24}} = \frac{1\,031}{1-0.787566127} = \frac{1031}{0.212433872}$$

$$R = \$4\,853.27 \text{ el pago al final de cada mes}$$

	Amortización $A = R - I$	Intereses sobre saldo $I = Cni$	Pago mensual R	Saldo insoluto A - Saldo
Al momentode la operación				103100.00
Fin del mes 1	3822.27	1031.00	4853.27	99277.73
Fin del mes 2	3860.50	992.78	4853.27	95417.23
Fin del mes 3	3899.10	954.17	4853.27	91518.12
Fin del mes 4	3938.09	915.18	4853.27	87580.03
Fin del mes 5	3977.47	875.80	4853.27	83602.56
Fin del mes 6	4017.25	836.03	4853.27	79585.31
Fin del mes 7	4057.42	795.85	4853.27	75527.88
Fin del mes 8	4098.00	755.28	4853.27	71429.89
Fin del mes 21	4663.90	189.37	4853.27	14273.41
Fin del mes 22	4710.54	142.73	4853.27	9562.87
Fin del mes 23	4757.65	95.63	4853.27	4805.22
Fin del mes 24	4805.22	48.05	4853.27	0.00
Totales	39989.45	8543.30	48532.75	

A= 103100
Pago mensual= **4853.27** ⟷ **4853.27**
Interés= 12% AC. mensual= 0.12
Interés= 0.01 Capitalización = 12 Periodo= 1 Plazo= 24

$$R = \frac{C\,(i)}{1-(1+i)^{-n}}$$

Cuadro 9. Amortización con renta fija, tasa fija e IVA (16%)

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.13.
En el mes de julio una mueblería ofrece una promoción de compre ahora y realice su primer pago el último día de enero del año entrante y los siguientes 6 pagos en los meses subsecuentes con una tasa de interés de 24% capitalizable mensualmente. El señor Suárez compra una sala con valor de $16 000 el último día de septiembre. Encontrar el valor de cada uno de los pagos y construir un cuadro de amortización

Datos
C = $16 000
T = 24% ACM
i = 0.02 mensual
n = 6 pagos

a) Como el señor Suárez disfruta desde el 30 de septiembre de su sala, entonces desde este día contrae la deuda, por lo que su deuda al 31 de enero es de:

$$\text{Deuda hasta el 31 de enero} = C(T)^4$$

$$\text{Deuda hasta el 31 de enero} = 16000(1.02)^4 = 16000(1.08243216)$$

$$\text{Deuda hasta el 31 de enero} = \$17318.915$$

b) El cálculo para conocer el valor del pago (renta) es:

$$R = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{17\,318.915(0.02)}{1-(1+0.02)^{-6}} = \frac{346.3783}{1-0.887971382} = \frac{346.3783}{0.112028617}$$

$$R = \$3091.87$$

c) En el mes de septiembre el saldo es de $16 000. Para el mes de septiembre se calcula el interés generado en el mes.

$$I = \text{Saldo}(n)(T) = 16000.00(1)(0.02) = \$320$$

$$M = 16\,000 + 320 = \$16\,320$$

d) En octubre el saldo es de $16 320. Para octubre se calcula el interés generado en este mes.

$$I = \text{Saldo}(n)(T) = \$16\,320(1)(0.02) = \$326.4$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Mes	Amortización	Intereses	Abono	Saldo insoluto
sep				16000.00
oct		320.00		16320.00
nov		326.40		16646.40
dic		332.93		16979.33
ene		339.59		17318.91
feb	2552.25	346.38	2898.63	14766.66
mar	2603.30	295.33	2898.63	12163.37
abr	2655.36	243.27	2898.63	9508.00
may	2708.47	190.16	2898.63	6799.53
jun	2762.64	135.99	2898.63	4036.89
jul	2817.89	80.74	2898.63	1219.00
Total	16099.91	2610.78	17391.78	

C_1 = Deuda al 31 de enero $= 16000(1.02)^4$

$C = 16000.00$
$C_1 = 17318.91$
Interés= 24% C. M.= 0.24
Interés= 0.02
Capitalización = 12
Periodo= 1
$n = 6$

$1 + i = 1.02$
$R = 2856.41$

$$R = \frac{C_1\,(i)}{1-(1+i)^{-n}}$$

$n_1 = 4$

Cuadro10. Cuadro de amortización cuando se difiere el inicio de los pagos

CD6.14.
El doctor Gabriel Urquiza compró una casa hace dos años como regalo de bodas para cuando su única nieta decidiera casarse. El valor del inmueble era de $2 000 000 y $300 000 en gastos fijos (escrituración, avalúo, etc.). El doctor dio de enganche el 40% del valor de la casa y el 60% restante lo pagaría con un crédito hipotecario otorgado por Banco Invursa durante 5 años de plazo contados desde el día de la compra en abonos mensuales vencidos. El día de hoy su nieta le da la noticia que se va a casar. El doctor quiere saber en realidad cuánto le está dando de regalo en dinero a su nieta con la casa. La tasa de interés que le cobran es de 10.5% anual capitalizable mensualmente. El valor del inmueble aumentó 0.5% mensual con la inflación. Su nieta y su futuro esposo después de una larga plática acordaron seguir pagando la casa durante los próximos tres años hasta liquidar el préstamo.

Datos
Valor del inmueble = $2 000 000
Gastos fijos = $300 000
Enganche = 40% del valor de la casa
Crédito hipotecario = 60% del valor de la casa
Inflación = 0.5%
T = 10.5 ACM
i = 0.00875

a) El valor presente de las mensualidades es igual a 60% del precio de la casa:

$$C = (\text{Porcentaje de crédito hipotecario})(\text{Valor del inmueble})$$

$$C = 0.60(2\,000\,000)$$

$$C = \$1\,200\,000$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

b) Encontrar el valor de la renta para los 5 años:

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i/p)^{-np}} = \frac{1200\,000(0.00875)}{1-(1+0.00875)^{-60}} = \frac{10\,500}{1-0.592907762} = \left[\frac{10\,500}{0.407092237}\right]$$

$$R = \$25\,792.68$$

c) Después de dos años se han pagado 24 mensualidades, por lo tanto el saldo insoluto es igual al valor presente de los 36 meses restantes.

$$C = 25\,792.68\left[\frac{1-(1+0.00875)^{-36}}{0.00875}\right] = 25\,792.68\left[\frac{1-0.730789471}{0.00875}\right] = 25\,792.68\left[\frac{0.269210528}{0.00875}\right]$$

$$C = 25\,792.68(30.76691757) = \$793\,561.25$$

d) La diferencia del crédito inicial es lo que se ha transferido al doctor Urquiza (deudor):

Diferencia del crédito inicial $= C -$ Saldo insoluto
Diferencia del crédito inicial $= 1200000 - 793561.25$
Diferencia del crédito inicial $= \$406\,438.74$

e) Entonces el doctor Urquiza es propietario de los gastos fijos, el enganche y el nuevo capital (después de 2 años)

$$C_2 = 300\,000 + (0.40)(\$2\,000\,000) + 406\,438.49$$
$$C_2 = 300\,000 + 800\,000 + 406\,438.49$$
$$C_2 = \$1\,506\,438.49$$

f) El valor futuro de este nuevo capital (C_2) después de dos años y con la inflación a una tasa de 0.5% por mes será de:

$$M_2 = 1506\,438(1+0.005)^{24}$$
$$M_2 = 1506\,438(1.127159776)$$
$$M_2 = \$1\,697\,996.32$$

g) El doctor Gabriel Urquiza en realidad regalará a su nieta la cantidad \$1 697 996.32 el día de su boda, ya que este monto (M_2) es el valor del inmueble después de 2 años y sin adicionar ninguna utilidad (como puede ser la renta del mismo durante estos 2 años, ni la plusvalía adquirida).

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.15.
El arquitecto Zúñiga compró el 10 de enero de 2015 una computadora con un precio de $22 500. Él acuerda pagarla mediante 9 pagos mensuales; para los primeros 5 meses se aplica una tasa de interés de 18% y en los últimos 4 meses una tasa de 24%, ambas con capitalización mensual y si además debe amortizarse una novena parte de la deuda por pago. ¿Cómo serán sus pagos y la amortización de esta deuda?
Construir un cuadro de amortización que muestre los cambios en las tasas de interés considerando una amortización constante.

Datos:
Precio de contado: $22 500
$n = 9$ pagos mensuales
$T = 18\%$ primeros 5 meses $\quad i = 0.015$
$T_1 = 24\%$ últimos 4 meses $\quad i_1 = 0.02$

a) La amortización es constante, por lo que debemos dividir el precio de contado entre los 9 meses de plazo:

$$A = \frac{C}{n} = \frac{22\,500}{9\,\text{meses}} = \$2\,500$$

b) Se calcula el interés a pagar el 10 de febrero:

$$I = C(1)(T) = 22\,500(1)(0.015) = \$337.50$$

c) Pago por periodo:

$$R = A + I = \$2\,500 + 337.50 = \$2\,837.50$$

d) Repetir los pasos a), b) y c) para cada mes hasta el quinto mes.

e) Se calcula el interés que se va a pagar el 10 de julio:

$$I = C(1)(i) = 10\,000(1)(0.02) = \$200$$

f) Pago por periodo:

$$R = A + I = 2500 + 200 = \$\,2\,700$$

g) Repetir los pasos a), b) y c) con la segunda tasa para cada mes hasta terminar el cuadro en el noveno mes (cuando el saldo sea cero).

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Datos
C = $22,500
n = 9
R = **$2,500.00**
T_1 = 18% AC mensual
i_1 = 1.5%
T_2 = 24% AC mensual
i_2 = 2.00%

Fecha	Pago por período	Interés sobre saldo *I = Cni*	Amortización *A* = $22,500/9	Saldo
10-ene	R = A + I			22,500.00
10-feb	2,837.50	337.50	2500.00	20000.00
10-mar	2,800.00	300.00	2500.00	17500.00
10-abr	2,762.50	262.50	2500.00	15000.00
10-may	2,725.00	225.00	2500.00	12500.00
10-jun	2,687.50	187.50	2500.00	**10000.00**
10-jul	**2,700.00**	**200.00**	2500.00	**7500.00**
10-ago	2,650.00	150.00	2500.00	**5000.00**
10-sep	2,600.00	100.00	2500.00	**2500.00**
10-oct	2,550.00	50.00	2500.00	**0.00**
Totales	24,312.50	$1,812.50	$22,500.00	

Cuadro 11. Amortización con cambio de tasas de interés y amortización constante

CD6.16.
La señora Julia Jiménez compra un refrigerador $11 499.00 más IVA. Ella acuerda con el vendedor realizar 6 pagos mensuales en UDI con una tasa de interés de 21% anual capitalizable cada mes. El primero de los pagos se hace al final del mes, Si en el momento en que se celebra la operación el valor de las UDI es de $4.971272 y se estima una inflación mensual de 0.48%, calcule el pago mensual en pesos. ¿Cuál es el valor de la renta (el pago mensual)?

Datos:
C = $11 499.00 + $1 839.84 = $13 338.84
I = 0.21/12 = 0.0175 mensual
n = 6 meses
UDI = $4.971272

1. Los pagos constituyen una anualidad simple cierta, vencida e inmediata con valor actual de $13338.84.

a) Valor de la deuda en UDI:

$$UDI = \frac{C}{\text{Valor de las UDI}} = \frac{13338.84}{4.971272} = 2683.18\ UDI$$

b) El pago mensual en UDI será:

$$R = \frac{2\,683.18(0.0175)}{1-(1+0.0175)^{-6}} = \frac{46.95565}{1-0.901142541} = \frac{46.95565}{0.098857458} =$$

$$R = 474.983383\ \text{UDI}$$

c) Con una inflación del 0.48% mensual, el pago mensual en pesos será de:
Pagos mensual en pesos = (pago mensual en UDI) (Valor de la UDI al final del mes)

Pagos mensual en pesos = $(474.983383\ \text{UDI})(4.971272)$

Pagos mensual en pesos = $2 361.27

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.17.
La dueña de un molino de nixtamal obtiene un préstamo de $1 250 000, el cual debe liquidar en una sola exhibición dentro de 5 años. La dueña del molino decide realizar reservas anuales iguales con el objetivo de pagar la deuda a su vencimiento mediante un fondo de inversión bancario con 9% de interés anual.

Datos
C = $1 250 000
T = 9% anual
n = 5 años

a) Para obtener las reservas anuales para pagar la deuda utilizamos la siguiente ecuación:

$$M = R\left[\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right]$$

despejando R queda:

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1} = \frac{1250000(0.09)}{(1+0.09)^5 - 1} = \frac{112500}{1.538623955 - 1} = \frac{112500}{0.538623955}$$

$$R = \$208865.57$$

b) Los cálculos que se deben hacer para elaborar el cuadro para el fondo de amortización son:

1. El interés obtenido en un año, se calcula con la fórmula de interés simple.

$$I = Cni = 208865.57(1)(0.09)$$

$$I = \$18797.90$$

2. Este interés se suma al total del ahorro para obtener la cantidad que se va a depositar durante el segundo periodo.

Total que se suma al monto = 208865.57 + $18797.90

Total que se suma al monto = 227663.47

3. El monto al final del año (5) se encuentra sumando al saldo del año anterior (4) el depósito anual, más los intereses del periodo.

Monto al final del año (5) = Saldo del año anterior + depósito anual + intereses durante el periodo

Monto al final del año (5)Saldo = 955169.20 + 208865.57 + 85965.23

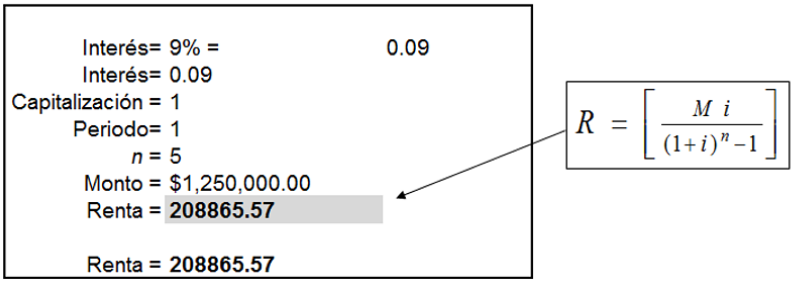
Monto al final del año (5) = $1250000

Es decir, los $1200000 deseados.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4. El cuadro 12 sobre comportamiento del fondo de amortización se realiza de la siguiente manera:

Fecha	Depósito por período	Intereses	Total que se suma al monto	Saldo
1	208865.57		150383.56	208865.57
2	208865.57	18797.90	227663.47	436529.04
3	208865.57	39287.61	248153.19	684682.23
4	208865.57	61621.40	270486.97	955169.20
5	208865.57	85965.23	294830.80	1250000.00
Total	1044327.86	205672.14	1191517.99	



Cuadro 12. Comportamiento del fondo de amortización

CD6.18.
El psicólogo Diego Tovar debe pagar dentro de 6 meses la cantidad de $980 500 por la compra de un local comercial. Para tener el dinero en la fecha de liquidación decide realizar depósitos mensuales en una cuenta de inversión que paga 12% anual capitalizable mensualmente.
¿De cuánto deben ser los depósitos en su cuenta de inversión?
Construir un cuadro que muestre la forma en la que se acumula el fondo.

Datos
C = $980 500
T = 12% ACM
i = 0.01 mensual
n = 6 meses

a) Para calcular los depósitos en su cuenta se utiliza la siguiente ecuación:

$$M = R\left[\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right]$$

Si despejamos R de la ecuación tenemos que:

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1} = \frac{980\,500(0.01)}{(1+0.01)^6 - 1} = \frac{9\,805}{1.061520151 - 1} = \frac{9\,805}{0.061520151}$$

R = $159 378.67

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

b) El cuadro sobre el fondo de amortización queda de la siguiente manera:

Fecha	Depósito por período	Intereses	Total que se suma al monto	Saldo
1	159378.67		159378.67	159378.67
2	159378.67	1593.79	160972.46	320351.13
3	159378.67	3203.51	162582.18	482933.32
4	159378.67	4829.33	164208.01	647141.33
5	159378.67	6471.41	165850.09	812991.41
6	159378.67	8129.91	167508.59	**980500.00**
Total	956272.04	24227.96	980500.00	

Interés= 12% = 0.12
Interés= 0.01
Capitalización = 12
Periodo= 1
n = 6
Monto = $980,500.00
Renta = **159378.67**

Renta = **159378.7**

$$R = \frac{M\,(i)}{(1+i)^n - 1}$$

Cuadro 13. Fondo de amortización

CD6.19.
¿Cuántos depósitos debe realizar la doctora Valeria Escalona si desea comprar de contado una cama de exploración de $13 800 para su consultorio? Para lograr esta compra, la doctora Escalona deposita al principio de cada mes en la cuenta de inversión la cantidad de $665.74. Si el banco paga una tasa de interés de 9% convertible quincenalmente, ¿cuántos depósitos deberá hacer para poder realizar la compra de la cama?

Datos
C = $13 800
R = $665.74
T = 9% AC quincenal
i = 0.00375 quincenal

a) Los depósitos que deberá realizar serían:

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$n = \frac{\log\left[\frac{Mi}{R}+1\right]}{\log(1+i)} = \frac{\log\left[\frac{13\,800(0.00375)}{665.74}+1\right]}{\log(1+0.00375)} = \frac{\log\left[\frac{51.75}{665.74}+1\right]}{\log(1+0.00375)}$$

$$n = \frac{\log(1.077714372)}{\log(1.00375)} = \frac{0.0325112}{0.001625558}$$

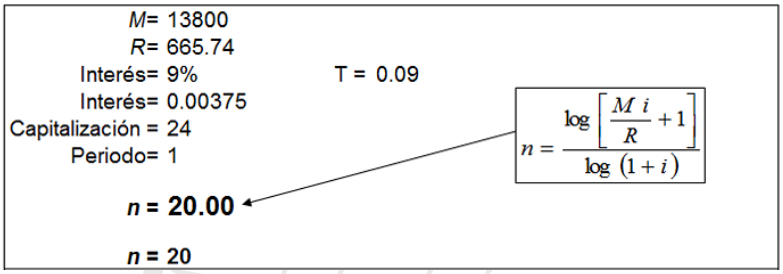
$n = 20$ quincenas

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

b) El cuadro sobre el fondo de amortización se realiza de la siguiente manera:

Fecha	Depósito por periodo	Intereses	Total que se suma al monto	Saldo
1	665.74		665.74	665.74
2	665.74	2.50	668.24	1,333.98
3	665.74	5.00	670.74	2,004.72
4	665.74	7.52	673.26	2,677.98
5	665.74	10.04	675.78	3,353.76
6	665.74	12.58	678.32	4,032.08
7	665.74	15.12	680.86	4.712.94
18	665.74	43.74	709.48	12,373.04
19	665.74	46.40	712.14	13,085.18
20	665.74	49.07	714.81	13,799.98
Total	7,988.88	166.85	8,155.73	



Cuadro 14. Fondo de amortización

CD6.20.
La fábrica Plásticos de México S. A. compra equipo con valor $150 000. El administrador espera que la vida útil del equipo sea de 12 años con un valor de desecho de $10 000.
a) Encontrar la base de depreciación.
b) Calcular la depreciación anual.
c) Determinar el valor de reemplazo.
d) Construir el cuadro de depreciación.
e) Hacer una gráfica de tiempo contra valor en libros.
f) Construir una gráfica de tiempo contra depreciación acumulada.

Datos:
$C = \$150\,000$
$S = \$10\,000$
$n = 12$ años

a) La base de depreciación:

$$B = C - S$$

$$B = 150\,000 - \$10\,000$$

$$B = \$140\,000$$

Representa la depreciación acumulada con el transcurso de los dice años de la vida útil del activo

b) Depreciación anual

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$D = \frac{C - S}{n} = \frac{150\,000 - 10\,000}{12} = \frac{140\,000}{12 \text{ meses}}$$

$$D = \$\,11\,666.67 \text{ por año}$$

La depreciación anual es de $11 666.67, que es la mínima que se debe guardar en un fondo de depreciación al final de cada año y durante 12 años.

c) El valor de reemplazo se obtiene de la manera siguiente:

Valor de reemplazo = (depreciación acumulada) + (valor de desecho)

$$V_R = D_A + S$$
$$V_R = (11\,666.67)(12) + 10\,000.00$$
$$V_R = \$150\,000.04$$

d) Cuadro de depreciación
Valor en libros al final del primer año

$$V_1 = 150\,000.00 - 11\,666.67$$
$$V_1 = \$138\,333.33$$

Valor en libros al final del segundo año

$$V_2 = 138\,333.33 - 11\,666.67$$
$$V_2 = \$126\,666.66$$

Así, de manera sucesiva podemos seguir calculando la depreciación hasta el último año (12 años) como se muestra en el cuadro 15.

Recursos académicos en línea

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

DATOS	
C =	$150,000.00
S =	$10,000.00
n =	12
B =	$140,000.00
D =	$11,666.67

FIN DE AÑO	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0			$150,000.00
1	$11,666.67	$11,666.67	$138,333.33
2	$11,666.67	$23,333.33	$126,666.67
3	$11,666.67	$35,000.00	$115,000.00
4	$11,666.67	$46,666.67	$103,333.33
5	$11,666.67	$58,333.33	$91,666.67
6	$11,666.67	$70,000.00	$80,000.00
7	$11,666.67	$81,666.67	$68,333.33
8	$11,666.67	$93,333.33	$56,666.67
9	$11,666.67	$105,000.00	$45,000.00
10	$11,666.67	$116,666.67	$33,333.33
11	$11,666.67	$128,333.33	$21,666.67
12	$11,666.67	$140,000.00	$10,000.00

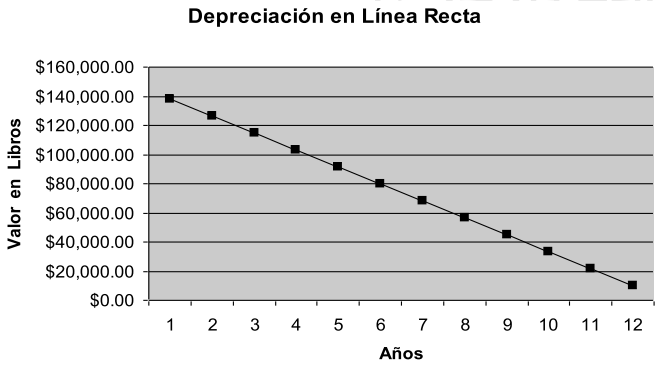
Cuadro 15. Método de depreciación en línea recta

En el cuadro 15 se muestra cómo aumenta la depreciación acumulada y disminuye el valor en libros. El valor de $10 000 en el año 12 corresponde al valor de desecho: en el mismo año los $140 000 de depreciación acumulada representa la cantidad guardada en el fondo de reserva de depreciación, sin generar intereses.

e) Hacer una gráfica de tiempo contra valor en libros (con apoyo de Excel).

$$D = \frac{\text{Base de depreciación del activo fijo}}{\text{Vida útil (en un año)}}$$

$$D = \frac{B}{n} = \frac{\$11666.67}{1 \text{ año}}$$



Gráfica 6.1

En la gráfica 6.1 se observa que la pendiente de la línea recta es negativa. La interpretación de la pendiente negativa se debe a que por cada año que transcurre, el activo fijo se deprecia en $11 666.67.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

f) Construir una gráfica de tiempo contra depreciación acumulada.

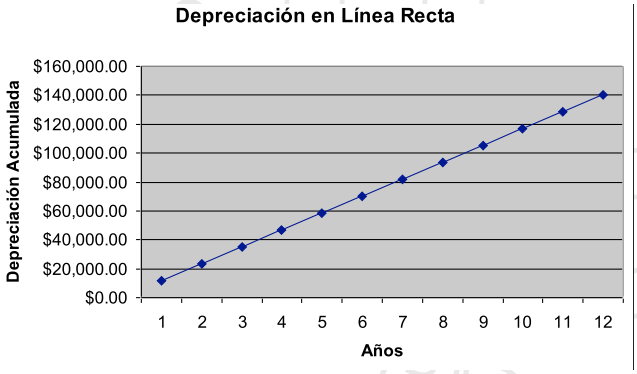
$$D_A = \frac{(\text{Depreciación})(\text{vida útil en años})}{\text{Un año}} == \frac{D}{n} = \frac{(\$11\,666.67)\,(1)}{1} = \$11666.67$$

Para calcular la depreciación acumulada:

$$D_A = (\text{Depreciación})(\text{vida útil en años})$$
$$D_A = (D)(n)$$
$$D_A = (\$11\,666.67)(1\text{ año})$$
$$D_A = \$11\,666.67 \text{ para el primer año}$$

$$D_A = (\$11\,666.67)(2\text{ año})$$
$$D_A = \$23\,333.34 \text{ para el segundo año}$$

En la gráfica 6.2 puede observar que la pendiente de la línea recta es positiva y significa que por cada año que transcurre, la depreciación acumulada aumenta en $11 666.67, cantidad, que representa el dinero que se encuentra en el fondo de depreciación.



Gráfica 6.2

CD6.21.
La empresa Control de Plagas del Sur compró equipo de fumigación con valor de $95 000. Se estima que su vida útil sea de 6 años con un valor de salvamento de $1 500.
a) Elaborar el cuadro de depreciación con ayuda de Excel.
b) Encontrar el valor de reposición del equipo de fumigación si la inflación promedio esperada es de 5% anual.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

DATOS		
	C =	$95,000.00
	i =	5%
	n =	6
	D =	$15,583.33

0.05

V_{re} = $128,809.11 ← $V_{re} = C(1+j)^n + S$
S = $1,500.02

FIN DE AÑO	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0			$95,000.00
1	$15,583.33	$15,583.33	$79,416.67
2	$15,583.33	$31,166.66	$63,833.34
3	$15,583.33	$46,749.99	$48,250.01
4	$15,583.33	$62,333.32	$32,666.68
5	$15,583.33	$77,916.65	$17,083.35
6	$15,583.33	$93,499.98	**$1,500.02**

Cuadro 16. Depreciación de la vida útil del equipo de fumigación

Datos
$C = \$\ 95\ 000.00$
$S = \$\ 1\ 500.00$
$n = 6$
$j = 5\%$ anual

El valor de reposición se encuentra con la fórmula de monto de interés compuesto.

$$M = C(1+j)^n$$

$$V_{re} = C(1+j)^n + S \qquad 6.11$$

$$V_{re} = \$95000.00\,(1.05)^6 + \$1500.00$$

$$V_{re} = \$\,127\,309.09 + \$1500.00$$

$$V_{re} = \$128\,809.09$$

CD6.22.
Encontrar el valor de salvamento de un horno para panadería que costó $155 900 con una vida útil de 10 años. Este equipo se deprecia $12 884.60 cada año. Debido a la inflación su valor aumenta 4% en promedio anual.

Datos
$C = \$155\ 900$
$D = \$12\ 884.60$
$n = 10$
$j = 4\%$ anual

a) En el primer año el valor del horno para panadería aumenta 4%.

$$V_{re} = C(1+j)^n$$

$$V_{re} = (155\,900)(1+0.04)^1$$

$$V_{re} = \$\,162\ 136$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

b) Si se deprecia en $12 884.60 por año, entonces el valor del horno en un año será:

$V_{re} = C(1+j)^n - D_1$ al fin del primer año

$C_1 = 162\,136 - 12\,884.60$

$C_1 = \$149\,251.40$

c) Al final del segundo año, el valor del horno aumenta 4%.

$V_{re} = C_1(1+j)^n$

$C_2 = (149\,251)(1+0.04)^1$

$C_2 = \$\,155\,221.46$

d) Si se deprecia en $12 884.60 por año, entonces el valor del horno después del segundo año sería:

$V_{re} = C_2(1+j)^n - D_2$

$C_2 = 150\,317.50 - 12\,884.60$

$C_2 = \$137\,432.90$

e) Esta forma de solucionar el problema es más complicada porque se tiene que calcular hasta los 10 años; sin embargo, existe otra forma para calcular el valor de salvamento utilizando la siguiente ecuación de valor:

$$S = C(1+j)^n - D\left[\frac{(1+j)^n - 1}{j}\right]$$

$$S = 155\,900(1+0.04)^{10} - 12\,884.60\left[\frac{(1+0.04)^{10} - 1}{0.04}\right]$$

$S = 155\,900(1.480244285) - 12\,884.60(12.00610712)$

$S = 230\,770.08 - 154\,693.8878$

$S = \$\,76\,076.20$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

DATOS	
C =	$155,900.00
i =	4%
n =	10
D =	$12,884.60

FIN DE AÑO	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS	VALOR INFLACIÓN
0			$162,136.00	
1	$12,884.60	$12,884.60	$149,251.40	155,221.46
2	$12,884.60	$25,769.20	$142,336.86	148,030.33
3	$12,884.60	$38,653.80	$135,145.73	140,551.56
4	$12,884.60	$51,538.40	$127,666.96	132,773.64
5	$12,884.60	$64,423.00	$119,889.04	124,684.60
6	$12,884.60	$77,307.60	$111,800.00	116,272.00
7	$12,884.60	$90,192.20	$103,387.40	107,522.90
8	$12,884.60	$103,076.80	$94,638.30	98,423.83
9	$12,884.60	$115,961.40	$85,539.23	88,960.80
10	$12,884.60	$128,846.00	$76,076.20	80,640.77

Cuadro 17. Cálculo del valor de salvamento

CD6.23.
La bodega de pisos y azulejos Estilo y Decoración compró un montacargas con valor de $345 680 y se espera que tenga una vida útil de 8 años. El departamento de contabilidad va a depreciarlo en $48 560 cada año. Debido a la inflación su valor aumenta en promedio anual 6%. Encontrar el valor de salvamento del montacargas.

Datos
C = $345 680
D = $48 560
j = 6% anual
n = 8 años

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

a) Con ayuda del cuadro 18 se calculó el valor de salvamento en $132 534.69.

DATOS	
C =	$345,680.00
i =	6%
n =	8
D =	$48,560.00

FIN DE AÑO	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS	VALOR INFLACIÓN
0			$366,420.80	
1	$48,560.00	$48,560.00	$317,860.80	336,932.45
2	$48,560.00	$97,120.00	$288,372.45	305,674.79
3	$48,560.00	$145,680.00	$257,114.79	272,541.68
4	$48,560.00	$194,240.00	$223,981.68	237,420.58
5	$48,560.00	$242,800.00	$188,860.58	200,192.22
6	$48,560.00	$291,360.00	$151,632.22	160,730.15
7	$48,560.00	$339,920.00	$112,170.15	118,900.36
8	$48,560.00	$388,480.00	**$70,340.36**	74,560.78

Cuadro 18. Cálculo del valor de salvamento

CD6.24
El administrador de la mueblería Armarios Diko compra una camioneta para transportar muebles, libreros, cocinas y refrigeradores. El vehículo tiene un valor de $750 000 de contado. Él estima su vida útil en 5 años y al final un valor de salvamento de $40 000.
a) Encontrar la tasa de depreciación que debe aplicarse.
b) Elaborar el cuadro de depreciación correspondiente.

Datos
$C = \$750\,000$
$S = \$40\,000$
$n = 5$ años

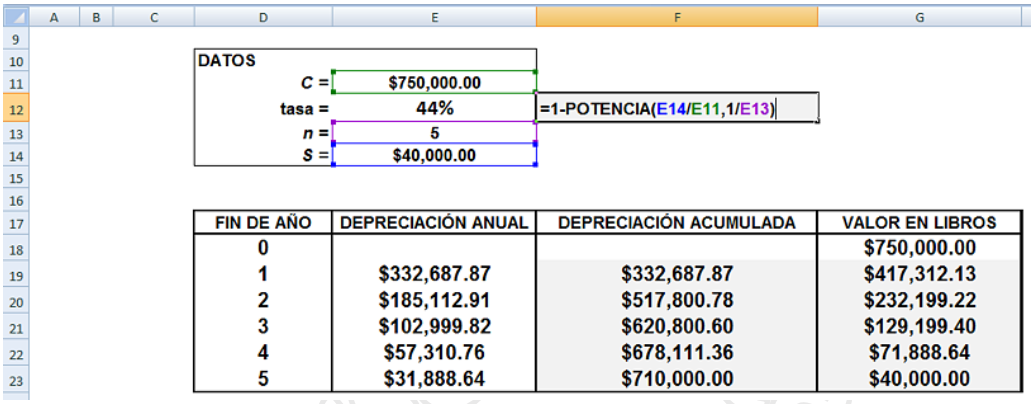
a) $d = ?$

$$d = 1 - \left(\frac{V_n}{C}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 - \left(\frac{40\,000.00}{750\,000.00}\right)^{\frac{1}{5}} = 0.44358$$

$d \approx 44\%$

b) El cuadro de depreciación es:

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.



DATOS	
C =	$750,000.00
tasa =	44%
n =	5
S =	$40,000.00

=1-POTENCIA(E14/E11,1/E13)

FIN DE AÑO	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0			$750,000.00
1	$332,687.87	$332,687.87	$417,312.13
2	$185,112.91	$517,800.78	$232,199.22
3	$102,999.82	$620,800.60	$129,199.40
4	$57,310.76	$678,111.36	$71,888.64
5	$31,888.64	$710,000.00	$40,000.00

Cuadro 19. Depreciación por el método de porcentaje fijo

CD6.25.

Una compañía de venta de materiales de construcción compró un camión. El valor de contado es de $1 800 000. Se espera que tenga una vida útil de 6 años y valor de salvamento de $360 000. Elabore el cuadro de depreciación por el método de porcentaje fijo.

Datos

$C = \$1\,800\,000$

$D = \$360\,000$

$n = 6$ años

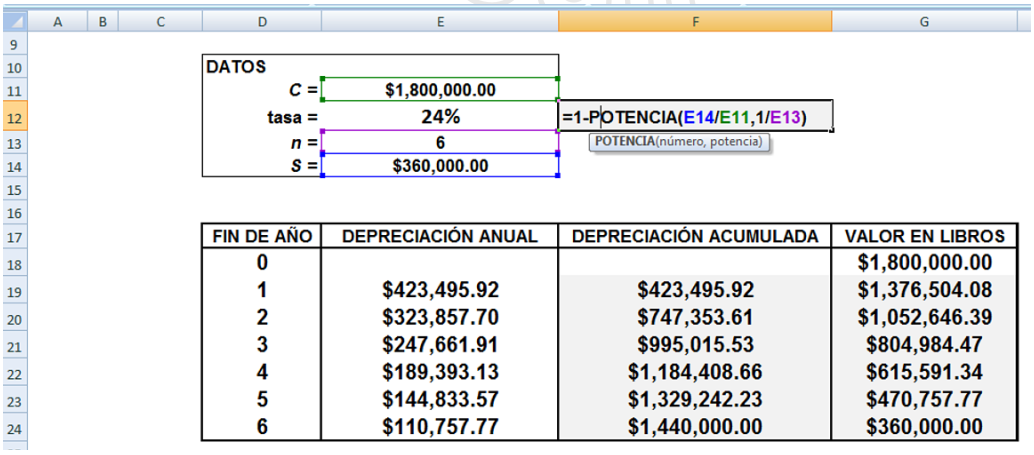
a) Calculamos primero la tasa fija a aplicar:

$$d = 1 - \left(\frac{V_n}{C}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$d = 1 - \left(\frac{360\,000}{1\,800\,000}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$d = 0.23527$$

$$d \approx 23.5\%$$



DATOS	
C =	$1,800,000.00
tasa =	24%
n =	6
S =	$360,000.00

=1-POTENCIA(E14/E11,1/E13)

POTENCIA(número, potencia)

FIN DE AÑO	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0			$1,800,000.00
1	$423,495.92	$423,495.92	$1,376,504.08
2	$323,857.70	$747,353.61	$1,052,646.39
3	$247,661.91	$995,015.53	$804,984.47
4	$189,393.13	$1,184,408.66	$615,591.34
5	$144,833.57	$1,329,242.23	$470,757.77
6	$110,757.77	$1,440,000.00	$360,000.00

Cuadro 20. Depreciación por el método de porcentaje fijo

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.26.
Encontrar la depreciación anual de una trituradora industrial con valor de $50 000, si se estima un valor de desecho de $4 000 dentro de 5 años. Encontrar la depreciación hasta el tercer año.

Datos
C = $ 50 000
S = $4 000
n = 5 años
k = 3 años

a) Encontrar la tasa de depreciación fija.

$$d = 1 - \left(\frac{V_n}{C}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 - \left(\frac{\$4\,000.00}{\$50\,000.00}\right)^{\frac{1}{5}} = 0.39658$$

b) Depreciación en el primer año:

$$D_1 = Cd$$
$$D_1 = 50\,000.00\,(0.39658)$$
$$D_1 = \$19\,829.12$$

c) Valor en libros

$$V_1 = C - D_1$$
$$V_1 = \$30\,170.88$$

d) Depreciación en el segundo año:

$$D_2 = V_1 d$$
$$D_2 = 30\,170.88\,(0.39658)$$
$$D_2 = \$11\,965.24$$

e) Valor en libros

$$V_2 = V_1 - D_2$$
$$V_2 = 30\,170.88 - 11\,965.24$$
$$V_2 = \$18\,205.64$$

f) Depreciación en el tercer año:

$$D_3 = Cd$$
$$D_3 = 18\,205.64\,(0.39658)$$
$$D_3 = \$7\,220.04$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

g) Valor en libros

$$V_3 = V_2 - D_3$$
$$V_3 = (\$18\,205.64) - (\$7\,220.04)$$
$$V_3 = \$10\,985.60$$

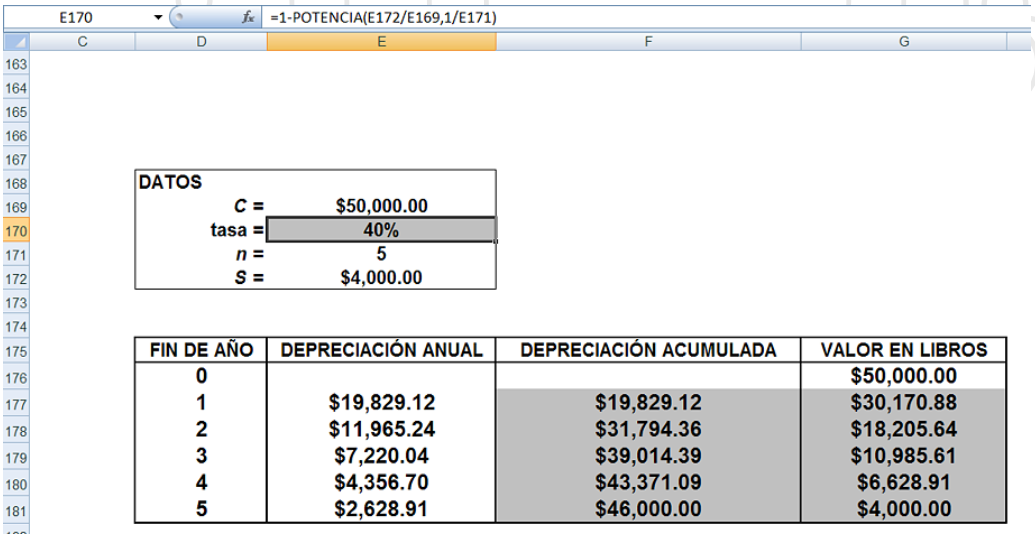
h) El problema se puede resolver de manera más rápida si se calcula primero el valor en libros al final del tercer año y después la depreciación acumulada hasta el tercer año.

$$V_k = C(1-d)^k$$
$$V_3 = 50\,000.00\,(1-0.39658)^3$$
$$V_k = \$10\,985.60$$

i) Depreciación acumulada al tercer año.

$$D_A = C - V_k$$
$$D_A = 50\,000.00 - 10\,985.60$$
$$D_A = \$39\,014.40$$

j) En la hoja electrónica del 21 se muestra la solución del problema.



Cuadro 21. Depreciación del método de porcentaje fijo

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Depreciación e inflación

CD6.27.

El ingeniero Andrés Martínez desea vender una góndola de carga después de 8 años de uso que le costó $2 600 000. La inflación promedio durante este tiempo ha sido de 0.8% mensual y el ingeniero considera una tasa de depreciación de porcentaje fijo de 10% anual. Elaborar el cuadro de depreciación por el método de porcentaje fijo.

Datos
C = $2 600 000
n = 8 años
j = 0.8% mensual
d = 10% anual

a) Encontrar la tasa de inflación anual equivalente al 0.8% mensual:

$$j = (1 + 0.008)^{12\,meses} - 1$$

$$j = 1.1003 - 1$$

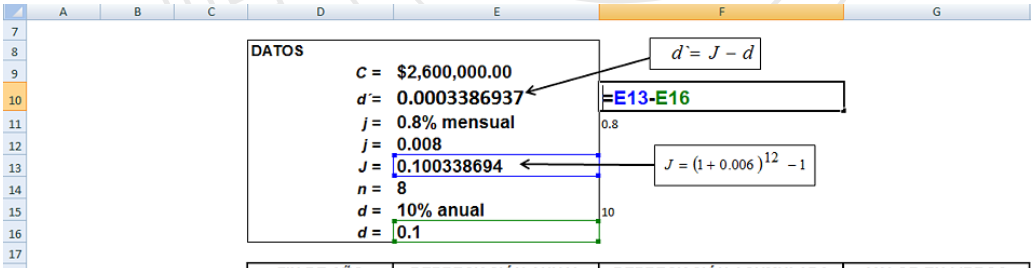
$$j = 0.1003 \quad \text{anual}$$

b) Realizar la diferencia entre las dos tasas, la inflación y la de depreciación

$$d' = 0.1003 - 0.10$$

$$d' = 0.0003 \text{ anual}$$

c) Como la tasa de inflación j es mayor que la de depreciación d, el valor en libros crecerá con el paso de los años (véase el cuadro 22) y el factor $(1 - d)$ será mayor de uno.



FIN DE AÑO	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0			$2,600,000.00
1	$880.60	$880.60	$2,600,880.60
2	$880.90	$1,761.51	$2,601,761.51
3	$881.20	$2,642.71	$2,602,642.71
4	$881.50	$3,524.20	$2,603,524.20
5	$881.80	$4,406.00	$2,604,406.00
6	$882.10	$5,288.10	$2,605,288.10
7	$882.39	$6,170.49	$2,606,170.49
8	$882.69	$7,053.19	$2,607,053.19

Cuadro 22. Depreciación del método de porcentaje fijo

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.28.
La distribuidora Vidrio Sacro desea vender mobiliario después de 5 años de uso que le costó $250 000. La inflación promedio durante este tiempo ha sido de 7% anual. El administrador considera una tasa de depreciación de porcentaje fijo de 13% anual. Elaborar el cuadro de depreciación por el método de porcentaje fijo.

Datos
C = $250 000
n = 5 años
j = 7 % anual
d =13% anual

a) Realizar la diferencia entre las dos tasas, la inflación y la de depreciación

$$d' = 0.13 - 0.07$$

$$d' = 0.06$$

b) Como la tasa de depreciación d es mayor que la de inflación j, el valor en libros reducirá al paso de los años y el factor $(1 - d)$ será menor de 1, como puede observarse en el cuadro 23.

DATOS		
C =	$250,000.00	
d' =	0.06	
j =	7% anual	7
j =	0.07	
n =	5	
d =	13% anual	13
d =	0.13	

FIN DE AÑO	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0			$250,000.00
1	$15,000.00	$15,000.00	$265,000.00
2	$15,900.00	$30,900.00	$280,900.00
3	$16,854.00	$47,754.00	$297,754.00
4	$17,865.24	$65,619.24	$315,619.24
5	$18,937.15	$84,556.39	$334,556.39

Cuadro 23. Depreciación del método de porcentaje fijo

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.29.
Encontrar el precio original de un comedor que la señora Gema compró hace 10 años. La hija de la señora Gema lo desea vender en $3 500. Ella considera una tasa de depreciación de 6% anual y una tasa de inflación de 1.1 por bimestre.

Datos
S = $3 500
n = 10 años
j = 1.1 % bimestral
d = 6% anual

a) Encontrar la tasa de inflación anual equivalente al 1.1% bimestral.

$$j = (1 \text{ año} + 1.1 \text{ bimestral})^{10} - 1$$

$$j = (1 + 0.011)^{10} - 1$$

$$j = 1.115607836 - 1$$

$$j = 0.115607836 \quad \text{anual}$$

b) Realizar la diferencia entre las dos tasas, la inflación y la de depreciación

$$d' = 0.115607836 - 0.06$$

$$d' = 0.055607836$$

c) La incógnita es el precio original C:

$$S = C(1 - 0.055607836)^{-10}$$

$$3\,500 = C(1 - 0.055607836)^{-10}$$

$$C = \frac{3500}{(1 - 0.055607836)^{-10}} = \frac{3500}{1.772051139}$$

$$C = \$1\,975.11 \quad \textit{Costo de venta (original)}$$

d) Como la tasa de inflación es mayor que la tasa de depreciación, el activo aumentó su valor de venta por la tasa de inflación.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Método de la suma de dígitos o enteros

CD6.30.

La empresa de fertilizantes compra equipo de cómputo con valor de $190 000. La empresa estima la vida útil de este activo en 5 años y un valor de desecho de $15 000. Elabora un cuadro de depreciación por el método de suma de dígitos.

Datos
$C = \$190\,000$
$S = \$15\,000$
$n = 5$ años

a) Base de depreciación de activo:

$$B = C - S$$

$$B = 190\,000 - 15\,000$$

$$B = \$\,175\,000$$

b) Suma de dígitos:

$$s = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$s = \frac{5(5+1)}{2}$$

$$s = 15$$

$s =$ 15 es el denominador de la fracción

c) Encontrar el denominador de la fracción a depreciar en el año correspondiente:

Año	1	2	3	4	5
Numerador	5	4	3	2	1
Fracción	**5/15**	**4/15**	**3/15**	**2/15**	**1/15**

d) Calcular el cargo anual para el primer año:

$$D_1 = \left[\frac{n-k+1}{s}\right](C-S)$$

$$D_1 = \left[\frac{5-1+1}{15}\right](190\,000 - 15\,000)$$

$$D_1 = \left(\frac{5}{15}\right)(175\,000)$$

$$D_1 = \$\,58\,333.33$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

e) Elaboración del cuadro 24 para calcular los 5 años.

DATOS	
C =	$190,000.00
B =	$175,000.00
n =	5
S =	$15,000.00

AÑO	FRACCIÓN	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0				$190,000.00
1	0.3333	$58,333.33	$58,333.33	$131,666.67
2	0.2667	$46,666.67	$105,000.00	$85,000.00
3	0.2000	$35,000.00	$140,000.00	$50,000.00
4	0.1333	$23,333.33	$163,333.33	$26,666.67
5	0.0667	$11,666.67	$175,000.00	$15,000.00

Cuadro 24. Método de la suma de dígitos o enteros

CD6.31.
El dueño de un balneario, en el estado de Morelos compra una caldera para calentar el agua de las albercas que tiene un costo de $3 700 000. Estima una vida útil de 6 años y un valor de salvamento de $750 000. Elaborar el cuadro de depreciación utilizando el método de la suma de dígitos.

Datos
$C = \$3\ 700\ 000$
$S = \$750\ 000$
$n = 6$ años

a) Base de depreciación de activo:

$$B = C - S$$

$$B = 3\ 700\ 000 - 750\ 000$$

$$B = \$\ 2\ 950\ 000$$

b) Suma de dígitos:

$$s = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$s = \frac{6(6+1)}{2}$$

$$s = 21$$

$s = 21$ es el denominador de la fracción

c) Encontrar el denominador de la fracción a depreciar en el año correspondiente:

Año	1	2	3	4	5
Numerador	6	5	4	3	2
Fracción	**6/21**	**5/21**	**4/21**	**3/21**	**2/21**

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

d) Calcular el cargo anual para el primer año:

$$D_1 = \left[\frac{n-k+1}{s}\right](C-S)$$

$$D_1 = \left[\frac{6-1+1}{21}\right](3\,700\,000 - 750\,000) = \left(\frac{6}{21}\right)(2\,950\,000)$$

$$D_1 = \$\,842\,857.14$$

e) Elaboración del cuadro 25 Depreciación para la vida útil de este bien.

DATOS	
C =	$3,700,000.00
B =	$2,950,000.00
n =	6
denominador =	21
S =	$750,000.00

AÑO	NUMERADOR	FRACCIÓN	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0					$3,700,000.00
1	6	0.2857	$842,857.14	$842,857.14	$2,857,142.86
2	5	0.2381	$702,380.95	$1,545,238.10	$2,154,761.90
3	4	0.1905	$561,904.76	$2,107,142.86	$1,592,857.14
4	3	0.1429	$421,428.57	$2,528,571.43	$1,171,428.57
5	2	0.0952	$280,952.38	$2,809,523.81	$890,476.19
6	1	0.0476	$140,476.19	$2,950,000.00	$750,000.00

Cuadro 25. Método de la suma de dígitos o enteros

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Método de unidades de producción o servicio

CD6.32.

Una consultoría de contadores adquiere una camioneta de carga con un costo de $480 000 y espera que la vida útil del vehículo sea de 160 000 kilómetros con un valor de desecho de $122 000. El kilometraje recorrido por la unidad durante los tres primeros años es de:

Año	Kilómetros
1	50,000
2	58,000
3	52,000
Total	**160,000**

a) Encontrar la base de depreciación por kilómetro recorrido.
b) Construir el cuadro de depreciación.

Datos
C = $480 000
S = $122 000
T = 160 000 kilómetros
n = 3 años

Encontrar la base de depreciación por kilómetro recorrido.

1. Determinar la base de depreciación:

$$B = C - S$$

$$B = 480\,000 - 122\,000$$

$$B = \$\ 358\,000$$

2. Calcular la depreciación por kilómetro recorrido:
a) La base de depreciación se distribuye entre los kilómetros recorridos durante 3 años.

$$D_k = \frac{B}{T}$$

$$D_k = \frac{358\,000}{160\,000}$$

$$D_k = 2.2375$$

La depreciación por kilómetro es de 2.24

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

b) Construir el cuadro 26 sobre depreciación por unidad de producción o servicio.

DATOS	
C =	$480,000.00
B =	$358,000.00
n =	3
Dk =	$2.24
T =	160,000
S =	122,000
S =	$122,000.00

AÑO	Km	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0				$480,000.00
1	50,000	$111,875.00	$111,875.00	$368,125.00
2	58,000	$129,775.00	$241,650.00	$238,350.00
3	52,000	$116,350.00	$358,000.00	$122,000.00
T	160,000			

Cuadro 26. Método de depreciación en unidades de servicio

CD6.33.
La panificadora La Viga adquiere una batidora con un costo de $150 600 y espera que su vida útil sea de 30 000 horas y que tenga un valor de desecho de $42 000. El número de horas de servicio del aparato durante los 4 primeros años es de:

Año	Horas de servicio
1	2 000
2	1 900
3	1 800
4	1 700
Total	**7 400**

a) Encontrar la base de depreciación por hora de servicio.
b) Construir la tabla de depreciación.

Datos
C = $150 600
S = $42 000
n = 4 años
T = 7 400 horas

a) Encontrar la base de depreciación por hora de servicio.

1. Determinar la base de depreciación:

$$B = C - S$$

$$B = 150\,600 - 42\,000$$

$$B = \$108\,600$$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

2. Calcular la depreciación por hora de servicio:

a) La base de depreciación se distribuye entre las horas de servicio de 4 años.

$$D_k = \frac{B}{T}$$

$$D_{hr} = \frac{108\,600}{7\,400}$$

$$D_{hr} = \$14.67567$$

La depreciación por hora de servicio es de $14.68

b) Construir el cuadro sobre depreciación por hora de servicio.

DATOS	
C =	$150,600.00
B =	$108,600.00
n =	4
Dk =	$14.68
T =	7,400
S =	42,000
S =	$42,000.00

AÑO	HORAS	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0				$150,600.00
1	2,000	$29,351.35	$29,351.35	$121,248.65
2	1,900	$27,883.78	$57,235.14	$93,364.86
3	1,800	$26,416.22	$83,651.35	$66,948.65
4	1,700	$24,948.65	$108,600.00	$42,000.00
T	7,400			

Cuadro 27. Método de unidades de producción o servicio

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Método del fondo de amortización

CD6.34.

La Universidad Autónoma de Tonalá compró para sus oficinas un equipo de aire acondicionado con valor de $798 400. Estiman que el equipo tiene un tiempo de vida útil de 5 años, al cabo de los cuales el valor de desecho será de $180 000. Los cargos por depreciación anual se invierten en un fondo de reserva de depreciación que paga un interés de 8% anual. Calcular:

a) La base de depreciación.
b) El cargo anual por depreciación.
c) Elaborar una tabla de depreciación.

Datos
$C = \$798\ 400$
$S = \$180\ 000$
$n = 5$ años
$T = 8\%$ anual

a) La base de depreciación:

$$B = C - S$$

$$B = 798\ 400 - 180\ 000$$

$$B = \$618\ 400$$

b) El cargo anual por depreciación es:

$$D = \frac{B(i)}{(1+i)^n - 1} = \frac{(618\ 400)(0.08)}{(1+0.08)^5 - 1} = \frac{49\ 472}{1.469328077 - 1} = \frac{49\ 472}{0.469328077}$$

$$D = \$\,105\ 410.27$$

La cantidad que se debe depositar en el fondo de reserva de depreciación al final de cada año es de $105 410.27 para alcanzar el monto de $618 400 en 5 años.

c) Para elaborar el cuadro de depreciación se deben seguir los siguientes pasos.

1. La columna de interés ganado al final del año (columna E) se encuentra de la siguiente manera:

(Depreciación del año anterior) (Tasa de interés 0.08) + Interés ganado en ese segundo periodo.

2. La columna de depreciación anual (columna F) en cualquier año se calcula:

Depósito realizado (columna D) + Interés ganado (columna E) en ese año.

3. La columna de depreciación acumulada (columna G) se obtiene:

Depreciación acumulada del año anterior (columna G) + depreciación anual (columna F) en ese año.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

DATOS		
C =	$798,400.00	
B =	$618,400.00	
n =	5	
T =	8%	8
i =	0.08	
S =	$180,000.00	
D =	$105,410.27	=(E12*E15)/(((1+E15)^E13)-1)

AÑO	Depósito	Interés ganado	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0					798,400
1	105,410.27	0	$105,410.27	$105,410.27	692,990
2	105,410.27	8,433	$113,843.09	$219,253.36	579,147
3	105,410.27	17,540	$122,950.54	$342,203.91	456,196
4	105,410.27	27,376	$132,786.58	$474,990.49	323,410
5	105,410.27	37,999	$143,409.51	**$618,400.00**	**180,000**
	527,051.36	**91,349**	**618,400**		

Cuadro 28. Depreciación obtenida por el método del fondo de amortización

CD6.35.
Un gimnasio compró 30 colchones, para sus salas de gimnasia con valor de $680 000. Con la experiencia que tiene el área de mantenimiento el administrador estima que tiene una vida útil en promedio de 8 años y ningún valor de desecho (cero pesos). Se sabe que la tasa promedio de interés es de 10% anual. Construya un cuadro de depreciación utilizando el método de fondo de amortización.

Datos
C= $680 000
S = $ 0.00
n = 8 años
T = 10% anual

a) Véase el cuadro 29.

DATOS		
C =	$680,000.00	
B =	$680,000.00	
n =	8	
T =	10%	10
i =	0.10	
S =	$0.00	
D =	$59,461.93	=(E12*E15)/(((1+E15)^E13)-1)

AÑO	Depósito	Interés ganado	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0					680,000
1	59,461.93	0	$59,461.93	$59,461.93	620,538
2	59,461.93	5,946	$65,408.13	$124,870.06	555,130
3	59,461.93	12,487	$71,948.94	$196,818.99	483,181
4	59,461.93	19,682	$79,143.83	$275,962.83	404,037
5	59,461.93	27,596	$87,058.21	$363,021.04	316,979
6	59,461.93	36,302	$95,764.04	$458,785.08	221,215
7	59,461.93	45,879	$105,340.44	$564,125.52	115,874
8	59,461.93	56,413	$115,874.48	$680,000.00	0
	475,695.46	**204,305**	**680,000**		

Cuadro 29. Depreciación por el método del fondo de amortización

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

CD6.36.
La fábrica de ropa Keep Calm compró maquinas de coser con valor de $3 769 432 para sus talleres y estima una vida útil para este equipo de 10 años. Al cumplir estos años se espera venderlo en $90 000. Considerando una tasa para depreciación de 18% anual, determinar:
a) La base de depreciación.
b) El cargo anual por depreciación.
c) La depreciación acumulada.
d) El valor en libros después de 6 años de uso.

Datos
C = $3 769 432
S = $90 000
n = 10 años
T = 18% anual
i = 0.18

a) Base de depreciación:

$$B = C - S = 3\,769\,432 - 90\,000$$

$$B = \$3\,679\,432$$

b) El cargo anual por depreciación es:

$$D = \frac{B(i)}{(1+i)^n - 1}$$

$$D = \frac{(3\,679\,432)(0.18)}{(1+0.18)^{10} - 1} = \frac{662\,297.76}{5.233835554 - 1} = \frac{662\,297.76}{4.233835554}$$

$$D = \$\,156\,429.73$$

c) La depreciación acumulada al sexto periodo es:

$$D_A = 156\,429.73\left[\frac{(1.18)^5 - 1}{0.18}\right] = 156\,429.73\left[\frac{2.287757757 - 1}{0.18}\right] = 156\,429.73\left[\frac{1.287757757}{0.18}\right]$$

$$D_A = 156\,429.73\,(7.15420976) = \$\,1\,119\,131.10$$

d) El valor en libros después de seis años de uso:
Valor en libros = costo – depreciación acumulada

Valor en libros = 3 769 432 – 1119 131.10

Valor en libros = $2 650 300.90

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Se pueden comprobar los resultados de los incisos anteriores en el cuadro 6.30.

C =	$3,769,432.00
B =	$3,679,432.00
n =	10
T =	18.00%
i =	0.18
D =	$156,429.73
k =	5
D_6 =	1,119,131.11
S =	$90,000.00
Valor en libros en el quinto año	$2,650,300.89

$$D = \frac{B(i)}{(1+i)^{n}-1}$$

=(E13*E15)/(((1+E15)^E14)-1)

$$D_A = 156\,429.73\left[\frac{(1.18)^5-1}{0.18}\right]$$

AÑO	Depósito	Interés ganado	DEPRECIACIÓN ANUAL	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR EN LIBROS
0					3,769,432
1	156,429.73	0	$156,429.73	$156,429.73	3,613,002
5	156,429.73	146,853	$303,282.48	$1,119,131.11	2,650,301
6	156,429.73	201,444	$357,873.33	$1,477,004.45	2,292,428
7	156,429.73	265,861	$422,290.53	$1,899,294.98	1,870,137
8	156,429.73	341,873	$498,302.83	$2,397,597.81	1,371,834
9	156,429.73	431,568	$587,997.34	$2,985,595.14	783,837
10	156,429.73	537,407	$693,836.86	$3,679,432.00	90,000
	1,564,297	$2,115,134.68	$3,679,432.00		

Cuadro 30. Depreciación por el método del fondo de amortización

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

GLOSARIO

Acreedor. Persona o razón social a la que se debe pagar el dinero que nos han prestado.

Activo fijo. Son los bienes sujetos al desgaste.

Actividad financiera. Costumbre de pagar un rédito por el uso de dinero prestado.

Capital. En términos financieros es una determinada cantidad de dinero que permite ganar más (dinero) en operaciones de préstamo, llamada esta última, interés.

Compra. Acción de adquirir algo a cambio de dinero. Conjunto de bienes y servicios adquiridos en el acto de una compra.

Compra a crédito. Compra cuyo importe no se paga en efectivo en el momento de la adquisición, sino que la propia entidad vendedora o una tercera entidad concede crédito por la suma debida. En bolsa es la adquisición de acciones financiada a través de créditos por una autoridad bursátil.

Compra de contado. Compra cuyo importe se paga en el momento de la adquisición.

Compra a plazos. Contrato de compraventa en el cual el vendedor entrega el bien objeto de la transacción en el momento en que ésta se produce, y el comprador puede postergar sus pagos a futuras cuotas o plazos, pudiendo efectuar uno de estos pagos en el momento de la compra.

Comprador. Persona que adquiere un bien o derecho producto de una operación de compraventa.

Compra-venta. Contrato por el que uno de los contratantes (vendedor), se obliga a entregar una cosa determinada y el otro (comprador) a pagar por ella un precio determinado. Negocio de objetos que se revenden.

Contado. Procedimiento de cobro o pago que implica la entrega del bien o servicio con contrapartida monetaria en ese mismo momento.

Contrato. Negocio jurídico bilateral por el que dos o más personas físicas o jurídicas se obligan mutuamente a dar, hacer o no hacer algo, surgiendo entre ellas una relación obligatoria.

Costo. Precio pagado o solicitado para la adquisición de bienes y servicios.

Costo de adquisición. Es el resultado de la suma del precio de compra de una mercancía más los costos necesarios para poner dicha mercancía a disposición de la empresa (aranceles, impuestos, seguros, transporte, recepción, instalación, etcétera).

Crédito. Reputación, fama, prestigio que tiene una persona respecto al cumplimiento de sus obligaciones financieras.

Crédito a clientes. Cantidad que los clientes de una empresa le adeudan en función de los suministros que reciben.

Cuentas de inversión. También conocidas como cuentas de ahorro. En estas cuentas las personas pueden hacer depósitos y retiros del capital, en cualquier momento (con tan sólo solicitarlo) y los intereses son bajos.

Debe. Adeudar, estar en deuda con otra persona, estar obligado a cumplir una obligación o realizar un pago.

Demora. Retraso en el cumplimiento de una obligación de pago de una deuda, desde el momento en que ésta venció.

Depreciación. Desgaste, pérdida de valor o deterioro que sufre un activo fijo por su uso, el paso del tiempo o la aparición de activos más eficientes.

Depósito a plazo. Dinero depositado en una cuenta bancaria por una persona o razón social. Su retiro es en una fecha determinada, de común acuerdo por ambas partes.

Descuento en precios. Reducción en el precio de venta de un producto o servicio por motivos muy diversos: campañas de promoción, ferias, rebajas estaciónales, fidelidad del comprador, liquidación de existencias.

Descuento financiero. Operación financiera realizada por las entidades de crédito, consistente en abonar al prestatario el importe, con rebaja de intereses, de una letra de cambio u otro mercantil antes de la fecha de su vencimiento.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Derecho. Facultad de hacer o exigir todo aquello que la ley establece a favor de cada uno.

Descuento. Descuento concedido por la empresas a sus clientes por diversas causas: por pronto pago, por volumen de venta, etcétera.

Deuda. Obligación que se ha contraído con un tercero y que se ha de satisfacer. En general, es una obligación de pagar cierta cantidad de dinero.

Deudor. Persona o razón social que solicita dinero prestado y se compromete a pagarlo posteriormente, extendiendo para ello un pagaré.

Dinero. Todo aquello aceptado como medio de pago o medición del valor. Las monedas y billetes de circulación son la forma final adoptadas por las economías como dinero. Es la suma de moneda circulante.

Dinero circulante. Dinero en efectivo, es decir, tesorería que la empresa en un momento determinado tiene como consecuencia de su funcionamiento. Una gestión eficiente de tesorería que maximice su rentabilidad evitando fondos ociosos, incrementará el valor de la empresa

Dinero de plástico. Tarjetas (de crédito, débito, de prepago, etcétera) que se utilizan como medio de pago sustituyendo el dinero.

Dinero en circulación. Suma de efectivo en manos del público compuesto de billetes y monedas metálicas de curso legal más los depósitos de todo tipo en el sistema bancario.

Empeñar. Entregar algo en prenda como garantía del pago de una deuda.

Factura. Documento o recibo entregado por el vendedor al comprador como prueba de que éste ha adquirido una mercancía determinada o recibo de un servicio a un precio dado, y que representa, por tanto, el derecho de cobro a favor del vendedor. En la factura se especifican datos personales de ambos, las características de los productos, así como la fecha y el precio de compra.

Moneda en circulación. Monedas constantes y sonantes (aleaciones de metales). A los billetes se les llama papel moneda.

Operación. Registro de una entrada o salida de dinero de un depósito bancario.

Rédito. Renta de un capital.

Saldo. Diferencia existente en un momento dado entre el debe y el haber en una cuenta corriente.

Tiempo. Número de periodos (tiempo predeterminado) que dura el préstamo de un capital.

Valor. Grado de utilidad proporcionada por un bien o servicio para la satisfacción de las necesidades.

Valor amortizable. Monto de los elementos de activo fijo que se considera a la hora de determinar las cuotas de amortización de que es necesario dotar a cada ejercicio económico y por lo general con el costo de adquisición.

Valor contable. Monto que figura para un activo en los libros contables.

Valor de costo. Expresión que, de acuerdo con el contexto en que se encuentre, se utiliza para indicar la idea de costo de adquisición.

Valor de liquidación. Monto que se obtendría por un determinado activo de una empresa en el supuesto que éste se vendiese.

Valor de reposición. Precio de mercado que habría que pagar para sustituir determinado bien por otro de iguales características.

Vida útil. Estimación del tiempo lógico que se espera pueda estar en funcionamiento un elemento del inmovilizado tanto material como inmaterial.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

7.1
Flujo de caja del proyecto

	Años					
	0	1	2	3	4	5
Ingresos		24,500.00	31,000.00	40,000.00	43,000.00	130,000.00
Ventas		24,500.00	31,000.00	40,000.00	43,000.00	55,000.00
Valor de salvamento						75,000.00
Egresos	140,000.00	11,000.00	12,500.00	15,000.00	17,000.00	20,000.00
Inv. Inicial	140,000.00					
Costos de operación		11,000.00	12,500.00	15,000.00	17,000.00	20,000.00
Flujo de caja neto	-140,000.00	13,000.00	18,000.00	25,000.00	26,000.00	110,000.00

VAN =	12,984.00
TIR =	8%

Debe invertir, ya que tiene un VAN positivo y una tasa de rendimiento del 8% superior a la del mercado.

7.2
Respuesta: No. VAN= -$25,635.14. TIR =1.23%

7.3
Respuesta: Si. VAN=$143,312.84. TIR=15.22%

7.4
Respuesta: No. VAN= - $12,253.26. TIR = 8.48%.

7.5
Respuesta: Si. VAN=$188,185.36. TIR= 13.42%.

7.6
Respuesta: Si. VAN=$3,755.35. TIR= 6.57%.

7.7
Respuesta: No. VAN= - $16,453.37. TIR= 0.21%.

7.8
Respuesta: Si. VAN=$53,352.07. TIR=8.32%.

7.9
Respuesta: VAN = 18,691.07 dólares TIR = 6.49 %

7.10
Respuesta: VAN = 89,812.39 libras TIR = 35.23%

7.11
Solución.
VAN = 90,826.88 libras TIR = 42.73%

Respuestas a problemas reto

Reto 1
Sí. Tiene un valor actual de: $24,998.00

Reto 2
Sí. Tiene un valor actual de: $410,739.00

Reto 3
VA: -$3,385 dólares canadienses TR: 2.58%

Reto 4
VA: -$2,432 dólares canadienses TR: 2.97%

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

8.1
4.56%

8.2
6.16%

8.3
5.26%

8.4
35.48%

8.5
19.68%

8.6
13.08%

8.7
11.6%

8.8
6.77%

8.9
12.43%

8.10
3.71%

8.11
8.64%

8.12
$380.23. Recibe: $38,023,000

8.13
$925.37

8.14
$173.19. La empresa recibe: $1,731,900

8.15
$1,958.65

8.16
$833.76

8.17
$1,591.93

Respuestas a problemas reto

Reto 1
Rendimiento: 24%

Reto 2
Rendimiento: 5.9%

Reto 3
Rendimiento: 3%

Reto 4
Precio: $891.51

Reto 5
Precio: $990.99

recursos académicos en línea GEP

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Eva S. Hernández Gress / Guillermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

[T1] Algoritmo dual simplex

Con la finalidad saber cómo se aplica el *algoritmo dual simplex*, se propone mencionar y describir su procedimiento en los pasos siguientes.

[T2]Paso 1: Convertir el modelo típico de maximización si este está en típico modelo de minimización

Cabe señalar que esto solo es una recomendación y no es necesario hacerlo.

[T2]Paso 2: Convertir las desigualdades del tipo ≥ en desigualdades del tipo ≤ multiplicando por -1

[T2]Paso 3: Expresar el modelo de programación lineal en la forma estándar introduciendo variables de holgura

Obtenerla solución inicial básica (no factible) y expresar esta información en la tabla simplex.

[T2]Paso 4: Condición de optimalidad. Probar la naturaleza de los elementos $c_j - z_j$

• **Caso (i):** Si todos los $c_j - z_j \leq 0$ y todas las $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$, entonces la solución actual es una solución básica factible óptima.

• **Caso (ii):** Si todos los $c_j - z_j \leq 0$ y al menos una $x_{B_i} < 0$, entonces la solución actual no es una solución básica factible óptima. Ir al paso 5.

• **Caso (iii):** Si cualquier $c_j - z_j > 0$, entonces el algoritmo falla.

[T2]Paso 5: Condiciones de factibilidad

(i) Variable saliente. La variable saliente es la variable correspondiente al valor más grande negativo de x_{B_i} . Sea x_k la variable saliente.

(ii) Variable entrante. Calcular el cociente entre el renglón $(c_j - z_j)$ y el renglón de la variable saliente; es decir, $\theta = mín\left\{\left|\frac{c_j - z_j}{\hat{a}_{ik}}\right|, a_{ik} < 0\right\}$.

Considerar los cocientes solo con denominadores negativos. La variable entrante es la variable no básica correspondiente al cociente mínimo de θ . Si no hay tal cociente con denominador negativo, entonces el modelo tiene solución no factible. Es decir, el modelo es infactible.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[T2]Paso 6: Aplicar operaciones elementales por renglón como en el algoritmo simplex primal

Repetir el procedimiento hasta que la solución factible sea óptima, o bien haya una indicación de que no existe una solución factible

Referencias

http://books.google.com.mx/books?id=mNUjTXLuBS4C&pg=PP112&dq=dual+simplex+-method&hl=es&sa=X&ei=bwH1UYvvMIqo9gTjh4CIAg&ved=0CHQQ6AEwCQ#v=onepage&q=dual%20simplex%20method&f=false(modificado por el autor según la literatura).

recursos académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Algoritmo de la gran M [T1]

Para tener una idea de cómo se aplica este algoritmo, se propone describirlo como se hace a continuación.

[T2]Paso 0: Diseño y construcción del MPLC

En este paso se aplica el procedimiento de modelación.

[T2]Paso 1: Estandarización del MPLC

Como se asume que el MPLC tiene la forma (19), (20) o (21), para llevar a cabo la estandarización del modelo, entonces se requiere agregar variables de holgura (en restricciones del tipo ≤), variables de excedencia (en restricciones del tipo ≥) y variables artificiales (en restricciones del tipo = y ≥). Una idea acerca delo mencionado antes, aplicado a los modelos (19), (20) y (21), está indicada en los modelos (22), (23) y (24), respectivamente.

$$
\begin{aligned}
&\textit{Máx}\ \mathbf{Z} = \mathbf{c}^t\mathbf{x} + \mathbf{0t} + \mathbf{0s} + \ldots \\
&\mathbf{s.a} \\
&\mathbf{A}_1\mathbf{x} - \mathbf{It} + \mathbf{IR}_1 = \mathbf{b}_1 \\
&\mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{Is} = \mathbf{b}_2 \\
&\mathbf{A}_3\mathbf{x} + \mathbf{IR}_2 = \mathbf{b}_3 \\
&\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{R}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
\qquad (22)
$$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Mín}\ \mathbf{Z} = \mathbf{c}^t\mathbf{y} + \mathbf{0t} + \mathbf{0s} + \ldots \\
&\mathbf{s.a} \\
&\mathbf{A}_1\mathbf{y} - \mathbf{It} + \mathbf{IR}_1 = \mathbf{b}_1 \\
&\mathbf{A}_2\mathbf{y} + \mathbf{Is} = \mathbf{b}_2 \\
&\mathbf{A}_3\mathbf{y} + \mathbf{IR}_2 = \mathbf{b}_3 \\
&\mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{R}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
\qquad (23)
$$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Mín}\ \mathbf{Z} = \mathbf{c}^t\mathbf{y} + \mathbf{0t} + \ldots \\
&\mathbf{s.a} \\
&\mathbf{Ay} - \mathbf{It} + \mathbf{IR} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{R} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
\qquad (24)
$$

Por lo que respecta a la función a optimizar para el **método de la gran M,** se requiere penalizar a la función objetivo. Esto es, si la función objetivo del MPLC es caso de mínimo, entonces se debe obligar a que el valor de la función objetivo inicie con un valor mucho muy grande positivo; es decirse debe dar la oportunidad que al aplicar la metodología simplex pueda lograr alcanzar su valor más pequeño posible, desde luego cumpliendo en todos los casos con las restricciones dadas. En caso contrario, si la función objetivo del MPLC es caso de máximos, entonces se debe obligar a que el valor de la función objetivo inicie con un valor negativo muy grande; es decir, le damos la oportunidad que al aplicar la metodología simplex pueda lograr alcanzar su valor más grande posible, desde luego cumpliendo en todos los casos con las restricciones dadas. Por lo que la mencionada penalización se hace con base en el criterio siguiente:

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

• Caso mínimos: $+M\mathbf{R}$; con $M >>> 0$ (M un valor mucho muy grande positivo).
• Caso máximos: $-M\mathbf{R}$; con $M >>> 0$ (M un valor mucho muy grande positivo).

De este modo, la penalización para el caso de los modelos (4), (5) y (6), quedarían expresados según los modelos (7), (8) y (9), respectivamente.

$$
\begin{aligned}
&Máx\ \mathbf{Z} = \mathbf{c}^t\mathbf{x} + \mathbf{0t} + \mathbf{0s} - M\mathbf{R}_1 - M\mathbf{R}_2 \\
&\mathbf{s.a} \\
&\mathbf{A}_1\mathbf{x} - \mathbf{It} + \mathbf{IR}_1 = \mathbf{b}_1 \\
&\mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{Is} = \mathbf{b}_2 \\
&\mathbf{A}_3\mathbf{x} + \mathbf{IR}_2 = \mathbf{b}_3 \\
&\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{R}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \quad M >>> 0
\end{aligned}
\qquad (25)
$$

$$
\begin{aligned}
&Mín\ \mathbf{Z} = \mathbf{c}^t\mathbf{y} + \mathbf{0t} + \mathbf{0s} + M\mathbf{R}_1 + M\mathbf{R}_2 \\
&\mathbf{s.a} \\
&\mathbf{A}_1\mathbf{y} - \mathbf{It} + \mathbf{IR}_1 = \mathbf{b}_1 \\
&\mathbf{A}_2\mathbf{y} + \mathbf{Is} = \mathbf{b}_2 \\
&\mathbf{A}_3\mathbf{y} + \mathbf{IR}_2 = \mathbf{b}_3 \\
&\mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{R}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \quad M >>> 0
\end{aligned}
\qquad (26)
$$

$$
\begin{aligned}
&Mín\ \mathbf{Z} = \mathbf{c}^t\mathbf{y} + \mathbf{0t} + M\mathbf{R} \\
&\mathbf{s.a} \\
&\mathbf{Ay} - \mathbf{It} + \mathbf{IR} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{R} \geq \mathbf{0} \quad M >>> 0
\end{aligned}
\qquad (27)
$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Eva S. Hernández Gress / Guillermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

[T2]Paso 2: Hallar una SIBF

Una vez que se ha estandarizado el MPLC, se requiere escribir el modelo con cada una de sus restricciones en forma de igualdad (hiperplanos) y de esta forma obtener una SIBF de manera muy simple, como se aplica para el caso de los modelo (25), (26) y (27).

[T2]Paso 3: Tabla simplex inicial

Este paso tiene como finalidad usar los coeficientes del MPLC estandarizado y presentarlos en un arreglo tabular (aunque no sea necesario), conocido como tabla simplex inicial. Por ejemplo, si tuviéramos el modelo estandarizado como el (27), entonces su tabla simplex inicial quedaría representada como se muestra en la tabla 1.

[ENTRA TABLA 1]
Tabla 1

C_j		$C_N^t 0$	C_B^t		
C_B	VB	Yt	R	LD	θ
C_B	R	A- I	I	b	
$C_j - Z_j$	Z	$(C_N^t - C_B A)$ $(0 + C_B I)$	$(C_B^t - C_B I)$	$C_B b$	

[TERMINA TABLA 1]

[T2]Paso 4: Prueba de optimalidad

Aquí se trata de investigar si se cumple con el criterio de optimalidad, considerando de antemano que si la función a optimizar es de:

• Mínimos, el criterio de optimalidad consiste en que se verifique: $c_j - z_j = c_j - \mathbf{C}_B^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{p}_j \geq 0$, $\forall\ j \in VNB$ (variables no básicas).
• Máximos, el criterio de optimalidad consiste en que se verifique: $c_j - z_j = c_j - \mathbf{C}_B^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{p}_j \leq 0$, $\forall\ j \in VNB$ (variables no básicas).

Si se cumple con el criterio de optimalidad, entonces termina la aplicación del algoritmo y se concluye diciendo que la solución básica factible hallada es óptima. En otro caso, ir al paso 5.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[T2]Paso 5: Variable entrante

Como se describió en la metodología simplex, si se trata de una función objetivo de máximos, se elige el $c_j - z_j >>> 0$, es decir el valor más grade positivo de las variables no básicas. Ahora bien, si la función objetivo es caso de mínimos, se elige el $c_j - z_j <<< 0$, esto es, el valor más grande negativo de las variables no básicas.

[T2]Paso 6: Variable saliente

De igual forma, como se describió en el algoritmo simplex, la variable saliente se elige con base en la aplicación de la regla del mínimo cociente, es decir:

$$\theta_r = mín\left\{\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}},\ con\ \hat{b}_i \geq 0,\ \hat{a}_{ij} > 0\right\}$$

Si se usa el arreglo tabular, se colocan los valores de los cocientes en la columna θ , como se describió en el algoritmo simplex.

[T2]Paso 7: Pivotear

Detectado el divisor que aportó el mínimo cociente (pivote), que es el elemento que se intercepta con la columna de la variable entrante y el reglón de la variable saliente,sieste no tiene valor unitario, entonces se aplica la operación elemental por reglón $M_i(\frac{1}{c}),\ c \neq 0$, donde es el divisor que aporta el mínimo cociente.
Posteriormente, se aplican operaciones elementales por renglón $A_{ij}(d),\ d \neq 0$, con la finalidad de generar ceros por arriba y por debajo del elemento pivote, con el objetivo de hallar la nueva solución básica factible o el nuevo punto extremo.
Recuérdese que si hay variable entrante, pero no hay variable saliente, se tiene que concluir que el **modelo es no acotado**, como se estudió en los casos de algoritmo simplex.

[T2]Paso 8: Regresar al paso 4

Invariablemente, cada vez que se concluye el paso 7, se debe regresar al paso 4.

[T2]Paso 9: Generar la solución óptima ($\mathbf{x}_B^*$) y el valor óptimo de la función objetivo (Z^*)

Sabiendo de antemano que se ha cumplido con el criterio de optimalidad, se puede proporcionar la solución óptima y el valor de la función objetivo, de acuerdo con lo que se estudió en el método simplex. Es decir, tenemos como salida a $\mathbf{x}_B^*$ y $\mathbf{z}^*$, si es caso máximo o $\mathbf{y}_B^*$ y $\mathbf{w}^*$, si es caso mínimo.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[T2]Referencias

http://books.google.com.mx/books?id=UAljILBeoQgC&pg=PA47&dq=big+m+method&hl=es&-sa=X&ei=KKfxUdr2FYj29gS8nYGADQ&sqi=2&ved=0CC0Q6AEwAA#v=onepage&q=big%20m%20method&f=false

recursos · académicos · en · línea · GEP

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

[T1] Algoritmo del método de las dos fases

Para tener una idea de cómo se aplica este método, el algoritmo se describe en los pasos siguientes.

[T2]Paso 0: Diseño y construcción del MPLC

En este paso se aplica el procedimiento y la metodología de modelación que, se asume, se estudiaron con anterioridad, y cuya finalidad es obtener como producto el MPLC. Cabe señalar que el modelo que se obtiene puede tener cualquier forma de representación, como:

$$\begin{aligned} &Máx\ \mathbf{Z} = \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ &\mathbf{s.a} \\ &\mathbf{A}_1\mathbf{x} \geq \mathbf{b}_1 \\ &\mathbf{A}_2\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_2 \\ &\mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3 \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1) \qquad \begin{aligned} &Mín\ \mathbf{Z} = \mathbf{c}^t\mathbf{y} \\ &\mathbf{s.a} \\ &\mathbf{A}_1\mathbf{y} \geq \mathbf{b}_1 \\ &\mathbf{A}_2\mathbf{y} \leq \mathbf{b}_2 \\ &\mathbf{A}_3\mathbf{y} = \mathbf{b}_3 \\ &\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2) \qquad \begin{aligned} &Mín\ \mathbf{Z} = \mathbf{c}^t\mathbf{y} \\ &\mathbf{s.a} \\ &\mathbf{Ay} \geq \mathbf{b} \\ &\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3)$$

[T2]Paso 1: Estandarizar el modelo de fase I

La estandarización del modelo de fase I consiste en agregar variables de holgura (en restricciones del tipo $\leq$), variables de excedencia (en restricciones del tipo $\geq$) o variables artificiales (en restricciones del tipo =), con la finalidad de escribir el modelo con cada una de sus restricciones en forma de igualdad (hiperplanos). La función objetivo de fase I, como se mencionó arriba, siempre es caso de mínimos, expresada como la suma de todas las variables artificiales que contenga dicho modelo de fase I;esdecir:

$$\begin{aligned} &Mín\ \mathbf{r} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \ldots \\ &\mathbf{s.a} \\ &\mathbf{A}_1\mathbf{x} - \mathbf{It} + \mathbf{IR}_1 = \mathbf{b}_1 \\ &\mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{Is} = \mathbf{b}_2 \\ &\mathbf{A}_3\mathbf{x} + \mathbf{IR}_2 = \mathbf{b}_3 \\ &\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{R}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (28) \qquad \begin{aligned} &Mín\ \mathbf{r} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \ldots \\ &\mathbf{s.a} \\ &\mathbf{A}_1\mathbf{y} - \mathbf{It} + \mathbf{IR}_1 = \mathbf{b}_1 \\ &\mathbf{A}_2\mathbf{y} + \mathbf{Is} = \mathbf{b}_2 \\ &\mathbf{A}_3\mathbf{y} + \mathbf{IR}_2 = \mathbf{b}_3 \\ &\mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{R}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (29)$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$\begin{aligned} &Mín\ \mathbf{r} = \mathbf{R} + \ldots \\ &\mathbf{s.a} \\ &\mathbf{Ay} - \mathbf{It} + \mathbf{IR} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{R} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (30)$$

[T2]Paso 2: Hallar una SIBF

Una vez que se ha estandarizado el MPLC, se requiere escribir el modelo con cada una de sus restricciones en forma de igualdad (hiperplanos) y de esta forma obtener una SIBF de manera muy simple, como se aplica para el caso de los modelo (28), (29) o (30).

[T2]Paso 3: Tabla simplex inicial del modelo de fase I

Este paso tiene como finalidad usar los coeficientes del modelo estandarizado de fase I y presentarlos en un arreglo tabular (que no es necesario), conocido como tabla simplex inicial. Por ejemplo, si tuviéramos un modelo estandarizado como el modelo (6), su tabla simplex inicial quedaría representada como se muestra enla tabla 1.

[ENTRA TABLA 1]
Tabla 1

C_j		$C_N^t 0$	C_B^t		
C_B	VB	Yt	R	LD	θ
C_B	R	A - I	I	b	
$C_j - r_j$	r	$(C_N^t - C_BA)$ $(0 + C_BI)$	$(C_B^t - C_BI)$	C_Bb	

[TERMINA TABLA 1]

[T2]Paso 4: Prueba de optimalidad

De lo que se trata aquí es de investigar si se cumple con el criterio de optimalidad; en otras palabras, verificar que:

$c_j - r_j = c_j - \mathbf{C}_B^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{p}_j \geq 0$, $\forall\ j \in VNB$. (Recuérdese que la función a optimizar de fase I es caso mínimo). Si se cumple, entonces se debe parar; pues, en este caso, la solución básica factible hallada es óptima. En caso contrario, ir al paso 5.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[T2]Paso 5: Variable entrante

Como se describió en el algoritmo simplex, si la función a optimizar es de mínimos, se elige la variable entrante con el $(c_j - r_j)$ más grande negativo para todo j de las variables no básicas. Es decir, $(c_j - r_j) <<< 0$ y $\forall\ j \in VNB$. Cabe señalar que $(c_j - r_j) <<< 0$ es denominado indicador (ya sea para caso mínimos o para caso máximos).

[T2]Paso 6: Variable saliente

Igual al paso 6 del algoritmo de la gran M.

[T2]Paso 7: Pivotear

Igual al paso 7 del algoritmo de la gran M.

[T2]Paso 8: Regresar al paso 4

Cada vez que se termine el paso 7, invariablemente se debe regresar al paso 4. Recuérdese que aunque se cumpla el criterio de optimalidad, si el valor óptimo de la función objetivo es distinta de cero (r ≠ 0), entonces el modelo de fase I es infactible y también el MPLC original lo será; es decir, el conjunto intersección es el conjunto vacío. Debido a esto no es posible aplicar la fase II, por lo que se concluiría diciendo: “El MPLC original es infactible”. En otro caso, ir al paso 4.

[T2]Paso 9: Generar la solución óptima ($\mathbf{x}_B^*$) y el valor óptimo de la función a optimizar (Z^*)

Igual al paso 9 del algoritmo de la gran M.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Algoritmo del método simplex [T1]

[T2]Paso 1: Modelación del problema

Dado el enunciado de un problema de programación lineal, se realiza la modelación de este y se asume que dicho modelo tiene la forma canónica caso de máximos.

[T2]Paso 2: Estandarización del modelo

Por este paso se trata de expresar el MPLC en forma estándar caso máximos; para lograrlo, solo basta con agregar una variable de holgura distinta en cada una de las restricciones del tipo ≤. Para no afectar la función objetivo, los respectivos coeficientes de estas variables en dicha función son cero.

[T2]Paso 3: Determinación de una SIBF

Aquí seasume que el MPLC en su forma estándar tiene m restricciones y n variables, así que para hallar una SIBF basta con hacer (n–m) iguales a cero. Por lo que se tendrán (n–m) variables no básicas y m variables básicas.

[T2]Paso 4: Presentación de la SIBF en un tabla simplex inicial

Una vez que se ha determinado la SIBF, se procede a representar dicha solución en un arreglo tabular, según la forma de Tucker, que podría ser como se presenta en la tabla 1.

Tabla 1 Arreglo tabular de Tucker

C_j		C_N^t	C_B^t	LD
C_B	VB	N	B	X_B
$C_j - Z_j$	Z	$C_j - Z_j$	$C_j - Z_j$	$C_B^t X_B = Z^*$

Donde:

$\mathbf{c_B^t}$: Sub-matriz transpuesta de coeficientes de variables básicas en función a optimizar.
$\mathbf{c_N^t}$: Sub-matriz transpuesta de coeficientes de variables no básicas en función a optimizar.
$\mathbf{B}$: Sub-matriz de coeficientes de variables básicas.
$\mathbf{N}$: Sub-matriz de coeficientes de variables no básicas, siendo de orden.
$\mathbf{VB}$: Matriz de variables básicas.
$\mathbf{x_B}$: Sub-matriz de solución (LD) de variables básicas.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[T2]Paso 5: Revisión del criterio de optimalidad

Dado que el MPLC es de caso máximo, entonces el criterio de optimalidad consiste en que se cumpla:

$$(c_j - z_j) = c_j - \mathbf{c_B^t B^{-1} p_j} \leq 0 \quad \forall \ j \in VNB$$

Si se cumple el criterio de optimalidad, entonces se concluye afirmando que se llegó a la solución óptima (punto factible óptimo), la cual aparece en la columna de LD ($\mathbf{x_B}$). Y para el valor óptimo de la función a optimizar, es el que aparece en $C_B{}^t X_B$; que es Z^*. En caso de no cumplirse, se debe seguir al paso 6.

[T2]Paso 6: Elegir la variable entrante

Este paso se aplica solo debido a que no se cumplió el criterio de optimalidad; es decir, debe existir al menos un $c_j - z_j > 0 \quad \forall \ j \in VNB$. Suponiendo que haya más de un elemento $c_j - z_j > 0$, entonces la variable x_j entrante se elige con aquel $c_j - z_j >>> 0$; es decir, aquella x_j entrante que proporcione el valor más grande positivo. Suponga que esa variable x_j entrante ocurrió en la variable $x_e = x_k$.

[T2]Paso 7: Revisión de criterio de factibilidad (variable saliente)

La variable que sale del conjunto de variables básicas se obtiene aplicando el *criterio de la razón o regla del mínimo cociente:*

$$\theta_r = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\hat{a}_{ik}}; \ \hat{a}_{ik} > 0 \right.$$

Donde:

$\bar{b}_i$: i-ésimo LD de la actualización de $\bar{\mathbf{b}}$.

$\hat{a}_{ik}$: i-ésimo componente de la columna $\hat{\mathbf{p}}_k$.

[T2]Paso 8: Definir el pivote y pivotear

El pivote es el elemento que se encuentra en la intersección de la columna de la variable entrante y el reglón de la variable saliente. Pivotear consiste en transformar en la unidad al pivote, para luego generar ceros por arriba y por abajo del elemento pivote (excepto en el renglón Z).

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[T2]Paso 9: Actualizar la columna de variables básicas y la de coeficientes básicos

Una vez que se sabe qué variable entró y qué variable salió, se procede a realizar la actualización mediante el criterio siguiente: colocar la variable entrante en el lugar de la variable saliente.

Enseguida, se lleva a cabo la actualización de los coeficientes básicos, aplicando este criterio: buscar el coeficiente de la variable entrante, según como se tiene en el modelo estandarizado.

[T2]Paso 10: Regresar al paso 5

Una vez que se aplicó el paso 9, se regresa al paso 5.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Anexo A

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD [T1]

Antes de iniciar con el estudio del análisis de sensibilidad, primero es necesario que el lector esté familiarizado con al menos uno de los algoritmos siguientes: simplex, gran M, dos fases y dual simplex.

En la secciones dedicadas al estudiado de los algoritmos mencionados, se hizo mención, en el principio de certidumbre, que todos los coeficientes o parámetros (función a optimizar, matriz de coeficientes tecnológicos y lados derechos) que influyen en cada modelo son constantes.

Además, en estas mismas secciones se enfatizó en el hecho de que en la práctica es común que algunos parámetros de la matriz de coeficientes tecnológicos, de lados derechos o de la función a optimizar sean estimaciones de parámetros desconocidos, sin embargo se les incluye en el problema como si fueran los valores reales de los parámetros. De este modo, el modelo se resuelve a través de la aplicación de alguno de los algoritmos mencionados. No obstante, como estos parámetros solo se consideran estimaciones, se requiere llevar a cabo un análisis acerca de cómo se afectaría la solución obtenida, si estos parámetros tuvieran valores distintos a los considerados. Cuando se lleva a cabo esto, precisamente se le conoce como análisis de sensibilidad.

Así, el análisis de sensibilidad en la programación lineal continua se relaciona con la cuantificación de los efectos en la solución óptima, debido a los cambios en algunos parámetros del modelo de programación lineal continua (MPLC).

Así, al llevar a cabo este análisis de sensibilidad, es posible responder preguntas como:

1. ¿Cómo afecta a la solución óptima y al valor óptimo de la función a optimizar, un cambio en uno de los coeficientes de la función a optimizar?

2. ¿Cómo afecta a la solución óptima y al valor óptimo de la función a optimizar, un cambio en el valor del lado derecho de una restricción?

3. ¿Cómo afecta a la solución óptima y al valor óptimo de la función a optimizar, que se agregue una nueva variable de decisión al modelo?

4. ¿Cómo afecta a la solución óptima y al valor óptimo de la función a optimizar, que se agregue una nueva restricción al modelo?

5. ¿Cómo afecta a la solución óptima y al valor óptimo de la función a optimizar, cuando se cambia algún coeficiente en una columna de la matriz de coeficientes tecnológicos?

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación, se presenta una interpretación geométrica (en el plano cartesiano) para cada pregunta:

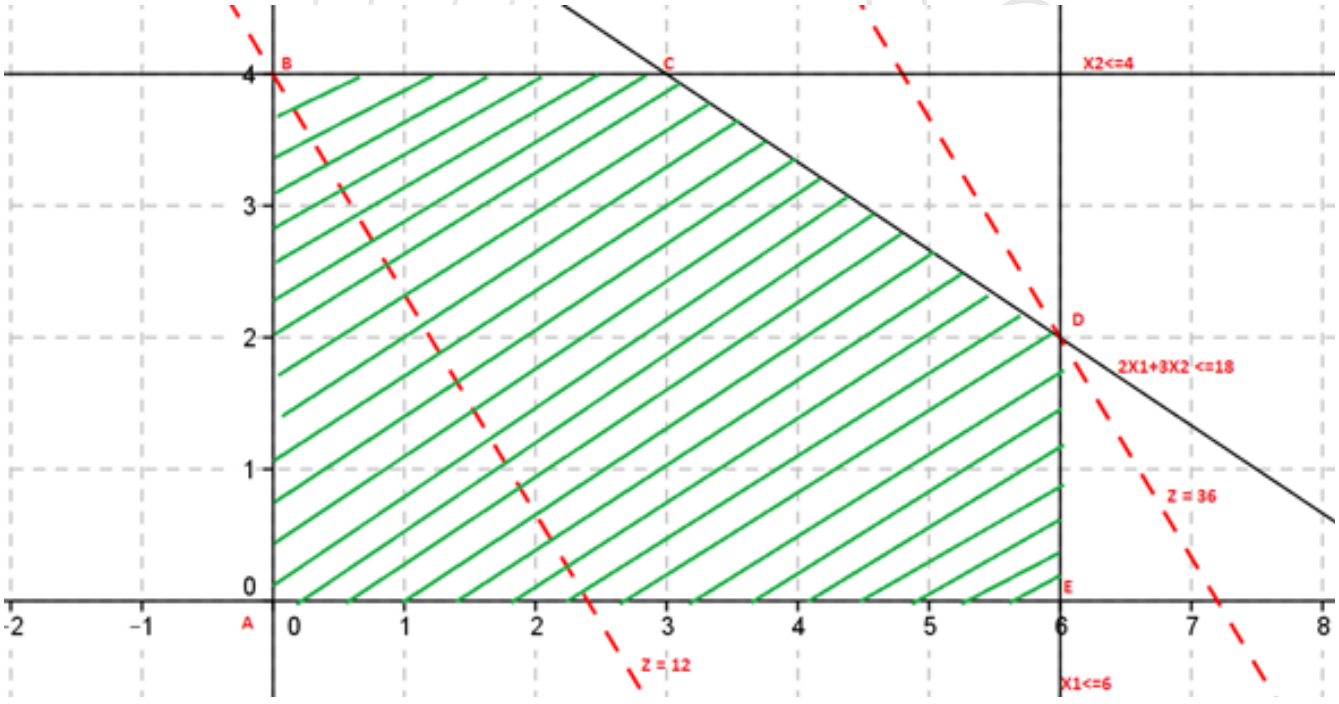
Cambio en un coeficiente de función a optimizar [T2]

Supóngase que se tiene el MPLC siguiente:

$$Max\ z = 5x_1 + 3x_2$$
$$s.a$$
$$x_1 \leq 6 \qquad \text{con} \quad x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_2 \leq 4$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 18$$

Por tanto, el conjunto poliédrico asociado a este modelo es el que está achurado con línea en color verde, cuya figura geométrica es un trapecio (véase figura A.1). Cabe señalar que las rectas de la función a optimizar son las que están en línea discontinua en color rojo.

[ENTRA FIGURA A.1]



[ENTRA PIE DE FIGURA A.1]

Figura A.1

[TERMINA FIGURA A.1]

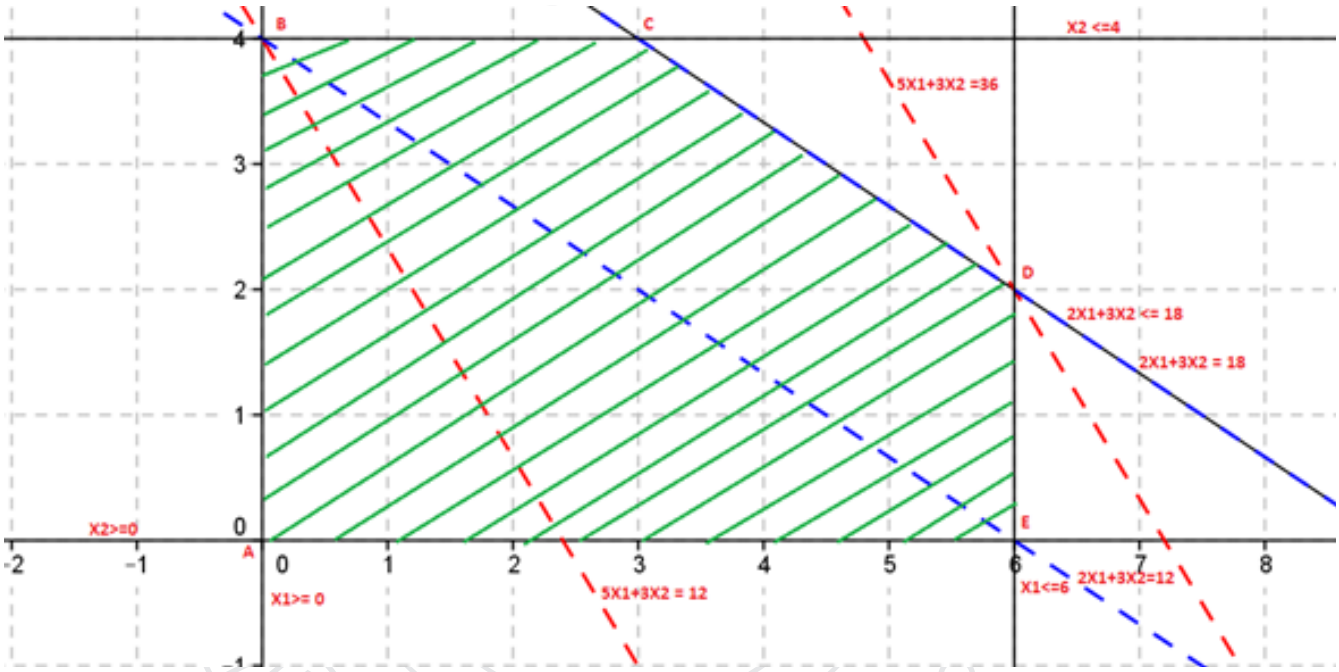
D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Ahora, supóngase que cambia el coeficiente de la variable X_1 en la función a optimizar, y cambia de 5 a 3. Así, la función a optimizar queda:

$$Max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

Con base en lo anterior, la recta de la función a optimizar se ve como en la figura A.2.

[ENTRA FIGURA A.2]



[ENTRA PIE FIGURA A.2]

Figura A.2

[TERMINA FIGURA A.2]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

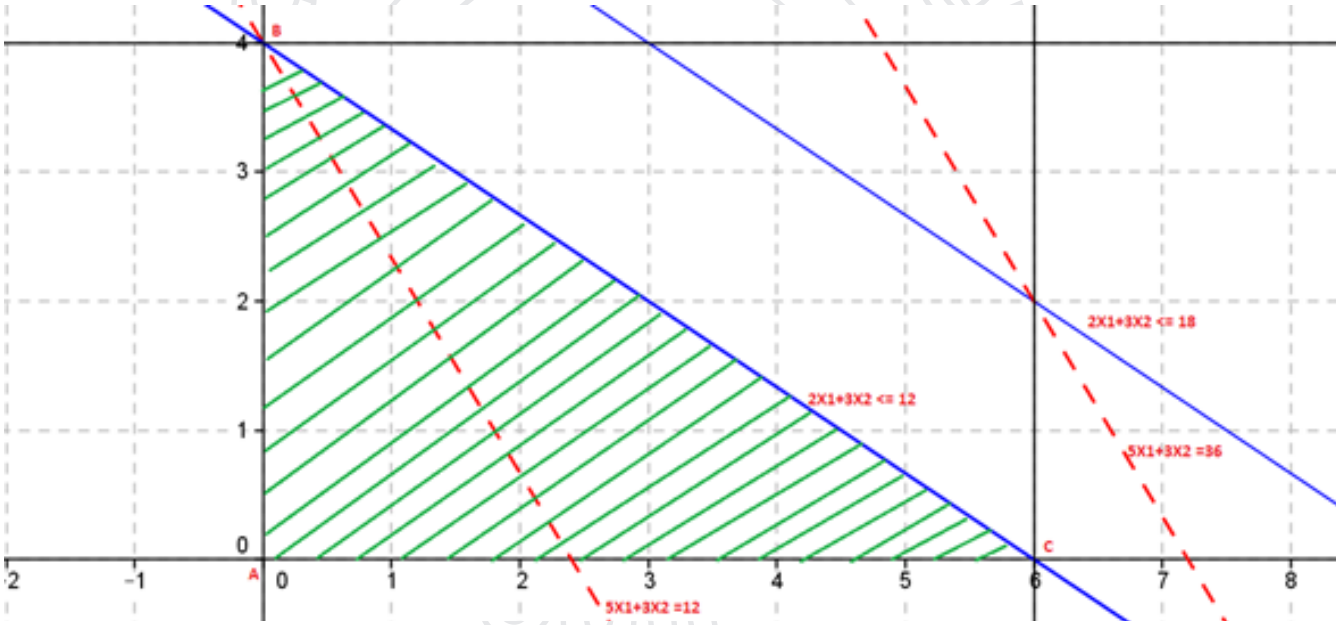
Como se puede observar en la figura, cuando se cambia a un coeficiente de la función a optimizar, la pendiente también cambia, tal como se muestra arriba, donde la nueva recta con línea discontinua está en color azul, mientras que la que está en color rojo es la del modelo original.

Además, como se puede apreciar, con este cambio se presenta el caso de soluciones óptimas múltiples (puntos extremos *C* y *D*), mientras que con modelo original solo se tiene el punto extremo óptimo *D*. Por tanto, en términos generales, se puede mencionar que la solución óptima no cambia, pues solo cambia el valor óptimo de función a optimizar de 36 a 18.

Cambio en el LD de una restricción [T2]

A continuación, se continúa con el uso del modelo que se supuso antes, haciendo en la tercera restricción. De $2x_1 + 3x_2 \leq 18$ a $2x_1 + 3x_2 \leq 12$. Cuya gráfica se muestra en la figura A.3.

[ENTRA FIGURA A.3]



[ENTRA PIE DE FIGURA A.3]

Figura A.3

[TERMINA FIGURA A.3]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Como se observa en la gráfica de la figura, al reducir el valor del *LD* de la restricción ($2x_1 + 3x_2 \leq 12$), el área del conjunto poliédrico también se ve reducida; debido a esto, cambiará la solución óptima y, por ende, el valor óptimo de la función a optimizar. Sin embargo, cuando dicha restricción se mantiene sin cambios el área del conjunto poliédrico también lo hace ($2x_1 + 3x_2 \leq 18$).

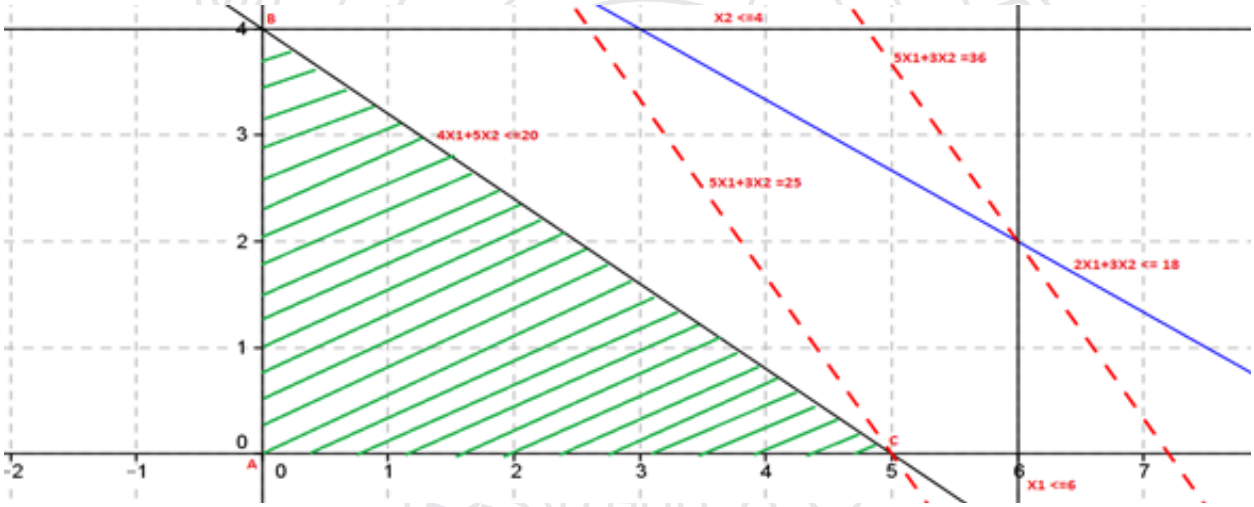
Agregar una nueva restricción al modelo[T2]

En este caso, se asume que al modelo original se le agregará una nueva restricción:

$4x_1 + 5x_2 \leq 20$

Para responder a cada una de estas preguntas, se hace en cada uno de los subtemas que se desarrollan a continuación.

[ENTRA FIGURA A.4]



[ENTRA PIE DE FIGURA A.4]

Figura A.4

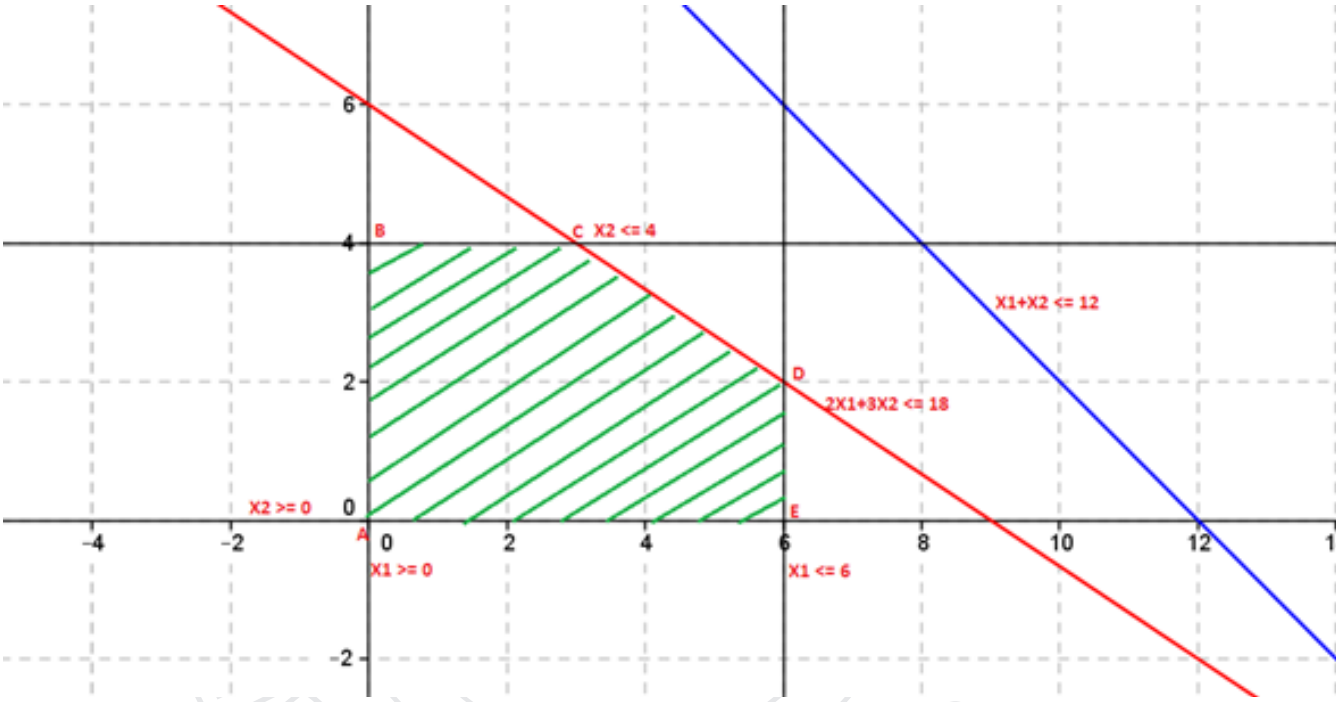
[ENTRA FIGURA A.4]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Como se observa, en este caso (véase figura B.4) el área del conjunto poliédrico se ve reducida, motivo por el cual cambiarán tanto la solución como el valor de la función a optimizar.

Cabe señalar que puede tenerse otra situación: al modelo original se le agrega la nueva restricción: $x_1 + x_2 \leq 12$, cuya gráfica se muestra en la figura A.5.

[ENTRA FIGURA A.5]



[ENTRA PIE DE FIGURA A.5]

Figura A.5

[TERMINA FIGURA A.5]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Como se ve en la figura A.5, la nueva restricción no influye en modificar el área del conjunto poliédrico; por tanto, debido a que se agrega esta nueva restricción, no cambia la solución óptima ni el valor óptimo de la función a optimizar.

Cambio en algún coeficiente de la columna de coeficientes tecnológicos[T2]

Recuérdese que el MPLC original es:

$$Max\ z = 5x_1 + 3x_2$$
$$s.a$$
$$x_1 \le 6$$
$$x_2 \le 4$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 18$$
con $x_1, x_2 \ge 0$

Ahora, supóngase que se hace el cambio en la segunda columna de la matriz de coeficientes tecnológicos; esto es, la segunda columna original de dicha matriz es: $\mathbf{p}_2^t = (0\ 0\ 3)$ y la modificación de esta columna sería: $\mathbf{p}_2^{t'} = (0\ 0\ 2)$. Por consiguiente, el MPLC cambia a:

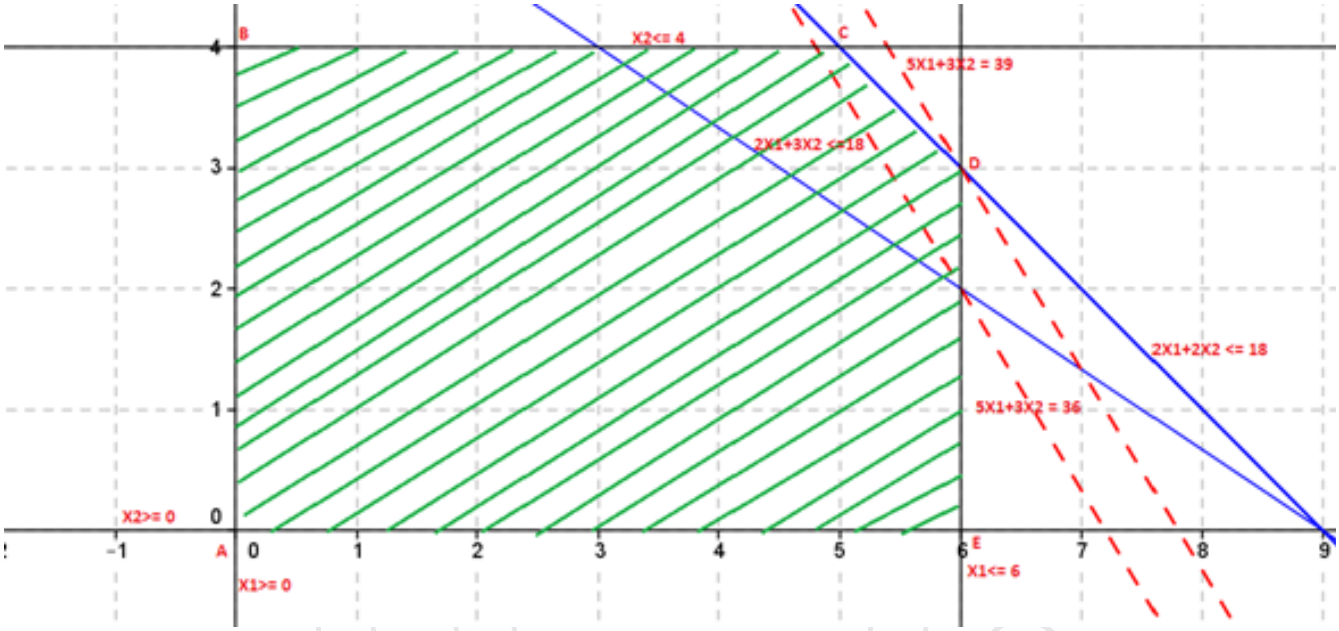
$$Max\ z = 5x_1 + 3x_2$$
$$s.a$$
$$x_1 \le 6$$
$$x_2 \le 4$$
$$2x_1 + 2x_2 \le 18$$
con $x_1, x_2 \ge 0$

De manera geométrica, la nueva área del conjunto poliédrico queda como se muestra en la figura A.6.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

De manera geométrica, la nueva área del conjunto poliédrico queda como se muestra en la figura A.6.

[ENTRA FIGURA A.6]



[ENTRA PIE DE FIGURA A.6]

Figura A.6

[TERMINA FIGURA A.6]

Como se puede observar en la figura A.6, al realizar la modificación en esa columna, el área del conjunto poliédrico crece y cambian la solución óptima y el valor óptimo de la función a optimizar.

En estos cuatro casos que se ha hecho énfasis en el aspecto gráfico, se puede mencionar que cuando se cambia algún parámetro del modelo, también pueden cambiar la solución óptima y el valor óptimo de la función a optimizar. Sin embargo, para un MPLC que contengan más de dos variables, no es tan fácil realizar la interpretación desde el punto de vista gráfico. Por lo que resulta indispensable llevar a cabo un análisis algebraico de los casos que se mencionan a continuación:

- **Caso 1:** Análisis de sensibilidad en un coeficiente de función a optimizar.

- **Caso 2:** Análisis de sensibilidad en un LD de una restricción.

- **Caso 3:** Análisis de sensibilidad cuando se agrega una nueva variable.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

• **Caso 4:** Análisis de sensibilidad cuando se agrega una nueva restricción.

• **Caso 5:** Análisis de sensibilidad cuando hay cambio en un coeficiente de una columna de la matriz de coeficientes tecnológicos.

A continuación se presenta el desarrollo algebraico que soporta el análisis de sensibilidad en un MPLC.

Análisis de sensibilidad en un coeficiente de la función a optimizar [T2]

Antes de iniciar el estudio de este subtema, es conveniente que el lector recurra a los conocimientos previos del algoritmo simplex y sus variantes, así como del algoritmo dual simplex. El análisis de sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo, consiste en analizar la repercusión que sobre la solución óptima tienen las variaciones de los parámetros C_j. Dado que como se revisó en la interpretación geométrica, este cambio hace que también se modifiqué la pendiente de la recta la función objetivo. Luego, si la modificación es suficientemente grande, la solución óptima puede pasar a ser otro punto extremo de la región factible (conjunto poliédrico). Por tanto, la modificación de los parámetros C_j puede afectar la optimalidad de la solución del modelo original, pero nunca influirá en la factibilidad de la misma.

El análisis de sensibilidad para la función objetivo consiste en conocer:

a) Los rangos en que pueden fluctuar los costos (utilidad) para las variables que tengan que modificar la base.

b) Cómo cambia la base fuera de esos rangos.

c) En cuanto se modifica la función objetivo.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Por el momento supóngase que se tiene el modelo de programación lineal de la forma:

$$\begin{aligned} &Max \;\; z = \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ &s.a. \qquad\qquad \text{con} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad (1) \\ &\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \end{aligned}$$

Además, asúmase que se ha encontrado su solución óptima; por tanto, si se desea llevar a cabo el análisis de sensibilidad en algún coeficiente de una variable de decisión en función objetivo, entonces podemos determinar el intervalo de optimalidad si se supone que la base actual continua óptima, es decir, que la matriz inversa de variables básicas y la solución óptima aún permanecen óptimas. De este modo, considérese que llevamos a cabo el análisis de sensibilidad en el coeficiente de la variable *i*-ésima de la función objetivo, así que deseamos hallar el intervalo de optimalidad para que esta base aún permanezca óptima; para ello, entonces, podríamos calcular los elementos $c_j - z_j \;\; \forall \;\; j \in VNB$ y, como supusimos al inicio de que el MPLC es caso máximos, entonces todos los elementos $c_j - z_j$ deben ser menores que cero, es decir: $c_j - z_j < 0$

En el ejemplo que se resuelve a continuación no se detalla la aplicación del algoritmo simplex, debido a que esto se realizó en otro apartado.

[ENTRA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

Supóngase que se tiene el MPLC siguiente:

$$\begin{aligned} &Max \;\; z = 3x_1 + 2x_2 \\ &s.a. \\ &3x_1 + x_2 \leq 48 \qquad \text{con} \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 36. \end{aligned}$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Solución

En este caso, se asume que el modelo ha sido estandarizado, por lo que primero debemos aplicar el algoritmo simplex, al generar las iteraciones correspondientes, hasta hallar la solución óptima (véase tabla A.1).

[ENTRA TABLA A.1]

Tabla A.1 Tabla simplex inicial

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	θ
0	X_3	3	1	1	0	48	48/3
0	X_4	1	2	0	1	36	36/1
$C_j - z_j$	Z	3	2	0	0	0	

[TERMINA TABLA A.1]

En tanto, la tabla de la primera iteración se muestra en la tabla A.2.

[ENTRA TABLA A.2]

Tabla A.2 Primera iteración

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	θ
3	X_1	1	1/3	1/3	0	16	48
0	X_4	0	5/3	-1/3	1	20	12
$C_j - z_j$	Z	0	1	-1	0	48	

[TERMINA TABLA A.2]

La tabla de la segunda iteración se muestra en la tabla A.3.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[ENTRA TABLA A.3]

Tabla A.3 Segunda iteración

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	Θ
3	X_1	1	0	2/5	-1/5	12	
2	X_2	0	1	-1/5	3/5	12	
$C_j - z_j$	Z	0	0	-4/5	-3/5	60	

[TERMINA TABLA A.3]

Como se cumple la prueba de optimalidad, entonces se ha llegado a la solución óptima:

$$\mathbf{x}_B^* \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}^* = 60$$

Y de la tabla óptima se obtiene que la matriz inversa de variables básicas es:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora, supongamos que se desea hallar el intervalo de optimalidad para c_1. Por tanto, tenemos que determinar los $c_j - z_j \ \forall \ j \in VNB$, que para nuestro caso $j = 3,4$, dado que para cuando $j = 1,2$ son para las variables básicas.

Para *j = 3*

$$c_3 - z_3 = 0 - (c_1 \quad 2)\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 0 - (c_1 \quad 2)\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = -\frac{1}{5}(2c_1 - 2)$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Para *j = 4*

$$c_4 - z_4 = 0 - (c_1 \quad 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (c_1 \quad 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = -\tfrac{1}{5}(-c_1 + 6)$$

Ahora bien, para que estas cumplan con la prueba de optimalidad se tiene que satisfacer:

$$c_3 - z_3 = -\tfrac{1}{5}(2c_1 - 2) < 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 > 1$$

$$c_4 - z_4 = -\tfrac{1}{5}(-c_1 + 6) < 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 < 6$$

Así que $c_1 \in (1;6)$ es el intervalo de optimalidad.

Por otro lado, debemos asumir que se desea hallar el intervalo de optimalidad para c_2. De este modo, tenemos que determinar los $c_j - z_j \quad \forall \quad j \in VNB$, que para este caso es $j = 3,4$. $j = 3,4$, dado que para cuando $j = 1,2$ son para las variables básicas.

Para *j = 3*

$$c_3 - z_3 = 0 - (3 \quad c_2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 0 - (3 \quad c_2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = -\tfrac{1}{5}(6 - c_2)$$

Para *j = 4*

$$c_4 - z_4 = 0 - (3 \quad c_2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (3 \quad c_2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = -\tfrac{1}{5}(-3 + 3c_2)$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Ahora bien, para que se satisfaga con el criterio de optimalidad se tiene que cumplir:

$c_3 - z_3 = -\frac{1}{5}(6 - c_2) < 0 \Rightarrow c_2 < 6$

$c_4 - z_4 = -\frac{1}{5}(-3 + 3c_2) < 0 \Rightarrow c_2 > 1$

Así que $c_2 \in (1;6)$ es el intervalo de optimalidad.

Para comprobar este resultado, se usa el software Lindo, cuyo modelo codificado es:

```
MAX 3X1+2X2
s.t.
3X1+X2<=48
X1+2X2<=36

END
```

La salida que proporciona LINDO es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 60.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	12.000000	0.000000
X2	12.000000	0.000000

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.800000
3)	0.000000	0.600000

NÚM. ITERATIONS = 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	3.000000	3.000000	2.000000
X2	2.000000	4.000000	1.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW RHS	CURRENT INCREASE	ALLOWABLE DECREASE	ALLOWABLE
2	48.000000	60.000000	30.000000
3	36.000000	60.000000	20.000000

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Conclusión

Al comparar los intervalos, se puede observar que estos coinciden.

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

Análisis de sensibilidad en un lado derecho[T2]

Antes de iniciar el estudio de esta sección, es conveniente recurrir a los conocimientos previos del algoritmo simplex y sus variantes, así como del algoritmo dual simplex.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Considérese el efecto de cambiar un coeficiente en el lado derecho (LD). Supóngase que se cambia el valor de la *i*-ésima restricción, si b_ia $b_i + \delta_i$ de este modo, el vector *b* cambia a $\mathbf{b} + \Delta b_i \mathbf{e}_i$, donde $\mathbf{e}_i$ es el vector unitario con 1 en su *i*-ésima componente y 0 en las demás.

Considérese el MPLC como en (1) y supóngase que el modelo tiene soluciones factibles y que se ha hallado su solución óptima, expresada como: $x_B^* = B^{*-1}b$. Si deseamos llevar a cabo el análisis de sensibilidad en el lado derecho de la i-ésima restricción, significa que deseamos determinar el intervalo o el rango de valores para que la solución óptima actual aún permanezca óptima (un supuesto necesario para este análisis). Para tal efecto, primero suponemos una pequeña perturbación en el lado derecho de la i-ésima restricción; es decir, suponemos que $\Delta\mathbf{b}_i$ es la perturbación que se hace en el lado derecho de la *i*-ésima restricción. Entonces , la nueva solución (solución con perturbación), denotada como $\mathbf{x}_\mathbf{B}^{*'}$, deberá cumplir el criterio de factibilidad Esto es:

$$\mathbf{x}_\mathbf{B}^{*'} = \mathbf{B}^{*-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}_i) \geq \mathbf{0}$$

O bien,

$$\mathbf{x}_\mathbf{B}^{*'} = \mathbf{B}^{*-1}\mathbf{b} + \mathbf{B}^{*-1}\Delta\mathbf{b}_i \geq \mathbf{0}$$

O también como,

$$\mathbf{x}_\mathbf{B}^{*'} = \mathbf{x}_\mathbf{B}^{*} + \mathbf{B}^{*-1}\Delta\mathbf{b}_i \geq \mathbf{0}$$

Ahora bien, realizar el análisis de sensibilidad en el lado derecho de la *i*-ésima restricción de un MPLC implica introducir una pequeña perturbación en el lado derecho de esta, digamos que sea:

$$\Delta b_i^t = (0 \;\; 0 \;\; \ldots \delta_i \ldots \;\; 0)$$

Por tanto, la expresión: $\mathbf{x}_\mathbf{B}^{*'} = \mathbf{x}_\mathbf{B}^{*} + \mathbf{B}^{*-1}\Delta\mathbf{b}_i \geq \mathbf{0}$, será reemplazada por:

$$x_B^{*'} = x_B^{*} + \mathrm{B}^{*-1}\,\Delta\,\mathrm{b_i} \geq \mathbf{0}$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Lo anterior quiere decir que suponemos la base actual aún óptima; esto es, la matriz inversa de variables básicas (B^{*-1}) y la solución óptima (x_B^*) permanecen aún óptimas. Por tanto, queda por resolver el sistema de desigualdades derivado de la expresión: $x_B^{*'} = x_B^* + B^{*-1}\Delta b_i \geq \mathbf{0}$, el cual proporciona el intervalo de factibilidad buscado.

[ENTRA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

Supóngase que se tiene el MPLC siguiente:

$$Max\ z = 3x_1 + 2x_2$$
$$s.a.$$
$$3x_1 + x_2 \leq 48$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 36$$

con $x_1, x_2 \geq 0$

Solución

En este caso, primero aplicamos el método simplex, generando las iteraciones correspondientes, hasta hallar la solución óptima.

La tabla inicial simplex es la que se muestra en la tabla A.4, mientras que en la tabla A.5 se observa la tabla de primera iteración y en la tabla A.6 se muestra la tabla de segunda iteración.

[ENTRA TABLA A.4]

Tabla A.4

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	θ
0	X_3	3	1	1	0	48	48/3
0	X_4	1	2	0	1	36	36/1
$C_j - z_j$	Z	3	2	0	0	0	

[TERMINA TABLA A.4]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[ENTRA TABLA A.5]

Tabla A.5 Tabla de la primera iteración

C_j		3	2	0	0		
C_B	*VB*	X_1	X_2	X_3	X_4	*LD*	θ
3	X_1	1	1/3	1/3	0	16	48
0	X_4	0	5/3	-1/3	1	20	12
C_j-z_j	*Z*	0	1	-1	0	48	

[TERMINA TABLA A.5]

[ENTRA TABLA A.6]

Tabla A.6 Segunda iteración

C_j		3	2	0	0		
C_B	*VB*	X_1	X_2	X_3	X_4	*LD*	Θ
3	X_1	1	0	2/5	-1/5	12	
2	X_2	0	1	-1/5	3/5	12	
C_j-z_j	*Z*	0	0	-4/5	-3/5	60	

[TERMINA TABLA A.6]

Como se cumple la prueba de optimalidad, entonces se ha llegado a la solución óptima:

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{z}^* = 60$$

Donde: $B^{*-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Ahora, supóngase que se desea hallar el rango de valores factibles para el lado derecho de la primera restricción (intervalo de factibilidad para b_1) del MPLC, para que la solución óptima actual aún permanezca óptima. Para tal efecto, consideremos lo siguiente:

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$\Delta b_1 = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así que: $x_B^{*'} = x_B^* + B^{*-1}\Delta b_i \geq \mathbf{0}$

Que quedaría expresada como:

$$x_B^{*'} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

O bien,

$$x_B^{*'} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\delta_1 \\ -\delta_1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, para que se satisfaga la factibilidad se tiene que cumplir:

$12 + \frac{2}{5}\delta_1 \geq 0 \Rightarrow \delta_1 \geq -30$

$12 - \frac{1}{5}\delta_1 \geq 0 \Rightarrow \delta_1 \leq 60$

Por tanto, la solución nos lleva a: $\delta_1 \in [-30;60]$, que constituye el intervalo de la perturbación para que la base actual aún permanezca óptima. De modo que para hallar el intervalo de factibilidad para , solo basta sumarle a cada uno de los extremos del intervalo anterior, y queda: $b_1 \in [18;108]$, que es precisamente el intervalo de factibilidad.

Así que si se supone que la perturbación es:

$$\Delta b_1 = \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

La nueva solución óptima será:

$$x_B^{*'} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O bien:

$$x_B^{*'} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Y el valor óptimo de la función objetivo sería:

$$Max\ z^{*'} = (3\ \ 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} = 36$$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en Lindo del nuevo modelo, cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+2X2
s.t.
3X1+X2<=18
X1+2X2<=36

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Se tiene como **salida:**

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 36.00000
```

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	0.000000
X2	18.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.800000
3)	0.000000	0.600000

NO. ITERATIONS = 2

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Por otro lado, supóngase que deseamos hallar el rango de valores para el lado derecho de la segunda restricción (intervalo de factibilidad para b_2) del MPLC, para que la solución óptima actual aún permanezca óptima. Para tal efecto, consideremos lo siguiente:

$$\Delta b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

Así que:

$$x_B^{*'} = x_B^* + B^{*-1}\Delta b_i \geq \mathbf{0}$$

La cual quedaría expresada como:

$$x_B^{*'} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

O bien,

$$x_B^{*'} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -\delta_2 \\ 3\delta_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, para que se satisfaga la factibilidad, se tiene que cumplir:

$$12 - \tfrac{1}{5}\delta_2 \geq 0 \Rightarrow \ \delta_2 \leq 60$$

$$12 + \tfrac{3}{5}\delta_2 \geq 0 \Rightarrow \ \delta_2 \geq -20$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Por tanto, $\delta_2 \in [-20;60]$, que constituye el intervalo de la perturbación para que la base actual aún permanezca óptima. De modo que para hallar el intervalo de factibilidad para b_2, solo basta sumarle a $b_2 = 36$ cada uno de los extremos del intervalo anterior, que queda: $b_2 \in [16;96]$, que es precisamente el intervalo de factibilidad.

Así que si se supone que la perturbación es:

$$\Delta b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Así, la nueva solución óptima es:

$$x_B^{*\prime} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

O bien:

$$x_B^{*\prime} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 48 \end{pmatrix}.$$

Y el valor óptimo de la función objetivo es:

$$Max\ z^{*\prime} = (3\ \ 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 48 \end{pmatrix} = 96$$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en el software Lindo del nuevo modelo, y cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+2X2
S.T.
3X1+X2<=48
X1+2X2<=96

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Se tiene como **salida:**

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 96.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	0.000000
X2	48.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.800000
3)	0.000000	0.600000

NO. ITERATIONS = 2

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

Análisis de sensibilidad agregando una nueva variable [T2]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Antes de iniciar el estudio de esta sección, es conveniente recurrir a los conocimientos previos del algoritmo simplex y sus variantes, así como del algoritmo dual simplex, dado que en esta sección es fundamental para el desarrollo y comprensión de los cinco casos.

Añadir otra actividad equivale a introducir en el MPLC una nueva variable x_{n+1}, con los coeficientes apropiados en las restricciones; es decir, en la $(n+1)$ -ésima columna, denotada como $\mathbf{p}_{n+1}$, y en la función objetivo con coeficiente c_{n+1}. En otras palabras, al añadir una nueva variable de decisión al MPLC, se requiere conocer: a) Los datos de la columna $\mathbf{p}_{n+1}$ y *b*) el coeficiente de esa variable en función objetivo, c_{n+1} .

Por tanto, se calcularán los valores:

$c_{n+1} - z_{n+1} = c_{n+1} - \mathbf{c}_B^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{p}_{n+1}$, y

$\hat{\mathbf{p}}_{n+1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{p}_{n+1}$

Luego, la optimalidad de la solución dependerá del valor ($c_j - z_j$) de la nueva variable x_{n+1} , ya que si la función a optimizar es de máximo, la prueba de optimalidad consiste en satisfacer: ($c_j - z_j \leq 0$), o bien, si la función a optimizar es de mínimo, la prueba de optimalidad consiste en satisfacer: ($c_j - z_j \geq 0$). Si en cada caso se satisface, la nueva variable seguirá siendo no básica y la solución aún será óptima; es decir, el introducir una nueva variable al MPLC, no cambia su solución óptima ni el valor óptimo de la función a optimizar. Sin embargo, si no se cumple la prueba de optimalidad, la solución ya no es óptima, por lo que dicha variable debe entrar al conjunto de variables básicas y, por ende, aplicar el algoritmo simplex, con la finalidad de hallar la nueva solución óptima y el valor óptimo de la función a optimizar.

Por lo anterior, se concluye que si la introducción de la nueva variable satisface la prueba de optimalidad, entonces esta variable será no básica; en caso contrario, la nueva variable será básica.

[ENTRA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

Supóngase que se tiene el MPLC siguiente:

$$Max\ z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.a. \qquad \text{con} \quad x_1, x_2 \geq 0$$

$$3x_1 + x_2 \leq 48$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 36.$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Solución

Primero, se aplica el algoritmo simplex, generando las iteraciones correspondientes hasta hallar la solución óptima.

[ENTRA TABLA A.7

Tabla A.7 Tabla inicial simplex

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	θ
0	X_3	3	1	1	0	48	48/3
0	X_4	1	2	0	1	36	36/1
$C_j - z_j$	Z	3	2	0	0	0	

[TERMINA TABLA A.7]

[ENTRA TABLA A.8]

Tabla A.8 Primera iteración

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	θ
3	X_1	1	1/3	1/3	0	16	48
0	X_4	0	5/3	-1/3	1	20	12
$C_j - z_j$	Z	0	1	-1	0	48	

[TERMINA TABLA A.8]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[ENTRA TABLA A.9]

Tabla A.9 Segunda iteración

C_j		3 2	0 0		
C_B	VB	X_1X_2	X_3X_4	LD	Θ
3	X_1	1 0	2/5 -1/5	12	
2	X_2	0 1	-1/5 3/5	12	
$C_j - z_j$	Z	0 0	-4/5 -3/5	60	

[TERMINA TABLA A.9]

Como se cumple la prueba de optimalidad, entonces se dice que se ha llegado a la solución óptima del modelo original, que es:

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}^* = 60$$

Solución sin uso de la tabla

De la tabla óptima se obtiene:

$$\mathbf{B}^{*-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{t} = (3 \;\; 2)$$

Ahora, supongamos que se desea introducir la variable conforme los parámetros siguientes: $c_3 = 2$ y $\mathbf{p}_\mathbf{3}^\mathbf{t} = (2 \;\; 1)$. Además de suponer que la base actual aún es óptima, ¿la introducción de la nueva variable, cambiará la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo?

Al calcular $c_3 - z_3$ tenemos:

$$c_3 - z_3 = c_3 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{t}\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{p}_\mathbf{3}$$

$$c_3 - z_3 = 2 - (3 \;\; 2)\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 2 - (3 \;\; 2)\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = \frac{-1}{5} < 0$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Por tanto, la base actual permanece óptima y la solución del nuevo modelo no cambiará; es decir la solución óptima seguirá siendo:

$$x_B^{*'} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Y el valor óptimo de la función objetivo también seguirá siendo:

$$\mathbf{z}^{*'} = (3 \;\; 2)\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = 60$$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en LINDO del nuevo modelo, cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+2X2+2X3
s.t.
3X1+X2+2X3<=48
X1+2X2+X3<=36

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP  2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
```

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1) 60.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	12.000000	0.000000
X2	12.000000	0.000000
X3	0.000000	0.200000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.800000
3)	0.000000	0.600000

NO. ITERATIONS = 2

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

De nueva cuenta, supóngase que la nueva variable x_3 contiene los parámetros siguientes: $c_3 = 3$ y $\mathbf{p}_3^t = (2 \;\; 1)$. Además de suponer que la base actual aún es óptima, ¿la introducción de la nueva variable, cambiará la nueva solución óptima y el nuevo valor óptimo de la función objetivo?

Si se calcula $c_3 - z_3$ tenemos:

$$c_3 - z_3 = c_3 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^t \mathbf{B}^{*-1} \mathbf{p}_3$$

$$c_3 - z_3 = 3 - (3 \;\; 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 3 - (3 \;\; 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = \tfrac{4}{5} > 0$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

De acuerdo con este resultado la base actual cambiará, por tanto aplicamos el algoritmo simplex sin arreglo tabular para restaurar la optimalidad y, por ende, determinar la nueva base y el nuevo valor óptimo de la función objetivo.

Al aplicar el algoritmo simplex sin arreglo tabular, la *variable entrante* es x_3 , y para determinar la variable saliente, hacemos lo siguiente:

Al actualizar la columna entrante, mediante:

$$\hat{p}_3 = B^{-1} p_3$$

$$\hat{p}_3 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, se actualiza el vector de recursos a través de:

$$\hat{b} = B^{*-1} b$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Así que con la regla del mínimo cociente determinamos la *variable saliente:*
$mín\left\{\frac{12}{\frac{3}{5}}, \frac{12}{\frac{1}{5}}\right\} = mín\{20,60\} = 20$, por tanto $x_s = x_1$.

Nota: Es importante considerar que el conjunto de subíndices de variables básicas del modelo original es: $\beta_2 = \{1,2\}$, y su conjunto de subíndices de variables no básica es: $\eta_2 = \{3,4\}$. Así que para cuando se introduce la nueva variable de decisión x_3 , se asume de entrada que esta es no básica. Por lo que los nuevos conjuntos quedan definidos como: $\beta_2 = \{1,2\}$ y $\eta_2 = \{3,4,5\}$.

Al redefinir el nuevo conjunto de variables básicas y no básicas, se sabe de antemano que la variable entrante es x_3 y la variable saliente es x_1 .Entonces se tiene: $\beta = \{3,2\}$ y $\eta = \{1,4,5\}$

Así que la nueva matriz de variables básicas queda:

$$B = (p_3 \; p_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ y } \eta = (\mathbf{p}_1 \; \mathbf{p}_4 \; \mathbf{p}_5)$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Y la nueva inversa de la matriz de variables básicas es:

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } c_B^t = (3\ \ 2)$$

Ahora, revisamos si con esta base restauramos optimalidad.

Para $j = 1$

$$c_1 - z_1 = c_1 - \mathbf{c_B^t B^{*-1} p}_1$$

$$c_1 - z_1 = 3 - (3\ \ 2)\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 3 - (3\ \ 2)\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_2 - z_2 = \frac{-4}{3} < 0$$

Para $j = 4$

$$c_4 - z_4 = c_4 - \mathbf{c_B^t B^{*-1} p}_4$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (3\ \ 2)\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (3\ \ 2)\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = \frac{-4}{3} < 0$$

Para $j = 5$

$$c_5 - z_5 = c_5 - \mathbf{c_B^t B^{*-1} p}_5$$

$$c_5 - z_5 = 0 - (3\ \ 2)\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$c_5 - z_5 = 0 - (3 \;\; 2)\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_5 - z_5 = \tfrac{-1}{3} < 0$$

Como se restaura la optimalidad, entonces la nueva solución óptima y el nuevo valor óptimo de la función objetivo son:

$$x_B^{*'} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Y el valor óptimo de la función objetivo es: $\mathbf{z}^{*'} = (3 \;\; 2)\begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix} = 76$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en LINDO del nuevo modelo, cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+2X2+3X3
s.t.
3X1+X2+2X3<=48
X1+2X2+X3<=36

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTOI DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP  2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
```

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1) 76.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	1.333333
X2	8.000000	0.000000
X3	20.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	1.333333
3)	0.000000	0.333333

NO. ITERATIONS= 2

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Solución con uso de la tabla cuando existe variable entrante

Supóngase que la nueva variable x_3 contiene los parámetros siguientes: $c_3 = 3$ y $\mathbf{p}_3^t = (2 \quad 1)$.

Además de suponer que la base actual es aún óptima, ¿la introducción de la nueva variable, cambiará la nueva solución óptima y el nuevo valor óptimo de la función objetivo?

Al calcular $c_3 - z_3$ tenemos:

$$c_3 - z_3 = c_3 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^t \mathbf{B}^{*-1} \mathbf{p}_\mathbf{3}$$

$$c_3 - z_3 = 3 - (3 \quad 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 3 - (3 \quad 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = \tfrac{4}{5} > 0$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Con base en este resultado, la base actual cambiará; por tanto, aplicamos el algoritmo simplex con arreglo tabular para restaurar la optimalidad y, por ende, determinar la nueva base y el nuevo valor óptimo de la función objetivo.

Al aplicar el algoritmo simplex con arreglo tabular, la *variable entrante* es x_3 y para determinar la variable saliente, hacemos lo siguiente:

1. Se actualiza la columna entrante, mediante:

$$\hat{p}_3 = B^{-1} p_3$$

$$\hat{p}_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[ENTRA TABLA A.10]

Tabla A.10

C_j		3	2	3	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_3	X_4	LD	Θ
3	X_1	1	0	3/5	2/5	-1/5	12	20
2	X_2	0	1	1/5	-1/5	3/5	12	60
$C_j - z_j$	Z	0	0	4/5	-4/5	-3/5	60	

[TERMINA TABLA A.10]

Nótese que la tabla A.10 se genera al usar la misma tabla cuando se encontró la solución óptima del modelo original, pero solo se le agregó la nueva columna de la variable x_3 actualizada, así como correspondiente al valor $c_3 - z_3 = \frac{4}{5}$, antes calculado.

Luego, al aplicar el algoritmo simplex se genera la nueva tabla (véase tabla A.11).

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[ENTRA TABLA A.11]

Tabla A.11

C_j		3	2	3	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_3	X_4	LD	Θ
3	X_3	5/3	0	1	2/3	-1/3	20	
2	X_2	-1/3	1	0	-1/3	2/3	8	
$C_j - z_j$	Z	-4/3	0	0	-4/3	-1/3	76	

[TERMINA TABLA A.11]

Por tanto, se restaura la optimalidad. La nueva solución óptima y el nuevo valor óptimo de la función a optimizar son: $\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^{*'} = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{z}^{*'} = 76$

Que son los mismos resultados antes obtenidos.

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

Análisis de sensibilidad agregando una nueva restricción [T2]

Como en las secciones anteriores, antes de iniciar el estudio de esta sección es conveniente recurrir a los conocimientos previos del algoritmo simplex y sus variantes, así como del algoritmo dual simplex.

Es importante destacar que cuando se agrega una nueva restricción, se pueden presentar los casos siguientes:

a) La nueva restricción es inactiva.
b) La nueva restricción es activa.

Restricción inactiva [T3]

La restricción inactivase presenta cuando la solución óptima del modelo original satisface la nueva restricción, por lo que tanto la solución óptima como el valor óptimo de la función a optimizar siguen siendo los mismos. En este caso, la restricción es redundante para el MPLC.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Restricción activa [T3]

La restricción activa se presenta cuando la solución óptima del modelo original no satisface la nueva restricción y la solución óptima original se modifica; como se representó antes. En este caso, cambia el área del conjunto poliédrico; por tanto, para hallar la nueva solución óptima ($\mathbf{x}_B^{*'}$) y el valor óptimo de la función a optimizar ($\mathbf{z}^{*'}$) se aplica el algoritmo dual simplex.

[ENTRA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

Supóngase que se tiene el MPLC siguiente:

$$Max\ z = 3x_1 + 2x_2$$
$$s.a.$$
$$3x_1 + x_2 \leq 48 \qquad \text{con} \qquad x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 36$$

Determinar cuál sería la nueva solución óptima y el valor óptimo de la función a optimizar cuando se agrega la restricción: $x_1 + x_2 \leq 30$.

Solución

En este caso, primero aplica el algoritmo simplex para el modelo original, generando las iteraciones correspondientes hasta hallar la solución óptima.

[ENTRA TABLA A.12]

Tabla A.12 Tabla inicial simplex

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	θ
0	X_3	3	1	1	0	48	48/3
0	X_4	1	2	0	1	36	36/1
C_j-z_j	Z	3	2	0	0	0	

[TERMINA TABLA A.12]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[ENTRA TABLA A.13]

Tabla A.13 Primera iteración

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	θ
3	X_1	1	1/3	1/3	0	16	48
0	X_4	0	5/3	-1/3	1	20	12
$C_j - z_j$	Z	0	1	-1	0	48	

[TERMINA TABLA A.13]

[ENTRA TABLA A.14]

Tabla A.14 Segunda iteración

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	Θ
3	X_1	1	0	2/5	-1/5	12	
2	X_2	0	1	-1/5	3/5	12	
$C_j - z_j$	Z	0	0	-4/5	-3/5	60	

[TERMINA TABLA A.14]

Como se puede comprobar, en este caso se cumple la prueba de optimalidad, entonces se ha llegado a la solución óptima del modelo original, que es:

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}, \ \mathbf{z}^* = 60$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Ahora bien, si sustituimos los valores de la solución óptima en la nueva restricción, se tiene:

$$x_1 + x_2 = 12 + 12 = 24 < 30$$

Por tanto, esta restricción es inactiva; entonces, la solución óptima y el valor óptimo de la función a optimizar siguen siendo los mismos.

Por otro lado, si asumimos que la nueva restricción es: $x_1 + x_2 \leq 20$, ¿cuál sería la nueva solución óptima y el valor óptimo de la función a optimizar?

Al sustituir los valores de la solución óptima en esta restricción, se tiene:$x_1 + x_2 = 12 + 12 = 24 > 20$ por lo que la nueva restricción es activa. Es decir, esta modificará el área del conjunto poliédrico.

Así que para efectos de hallar la nueva solución y el valor óptimos de la función a optimizar, la tabla óptima del modelo original se le añadirá la restricción activa (valores marcados en color azul), una vez que se asume que dicha restricción se convirtió en una igualdad(véase tabla A.15).

[ENTRA TABLA A.15]

Tabla A.15

C_j		3	2	0	0	0	
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
3	X_1	1	0	2/5	-1/5	0	12
2	X_2	1.	1	-1/5	3/5	0	12
0	X_5	1	1	0	0	1	20
C_j-z_j	Z	0	0	-4/5	-3/5	0	60

[TERMINA TABLA A.15]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Así que se aplica el algoritmo dual simplex (véase tabla A.16).

[ENTRA TABLA A.16]

Tabla A.16

C_j		3	2	0	0	0	
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
3	X_1	1	0	2/5	-1/5	0	12
2	X_2	1.	1	-1/5	3/5	0	12
0	X_5	0	1	-2/5	1/5	1	8
C_j-z_j	Z	0	0	-4/5	-3/5	0	60
3	X_1	1	0	2/5	-1/5	0	12
2	X_2	0	1	-1/5	3/5	0	12
0	X_5	0	0	-1/5	-2/5	1	-4
C_j-z_j	Z	0	0	-4/5	-3/5	0	60

[TERMINA TABLA A.16]

La tabla A.15 se genera al multiplicar por -1 el renglón 1 y sumarle el renglón 3. Mientras que la tabla A.16 se genera al multiplicar por -1 el renglón 2 y sumarle el renglón3. A partir de estas tablas, es posible percatarse que se pierde factibilidad, así que para restaurarla, se aplica el algoritmo mencionado, el cual genera la tabla A.17.

[ENTRA TABLA A.17]

Tabla A.17

C_j		3	2	0	0	0	
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
3	X_1	1	1	1/2	0	-1/2	14
2	X_2	0	1	-1/2	0	3/2	6
0	X_4	0	0	1/2	1	-5/2	10
C_j - z_j	Z	0	0	-1/2	0	-3/2	54

[TERMINA TABLA A.17]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

En este caso, como se restauró la factibilidad y se cumple la prueba de optimalidad, se ha encontrado la nueva solución óptima y el nuevo valor de la función a optimizar:

$$\mathbf{x}_B^{*'} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \ \mathbf{z}^{*'} = 54$$

A continuación se comprueba el resultado obtenido con Lindo, cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+2X2
s.t.
3X1+X2<=48
X1+2X2<=36
X1+X2 <=20

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP  2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 54.00000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
   X1         14.000000          0.000000
   X2          6.000000          0.000000

ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
  2)         0.000000          0.500000
  3)        10.000000          0.000000
  4)         0.000000          1.500000

NO. ITERATIONS = 2
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Análisis de sensibilidad en una columna de una variable no básica[T2]

Antes de iniciar el estudio de esta sección, se considera conveniente recurrir a los conocimientos previos del algoritmo simplex y sus variantes, así como del algoritmo dual simplex. Hasta este momento se ha asumido que los coeficientes tecnológicos definidos en $\mathbf{a}_{ij}$ permanecen constantes. Esto significa, por ejemplo, que la cantidad del *i*-ésimo recurso consumido por unidad del *j*-ésimo producto es invariable en el MPLC. Lo que resulta cuestionable, dado que la $\mathbf{a}_{ij}$ se mantiene sin variante para un cierto periodo. Una de las razones por las cuales la $\mathbf{a}_{ij}$ no puede mantenerse constante se debe a agentes externos a la empresa; por ejemplo, cuando se descubre una nueva técnica de producción. Otra razón, se debe a una variación interna de la empresa; por ejemplo, el departamento técnico mejora los procesos actuales de manufactura.

Supóngase que el vector $\mathbf{p}_j$ de una variable no básica se cambió por $\mathbf{p}_j$ en el MPLC definido antes; de este modo, la prueba de optimalidad de la solución actual puede afectarse, dado que la factibilidad no se altera por tratarse de una variable no básica. Con base en esto, se asume que el modelo tiene soluciones factibles y que se ha hallado su solución óptima, expresada como: $x_B^* = B^{*-1}b$.

Al asumir que se desea llevar a cabo el análisis de sensibilidad en una columna de una variable no básica, significa que una vez hallada la solución óptima, es posible saber cuáles variables son básicas y cuáles no, *interesándonos solo en aquellas variables no básicas,* pero de decisión. Ya que las variables de holgura se añaden para estandarizar el modelo, simplemente no interesan para efectos de este tema. Bajo estas consideraciones, hacemos los supuestos siguientes:

• La base actual sigue siendo óptima (B^{*-1}).
• La *j*-ésima columna de la matriz de coeficientes tecnológicos denotada como $\mathbf{p_j}$, correspondiente a la *j*-ésima variable no básica, cambia a $\mathbf{p}_j'$.
• Todos los demás parámetros del modelo permanecen sin cambios.

Ahora bien, debido a la perturbación (cambiar la columna $\mathbf{p_j}$ por $\mathbf{p}_j'$) en el MPLC, se pueden considerar los supuestos siguientes:

• La columna perturbada ($\mathbf{p}_j'$) de la *j*-ésima variable no básica, no sufre cambios.
• La columna perturbada ($\mathbf{p}_j'$) de la *j*-ésima variable no básica, sufre cambios, es decir: ($c_j - z_j > 0$).

El *primer supuesto* considera que con la *j*-ésima columna perturbada, la base actual óptima no cambia, es decir: ($c_j - z_j \leq 0$, para caso máximo). O sea que al llevar a cabo el cálculo de $c_j - z_j$, se cumple la prueba de optimalidad; así, entonces, se concluye al decir que con la j-ésima columna perturbada, la base actual óptima no cambia, y esa *j*-ésima variable en el óptimo sigue tomando el valor de cero.

El *segundo supuesto* considera que con la j-ésima columna perturbada, la base actual óptima cambia, es decir: ($c_j - z_j > 0$, para caso máximo). O sea que al llevar a cabo el cálculo de $c_j - z_j$, ya se cumple la prueba de optimalidad; así entonces, se concluye al decir que con

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

la *j*-ésima columna perturbada la base actual óptima cambia, y esa j-ésima variable en el óptimo es la nueva variable entrante, y entonces se restaura la optimalidad al aplicar el método algoritmo primal y, por consiguiente, cambiará la base actual y el valor óptimo de la función objetivo.

[ENTRA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

Supóngase que se tiene el MPLC siguiente:

$$Max\ z = 20x_1 + 30x_2 + 25x_3$$
$$s.a.$$
$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 360 \quad \text{con} \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 480$$

Solución

En este caso, primero aplicamos el algoritmo simplex para generar las iteraciones correspondientes, hasta hallar la solución óptima.

[ENTRA TABLA A.18]

Tabla A.18 Tabla inicial simplex

C_j		20	30	25	0	0		
C_B	*VB*	$X_1X_2X_3$			X_4X_5		*LD*	θ
0	X_4	3	5	2	1	0	360	360/5
0	X_5	2	4	1	0	1	480	480/4
$C_j - z_j$	*Z*	20	30	25	0	0	0	

[TERMINA TABLA A.18]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[ENTRA TABLA A.19]

Tabla A.19 Primera iteración

C_j		20	30	25	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD	θ
30	X_2	3/5	1	2/5	1/5	0	72	180
0	X_5	-2/5	0	-3/5	-4/5	1	192	----
C_j-z_j	Z	2	0	13	-6	0	2160	

[TERMINA TABLA A.19]

[ENTRA TABLA A.20]

Tabla A.20 Segunda iteración

C_j		20	30	25	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD	Θ
25	X_3	3/2	5/2	1	1/2	0	180	
0	X_5	1/2	3/2	0	-1/2	1	300	
C_j - z_j	Z	-35/2	-65/2	0	-25/2	0	4500	

[TERMINA TABLA A.20]

Como se puede observar, se cumple la prueba de optimalidad, por tanto se ha llegado a la solución óptima, que es:

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 300 \end{pmatrix}, \text{ y } \mathbf{z}^* = 4500$$

Donde:

$$B^{*-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad x_B^* = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 300 \end{pmatrix} \text{ y } \quad c_B^t = (25 \quad 0)$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Ahora, supongamos que se cambia la columna $\mathbf{p}_2$ por $\mathbf{p}_2'$, cuyos nuevos componentes son: $\mathbf{p}_2'^{t} = (3 \quad 2)$. Además de suponer que la base actual aún es óptima, ¿la perturbación en la variable no básica x_2, cambiará la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo?

Si se investiga con base en prueba de optimalidad primal, se tiene:
Al calcular $c_2 - z_2$:

$$c_2 - z_2 = c_2 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^t \mathbf{B}^{*-1} \mathbf{p}_2$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (25 \quad 0)\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (25 \quad 0)\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = \tfrac{-15}{2} < 0$$

Por tanto, la base actual permanece óptima y la solución del nuevo modelo no cambia. Es decir, la nueva solución óptima será:

$$x_B^{*'} = \begin{pmatrix} 180 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Y el valor óptimo de la función objetivo es:

$$\mathbf{z}^{*'} = (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 180 \\ 300 \end{pmatrix} = 4500$$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en LINDO del nuevo modelo, cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 20X1+30X2+25X3
s.t.
3X1+3X2+2X3<=360
2X1+2X2+X3<=480

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Y su salida es:

[ENTRA TEXTOI DE PROGRAMA]

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 4500.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	17.5000000
X2	0.000000	7.5000000
X3	180.000000	0.0000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	12.5000000
3)	300.000000	0.0000000

NO. ITERATIONS = 1

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Por otro lado, supóngase que la columna $\mathbf{p}_2^t = (5 \quad 4)$ cambia a $\mathbf{p}_2^{'t} = (2 \quad 4)$. Además de suponer que la base actual aún es óptima, ¿la perturbación en la variable no básica x_2, cambiará la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo?

Al calcular $c_2 - z_2$ tenemos:

$$c_2 - z_2 = c_2 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^t \mathbf{B}^{*-1} \mathbf{p}_2$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (25 \quad 0)\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (25 \quad 0)\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$c_2 - z_2 = 5 > 0$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Por tanto, la base actual cambia y podemos aplicar el algoritmo simplex con o sin arreglo tabular, con el fin de restaurar la optimalidad y, por ende, determinar la nueva base y el valor óptimo de la función objetivo.

Para este caso, solo aplicaremos el algoritmo simplex sin arreglo tabular; por tanto, la variable entrante es x_2. Ahora, para determinar la variable saliente, hacemos lo siguiente:

1. Se actualiza la columna entrante, mediante:

$$\hat{p}_2 = B^{-1} p_2$$

$$\hat{p}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Se actualiza el vector de recursos, mediante:

$$\hat{b} = B^{*-1} b$$

$$\hat{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 360 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 300 \end{pmatrix}$$

3. Con la regla del mínimo cociente determinamos la variable saliente:

$$min\left\{\frac{180}{1}, \frac{300}{3}\right\} = min\{180, 100\} = 100, \text{ por tanto } x_s = x_5$$

Recuérdese que el conjunto de subíndices de variables básicas y no básicas son: $\beta = \{3,5\}$, y $\eta = \{1,2,4\}$ respectivamente. Y como la variable entrante es x_2 y la saliente es x_5, entonces los nuevos conjuntos de subíndices de variables básicas y variables no básicas quedan: $\beta = \{3,2\}$, y $\eta = \{1,5,4\}$, respectivamente. Por lo anterior, la nueva matriz de variables básicas queda:

$$B = (p_3 \; p_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{N} = (\mathbf{p}_1 \; \mathbf{p}_5 \; \mathbf{p}_4)$$

Y la nueva inversa de la matriz de variables básicas es:

$$B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad c_B^t = (25 \;\; 30)$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Ahora bien, con esta base se revisa si es posible restaurar optimalidad.

Para $j = 1$

$$c_1 - z_1 = c_1 - \mathbf{c_B^t B^{*-1} p_1}$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (25 \quad 30)\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (25 \quad 30)\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = \tfrac{-55}{3} < 0$$

Para $j = 5$

$$c_5 - z_5 = c_5 - \mathbf{c_B^t B^{*-1} p_5}$$

$$c_5 - z_5 = 0 - (25 \quad 30)\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_5 - z_5 = 0 - (25 \quad 30)\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_5 - z_5 = \tfrac{-5}{3} < 0$$

Para $j = 4$

$$c_4 - z_4 = c_4 - \mathbf{c_B^t B^{*-1} p_4}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (25 \quad 30)\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (25 \quad 30)\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = \tfrac{-35}{3} < 0$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

De esta manera se ha restaurado la prueba de optimalidad; así la nueva solución óptima es:

$$x_B^{*\prime} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 360 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Y el nuevo valor óptimo de la función objetivo es:

$$\mathbf{z}^{*\prime} = (25 \quad 30)\begin{pmatrix} 80 \\ 100 \end{pmatrix} = 5000$$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en Lindo del nuevo modelo, cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 20X1+30X2+25X3
s.t.
3X1+2X2+2X3<=360
2X1+4X2+X3<=480

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y la salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 5000.00000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     X1          0.000000         18.333333
     X2        100.000000          0.000000
     X3         80.000000          0.000000

ROW    SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
  2)           0.000000          11.666667
  3)           0.000000           1.666667
```

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

NO. ITERATIONS = 2

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

Análisis de sensibilidad en una columna de una variable básica [T2]

Antes de iniciar el estudio de esta sección, se recomienda que el lector recurra a los conocimientos previos del algoritmo simplex y sus variantes, así como del algoritmo dual simplex.

Cuando la columna de una variable básica cambia, digamos que sea $\mathbf{p}_{B_r}$ a $\mathbf{p}'_{B_r}$ con x_{B_r} la variable básica, entonces la matriz de variables básicas en el óptimo ($\mathbf{B}$) cambia a $\mathbf{B}'$. Esto ocasiona que la solución óptima $\mathbf{x}_B^*$, el valor de la función a optimizar $\mathbf{z}^*$ y los $(c_j - z_j)$ cambien a $\mathbf{x}_B^{*'} = \mathbf{B}^{-1'}\mathbf{b}$, $\mathbf{z}^{*'} = \mathbf{c}_B^t \mathbf{B}^{-1'}\mathbf{b}$ y $(c_j - z_j')$, respectivamente. Por lo que es recomendable resolver el nuevo MPLC desde el inicio.

Por tanto, se propone el MPLC como se definió antes, así que se supone que el modelo tiene soluciones factibles y que se ha hallado su solución óptima, expresada como: $x_B^* = B^{*-1}b$. Si se asume que deseamos llevar a cabo el *análisis de sensibilidad en una columna de una variable básica,* significa que una vez hallada la solución óptima, sabremos cuales variables son básicas y cuáles no lo son, *interesándonos solo en aquellas variables básicas de decisión*, ya que las variables de holgura que se añaden para estandarizar el modelo, simplemente no son de interés para efectos de este tema.

Ahora bien, debido a la perturbación (cambio de la columna $\mathbf{p_j}$ de una variable básica por $\mathbf{p'_j}$) en el MPLC, no podemos garantizar que la base siga siendo óptima, ya que esta puede cambiar:

- La base actual óptima (B^{*-1}).
- La solución óptima ($x_B^* = B^{*-1}b$).
- El valor óptimo de la función objetivo (z^*).

Por tanto, *se recomienda volver a resolver el modelo desde el principio;* es decir, aplicar el método simplex con o sin arreglo tabular.

[ENTRA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

Supóngase que se tiene el MPLC siguiente:

$$Max\ z = 20x_1 + 30x_2 + 25x_3$$

$$s.a.$$

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 360 \qquad \text{con} \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 480$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Solución

Primero, aplicamos el algoritmo simplex, generando las iteraciones correspondientes, hasta hallar la solución óptima.

[ENTRA TABLA A.21]

Tabla A.21 Tabla inicial simplex

C_j		20	30	25	0	0		
C_B	VB	$X_1X_2X_3$			X_4X_5		LD	θ
0	X_4	3	5	2	1	0	360	360/5
0	X_5	2	4	1	0	1	480	480/4
$C_j - z_j$	Z	20	30	25	0	0	0	

[TERMINA TABLA A.21]

[ENTRA TABLA A.22]

Tabla A.22 Primera iteración

C_j		20	30	25	0	0		
C_B	VB	$X_1X_2X_3$			X_4	X_5	LD	θ
30	X_2	3/5	1	2/5	1/5	0	72	180
0	X_5	-2/5	0	-3/5	-4/5	1	192	----
C_j-z_j	Z	2	0	13	-6	0	2160	

[TERMINA TABLA A.22]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[ENTRA TABLA A.23]

Tabla A.23 Segunda iteración.

C_j		20 30 25	0 0		
C_B	VB	$X_1X_2X_3$	X_4X_5	LD	Θ
25	X_3	3/2 5/2 1	1/2 0	180	
0	X_5	1/2 3/2 0	-1/2 1	300	
C_j- z_j	Z	-35/2 -65/2 0	-25/2 0	4500	

[TERMINA TABLA A.23]

Como se cumple la prueba de optimalidad, por tanto se ha llegado a la solución óptima, que es:

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 300 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}^* = 4500$$

Donde:

$$B^{*-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad x_B^* = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 300 \end{pmatrix} \text{ y } \quad c_B^t = (25 \quad 0)$$

Ahora, supongamos que se cambia la columna $\mathbf{p_3}$ por $\mathbf{p_3'}$, cuyos nuevos componentes son $\mathbf{p_3'^t} = (1 \quad 1)$. Con la perturbación en la variable básica x_3, ¿cuál será la nueva solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo?

Con base en esta recomendación, entonces nuevamente debemos resolver el modelo desde el principio; es decir, debemos aplicar el algoritmo simplex *sin arreglo tabular.*

Las matrices de variables básicas y no básicas son:

$$B_0 = (P_4 P_5) \text{ y } \quad N = (P_1 P_2 P_3)$$

Así que:

$$B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \quad c_B^t = (0 \quad 0)$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Al revisar si esta base es óptima, tenemos:

Para $j = 1$

$$c_1 - z_1 = c_1 - \mathbf{c_B^t B_0^{-1} p_1}$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 20 > 0$$

Para $j = 2$

$$c_2 - z_2 = c_2 - \mathbf{c_B^t B_0^{-1} p_2}$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c_2 - z_2 = 30 > 0$$

Para $j = 3$

$$c_3 - z_3 = c_3 - \mathbf{c_B^t B_0^{-1} p_3}$$

$$c_3 - z_3 = 25 - (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 25 - (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 25 > 0$$

Por tanto, la base actual no es óptima y la variable entrante es: $x_e = x_2$. Ahora bien, para buscar la variable saliente hacemos:

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

1. La actualización de la columna de la variable entrante:

$$\hat{p}_2 = B_0^{-1} p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. La actualización del vector de recursos:

$$\hat{b}_0 = B_0^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 360 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 480 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$mín\left\{\frac{360}{5}, \frac{480}{4}\right\} = mín\{72,120\} = 72$, así que $x_s = x_4$

De este modo, los nuevos conjuntos de variables básicas y no básicas son: $\beta_1 = (2,5)$ y $\eta_1 = (1,4,3)$ respectivamente.

Y la nueva base queda como:

$$B_1 = (P_2 P_5) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que:

$$B_1^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } \quad c_B^t = (30 \quad 0).$$

Al revisar si esta base es óptima, tenemos:

Para j = 1

$$c_1 - z_1 = c_1 - \mathbf{c_B^t B_1^{-1} p_1}$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (30 \quad 0)\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (30 \quad 0)\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 2 > 0$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Para $j = 4$

$$c_4 - z_4 = c_4 - \mathbf{c_B^t B_1^{-1} p_4}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (30 \quad 0)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (30 \quad 0)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = -6 < 0$$

Para $j = 3$

$$c_3 - z_3 = c_3 - \mathbf{c_B^t B_1^{-1} p_3}$$

$$c_3 - z_3 = 25 - (30 \quad 0)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 25 - (30 \quad 0)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 19 > 0$$

Por tanto, la base actual no es óptima y la variable entrante es:

$$x_e = x_3$$

Ahora, para buscar la variable saliente, hacemos:

1. La actualización de la columna de la variable entrante:

$$\hat{p}_3 = B_1^{-1} p_3 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. La actualización del vector de recursos:

$$\hat{b}_1 = B_1^{-1}\dot{b} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 360 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 192 \end{pmatrix}$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Por tanto:

$mín\left\{\frac{72}{\frac{1}{5}}, \frac{192}{\frac{1}{5}}\right\} = mín\{360,960\} = 360$, así que $x_s = x_2$

De este modo, los nuevos conjuntos de variables básicas y no básicas son: $\beta_2 = (3,5)$ y $\eta_2 = (1,4,2)$ respectivamente.

Y la nueva base queda como:

$$B_2 = (P_3 P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que $\mathbf{B_2^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c_B^t} = (25 \quad 0)$.

Al revisar si esta base es óptima, tenemos:

Para *j* = 1

$$c_1 - z_1 = c_1 - \mathbf{c_B^t B_2^{-1} A_1}$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = -55 < 0$$

Para *j* = 4

$$c_4 - z_4 = c_4 - \mathbf{c_B^t B_2^{-1} A_4}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = -25 < 0$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Para $j = 2$

$$c_2 - z_2 = c_2 - \mathbf{c_B^t B_2^{-1} A_2}$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = -95 < 0$$

Por tanto, la base actual es óptima y su solución es:

$$x_B^* = B_2^{*-1} b = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 360 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Y

$$\mathbf{z^* = c_B^t x_B^*} = (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 360 \\ 120 \end{pmatrix} = 9000$$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en Lindo del nuevo modelo, cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 20X1+30X2+25X3
s.t.
3X1+5X2+X3<=360
2X1+4X2+X3<=480

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Y como salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 9000.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	55.0000000
X2	0.000000	95.0000000
X3	360.000000	0.0000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	25.0000000
3)	120.000000	0.0000000

NO. ITERATIONS = 1

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

[ENTRA PROBLEMA DE APLICACIÓN]

Problema de aplicación [T2]

Sugarco tiene la capacidad de producir tres tipos de barras de caramelo, cada una de las cuales está elaborada con complemento de azúcar y chocolate. La composición de cada tipo de barra y la utilidad ganada por una barra de caramelo se observa en la tabla A.24. La empresa dispone de 50 onzas de azúcar y 100 onzas de chocolate. Después de definir x_i como la cantidad de barras de caramelo tipo i elaboradas por Sugarco, la empresa debe resolver el MPLC siguiente:

$$Max\ z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3$$

$$s.a$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \quad \text{Restricción de azúcar} \quad \text{con} \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100 \quad \text{Restricción de chocolate}$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[ENTRA TABLA A.24]

Tabla A.24

Barra	Cantidad de azúcar (onzas)	Cantidad de chocolate (onzas)	Utilidad (centavos)
1	1	2	3
2	1	3	7
3	1	1	5

[TERMINA TABLA A.24]

Luego de sumar las variables de holgura s_1 y s_2, la tabla óptima se ilustra en la tabla A.25.

[ENTRA TABLA A.25]

Tabla A.25

C_j		3	7	5	0	0	
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
5	X_3	1/2	0	1	3/2	-1/2	25
7	X_2	1/2	1	0	-1/2	1/2	25
$C_j - z_j$	Z	-3	0	0	-4	-1	300

[TERMINA TABLA A.25]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Con base en lo anterior y considerando la tabla óptima, contestar las preguntas que se formulan a continuación.

a) ¿Para qué valor de utilidad de la barra de caramelo tipo 1, la base actual aún es óptima? Si la utilidad para una barra de caramelo tipo 1 fuera 7 centavos, ¿cuál sería la nueva solución óptima del problema de Sugarco?

b) ¿Para qué valor de utilidad de la barra de caramelo tipo 2, la base actual aún es óptima? Si la utilidad para una barra de caramelo tipo 2 fuera 13 centavos, ¿cuál sería la nueva solución óptima del problema de Sugarco?

c) ¿Para qué cantidades de azúcar disponible la base actual se mantiene óptima?

d) Si hubiera 60 onzas disponibles de azúcar, ¿cuál sería la utilidad de Sugarco? ¿Cuántas de barras de cada tipo se podrían elaborar? ¿Se podría dar respuestas a estas preguntas si solo hubiera disponible 30 onzas de azúcar?

e) Supóngase que una barra de caramelo tipo 1 usa solo 0.5 onzas de azúcar y 0.5 onzas de chocolate. ¿Debe entonces Sugarco producir barras de caramelo tipo 1?

f) Sugarco proyecta producir barras de caramelo tipo 4, pues con este tipo de barra gana 17 centavos; la producción de esta barra requiere 3 onzas de azúcar y 4 onzas de chocolate. ¿Debe Sugarco elaborar barras de caramelo tipo 4?

Solución

a) [ENTRA TABLA A.26]

Tabla A.26

C_j		C_1 7 5	0 0	
C_B	VB	$X_1 X_2 X_3$	$X_4 X_5$	LD
5	X_3	1/2 0 1	3/2 -1/2	25
7	X_2	1/2 1 0	-1/2 1/2	25
$C_j - z_j$	Z	$(C_1 - 6)$ 0 0	-4 -1	300

[TERMINA TABLA A.26]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Para que se cumpla con la prueba de optimalidad, también debe suceder que C1 – 6 ≤ 0, por tanto C1 ≤ 6. Por tanto, $c_1 \in (-\infty, 6]$,al ser los posibles valores de utilidad.

Al comprobar este resultado con Lindo, se tiene que la codificación del modelo es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+7X2+5X3
s.t.
X1+X2+X3 <= 50
2X1+3X2+X3 <= 100
END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP    2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 300.0000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
    X1          0.000000          3.000000
    X2         25.000000          0.000000
    X3         25.000000          0.000000
```

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

```
ROW   SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
 2)         0.000000          4.000000
 3)         0.000000          1.000000

NO. ITERATIONS = 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                    OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE     CURRENT       ALLOWABLE      ALLOWABLE
                COEF        INCREASE       DECREASE
   X1        3.000000      3.000000       INFINITY
   X2        7.000000      8.000000       2.000000
   X3        5.000000      2.000000       2.666667

                    RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW        CURRENT       ALLOWABLE      ALLOWABLE
RHS        INCREASE       DECREASE
  2         50.000000     50.000000      16.666666
  3        100.000000     50.000000      50.000000
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

De esta salida, es posible observar que es el mismo intervalo de optimalidad, dado que al coeficiente actual $C_1 = 3$ lo máximo que se le puede incrementar es 3 y lo máximo que se le puede decrementar es una cantidad muy grande positiva.

Ahora, si la utilidad de la barra 1 fuera 7 en lugar de 3, se tendrían los siguientes datos (véase tabla A.27).

[ENTRA TABLA A.27]

Tabla A.27

C_j		7	7	5	0	0		Θ
C_B	*VB*	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	*LD*	
5	X_3	1/2	0	1	3/2	-1/2	25	50
7	X_2	1/2	1	0	-1/2	1/2	25	50
$C_j - z_j$	*Z*	1	0	0	-4	-1	300	

[TERMINA TABLA A.27]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Al aplicar el algoritmo simplex se genera la iteración que se muestra en la tabla A.28.

[ENTRA TABLA A.28]

Tabla A.28

C_j		7	7	5	0	0	
C_B	VB	$X_1X_2X_3$			X_4X_5		LD
7	X_1	1	0	2	3	-1	50
7	X_2	0	1	-1	-2	1	0
$C_j - z_j$	Z	0	0	-2	-7	0	350

[TERMINA TABLA A.28]

Como se cumple la prueba de optimalidad, se ha llegado a la nueva solución óptima:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^{*'} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y

$$\mathbf{z}^{*'} = 350$$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en Lindo del nuevo modelo, y cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 7X1+7X2+5X3
s.t.
X1+X2+X3 <= 50
2X1+3X2+X3 <= 100

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
```

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 350.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	50.000000	0.000000
X2	0.000000	2.000000
X3	0.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	3.000000
3)	0.000000	2.000000

NO. ITERATIONS = 2

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Conclusión

Como se puede comprobar, se llega a los mismos valores.

b)

[ENTRA TABLA A.29]

Tabla A.29

C_j		3	C_2	5	0	0	
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
5	X_3	1/2	0	1	3/2	-1/2	25
C_2	X_2	1/2	1	0	-1/2	1/2	25
$C_j - z_j$	Z	½(1-C_2)	0	0	-½(15-C_2)	½(5-C_2)	(125+25 C_2)

[TERMINA TABLA A.29]

Para que siga cumpliendo la prueba de factibilidad, también debe suceder que:

½(1-C2) ≤ 0; (1-C2) ≤ 0; C2 ≥ 1

-1/2(15-C2) ≤ 0; (15 – C2) ≥ 0; C2 ≤ 15

½(5-C2) ≤ 0; (5-C2) ≤ 0; C2 ≥ 5

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Por consiguiente, se obtiene el intervalo de optimalidad $c_2 \in [5,15]$, que constituye los posibles valores de utilidad.

Al comprobar este resultado con LINDO, se tiene que la codificación del modelo es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+7X2+5X3
s.t.
X1+X2+X3 <= 50
2X1+3X2+X3 <= 100

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP  2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 300.0000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
    X1          0.000000          3.000000
    X2         25.000000          0.000000
    X3         25.000000          0.000000

ROW   SLACK OR SURPLUS   DUAL PRICES
 2)         0.000000          4.000000
 3)         0.000000          1.000000

NO. ITERATIONS =  2
```

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	3.000000	3.000000	INFINITY
X2	7.000000	8.000000	2.000000
X3	5.000000	2.000000	2.666667

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW RHS	CURRENT INCREASE	ALLOWABLE DECREASE	ALLOWABLE
2	50.000000	50.000000	16.666666
3	100.000000	50.000000	50.000000

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Como se puede observar de esta salida, el intervalo de optimalidad es el mismo; dado que el coeficiente actual $C_2 = 7$ lo máximo que se le puede incrementar es 8 y lo máximo que se le puede decrementar es 2.

Conclusión

Se llega a los mismos valores.

Ahora bien, si la utilidad de la barra 1 fuera 13 en lugar de 7, se tendrían los resultados que se observan en la tabla A.30.

[ENTRA TABLA A.30]

Tabla A.30

C_j		3	13	5	0	0		Θ
C_B	*VB*	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	*LD*	
5	X_3	1/2	0	1	3/2	-1/2	25	
13	X_2	1/2	1	0	-1/2	1/2	25	
$C_j - z_j$	*Z*	-6	0	0	-1	-4	450	

[TERMINA TABLA A.30]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Si se verifica este resultado con Lindo se tiene que la codificación del modelo es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+13X2+5X3
s.t.
X1+X2+X3 <= 50
2X1+3X2+X3 <= 100

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP   2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 450.0000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
    X1          0.000000          6.000000
    X2         25.000000          0.000000
    X3         25.000000          0.000000

ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
 2)          0.000000          1.000000
 3)          0.000000          4.000000


NO. ITERATIONS =  2
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Conclusión

Se llega a los mismos valores.

c)

Recuérdese que la tabla A.31 es óptima.

[ENTRA TABLA A.31]

Tabla A.31

C_j		3 7 5	0 0	
C_B	VB	$X_1X_2X_3$	X_4X_5	LD
5	X_3	1/2 0 1	3/2 -1/2	25
7	X_2	1/2 1 0	-1/2 1/2	25
$C_j - z_j$	Z	-3 0 0	-4 -1	300

[TERMINA TABLA A.31]

Con base en lo revisado antes, es necesario recurrir a:

$$x_B^{*'} = x_B^* + B^{*-1}\Delta b_i \geq \mathbf{0}$$

Y como la restricción de azúcar es la primera, entonces se hace $i = 1$, y se tiene:

$$\mathbf{x_B^{*'}} = \mathbf{x_B^*} + \mathbf{B^{*-1}}\Delta \mathbf{b}_1 \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x_B^{*'}} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

Al realizar operaciones, se plantean las desigualdades siguientes:

$$25 + \tfrac{3}{2}\delta_1 \geq 0 \;\; ; \delta_1 \geq -\tfrac{50}{3}$$

$$25 - \tfrac{1}{2}\delta_1 \geq 0 \; ; \delta_1 \leq 50$$

De donde se obtiene que:

$$\delta_1 \in \left[\tfrac{-50}{3}, 50\right]$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Entonces, el rango de factibilidad para la azúcar es: $b_1 \in \left[\frac{100}{3}, 100\right]$, que se obtiene de sumar el valor de -50/3 y el valor de b_1, que es 50; y nuevamente sumar 50 más el valor de b_1.

Si se comprueba este resultado con LINDO, se tiene que la codificación del modelo es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+7X2+5X3
s.t.
X1+X2+X3 <= 50
2X1+3X2+X3 <= 100

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 300.0000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
    X1          0.000000        3.000000
    X2         25.000000        0.000000
    X3         25.000000        0.000000

ROW   SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
 2)         0.000000            4.000000
 3)         0.000000            1.000000

NO. ITERATIONS = 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                    OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE        CURRENT         ALLOWABLE       ALLOWABLE
                  COEF          INCREASE        DECREASE
    X1          3.000000        3.000000        INFINITY
    X2          7.000000        8.000000        2.000000
    X3          5.000000        2.000000        2.666667
```

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT	ALLOWABLE	ALLOWABLE
RHS	INCREASE	DECREASE	
2	50.000000	50.000000	16.666666
3	100.000000	50.000000	50.000000

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

De esta salida, se observa que es el mismo intervalo de factibilidad; dado que el valor actual de b_1 = 50, lo máximo que se le puede incrementar es 50 y lo máximo que se le puede decrementar es 16.33333 = 50/3.

Conclusión

Se llega a los mismos valores.

d)

Si hubiera solo 60 onzas disponibles de azúcar, entonces para calcular la utilidad de Sugarco se tendrían que llevar a cabo los siguientes cálculos:

La matriz inversa de variables básicas es: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y el nuevo vector de recursos sería: $\begin{pmatrix} 60 \\ 100 \end{pmatrix}$.

De este modo, la nueva solución óptima sería:

Así, el número de barras que se podría elaborar la empresa sería: 20 del tipo 2 y 40 del tipo 3.

El valor óptimo de la utilidad sería:

$$\mathbf{z}^{*'} = (5 \;\; 7)\begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} = 340$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Al comprobar este resultado con Lindo, se tiene que la codificación del modelo es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+7X2+5X3
s.t.
X1+X2+X3 <= 60
2X1+3X2+X3 <= 100

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

```
[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 340.0000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
    X1          0.000000          3.000000
    X2         20.000000          0.000000
    X3         40.000000          0.000000


ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
 2)          0.000000          4.000000
 3)          0.000000          1.000000

NO. ITERATIONS = 2
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Conclusión

Se llega a los mismos valores.

El número de barras que se podría elaborar sería: 20 del tipo 2 y 40 del tipo 3.

Ahora bien, si hubiera 30 onzas de azúcar, sería posible dar respuesta a las preguntas anteriores, dado que el intervalo de factibilidad de b_1 incluye a 30.

e)

De acuerdo con la redacción de este inciso, el modelo modificado queda definido como:

$$Max\ z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3$$

$$s.a$$

$$\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 \le 50 \quad \text{Restricción de azúcar} \qquad \text{con} \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$$\tfrac{1}{2}x_1 + 3x_2 + x_3 \le 100 \quad \text{Restricción de chocolate}$$

Esto equivale a llevar a cabo un análisis de sensibilidad para una columna de una variable no básica, dado que x_1 no está presente en la solución óptima. Dicho análisis de sensibilidad se desarrolla como se vio previamente.

Así que supóngase que la columna $\mathbf{p}_1^t = (1 \quad 2)$ cambia a $\mathbf{p}_1^{'t} = (\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2})$. Además de considerar que la base actual aún es óptima. Con esta perturbación en la columna de la variable no básica x_1, ¿Sugarco debe producir barras de caramelo tipo 1?
Si se calcula $c_1 - z_1$ tenemos:

$$c_1 - z_1 = c_1 - \mathbf{c_B^t B^{*-1} p}_1$$

$$c_1 - z_1 = 3 - (5 \quad 7)\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 3 - (5 \quad 7)\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = \tfrac{1}{2} > 0$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Por tanto, la base actual cambiará, al igual que la solución y el valor óptimos de la función a optimizar;así que la variable entrante será x_1. A continuación, se actualiza la columna de esta variable mediante:

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y si se actualiza el vector de recursos, se tiene:

$$\mathbf{x}_\mathbf{B}^* = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Así que con la regla del mínimo cociente determinamos la variable saliente:

$\theta = \min\left\{\frac{25}{\frac{1}{2}}, -\right\} = 50$, por tanto $x_s = x_3$

Como se recordará, el conjunto de subíndices de variables básicas y no básicas son: $\beta = \{3,2\}$ y $\eta = \{1,4,5\}$, respectivamente. Así que, como la variable entrante es x_1 y la saliente es x_3, entonces el nuevo conjunto de subíndices de variable básicas y no básicas son: $\beta = \{1,2\}$, y $\eta = \{3,4,5\}$, respectivamente. Por lo anterior, la nueva matriz de variables básicas queda:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{N} = (\mathbf{p}_3\ \mathbf{p}_4\ \mathbf{p}_5)$$

La nueva inversa de la matriz de variables básicas es:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{t} = (3 \quad 7)$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Ahora, se revisa si con esta base podemos restaurar la optimalidad.

Para $j = 3$

$$c_3 - z_3 = c_3 - \mathbf{c_B^t B^{*-1} p}_3$$

$$c_3 - z_3 = 5 - (3 \quad 7)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 5 - (3 \quad 7)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = -1 < 0$$

Para $j = 4$

$$c_4 - z_4 = c_4 - \mathbf{c_B^t B^{*-1} p}_4$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (3 \quad 7)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (3 \quad 7)\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$c_5 - z_5 = \frac{-11}{2} < 0$$

Para $j = 5$

$$c_5 - z_5 = c_5 - \mathbf{c_B^t B^{*-1} p}_5$$

$$c_5 - z_5 = 0 - (3 \quad 7)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_5 - z_5 = 0 - (3 \quad 7)\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$c_5 - z_5 = \frac{-1}{2} < 0$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Como se puede ver, se ha restaurado la prueba de optimalidad; por tanto, la nueva solución óptima es:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^{*'} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Y el nuevo valor óptimo de la función objetivo es:

$$\mathbf{z}^{*'} = (3 \quad 7)\begin{pmatrix} 50 \\ 25 \end{pmatrix} = 325$$

Si se comprueba este resultado con Lindo, se tiene que la codificación del modelo es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+7X2+5X3
s.t.
0.5X1+X2+X3 <= 50
0.5X1+3X2+X3 <= 100

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 325.0000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
    X1        50.000000          0.000000
    X2        25.000000          0.000000
    X3         0.000000          1.000000

ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
 2)          0.000000          5.500000
 3)          0.000000          0.500000

NO. ITERATIONS = 2
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Conclusión

Se llega a los mismos valores.

f)

De acuerdo con la redacción de este inciso, el modelo modificado queda definido como:

$$Máx\ z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 17x_4$$

$$s.a$$

$$\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \le 50 \quad \text{Restricción de azúcar}$$

$$\tfrac{1}{2}x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \le 100 \quad \text{Restricción de chocolate} \qquad \text{con} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

Es decir, el análisis de sensibilidad consiste en agregar una nueva variable; de las condiciones, la nueva variable es x_4 , la cual contiene los parámetros siguientes: $c_4 = 17$ y $\mathbf{p}_4^t = (3 \quad 4)$. Además de suponer que la base actual aún es óptima, con la introducción de la nueva variable, ¿Sugarco deberá producir barras de caramelo del tipo 4?

Al calcular $c_4 - z_4$ tenemos:

$$c_4 - z_4 = c_4 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^t \mathbf{B}^{*-1} \mathbf{p}_4$$

$$c_4 - z_4 = 17 - (5 \quad 7)\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 17 - (5 \quad 7)\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 1 > 0$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

De acuerdo con este resultado, la base actual cambiará; entonces aplicamos el algoritmo simplex con arreglo tabular para restaurar la optimalidad y, por ende, determinar la nueva base y el nuevo valor óptimo de la función objetivo.

Al aplicar el algoritmo simplex con arreglo tabular, la *variable entrante* es x_4. Ahora bien, para determinar la variable saliente, hacemos lo siguiente:

1. Se actualiza la columna entrante mediante:

$$\hat{\mathbf{p}}_4 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{p}_4$$

$$\hat{\mathbf{p}}_4 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Enseguida, se agregan estos datos en la tabla óptima, tal como se observa en la tabla B.32.

[ENTRA TABLA A.32]

Tabla A.32

C_j		3	7	5	17	0	0		
C_B	*VB*	$X_1X_2X_3X_4$				X_5X_6		*LD*	Θ
5	X_3	1/2	0	1	5/2	3/2	-1/2	25	10
7	X_2	1/2	1	0	½	-1/2	1/2	25	50
$C_j - z_j$	*Z*	-3	0	0	1	-4	-1	300	

[TERMINA TABLA A.32]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Nótese que la tabla A.32 se genera usando la misma tabla que cuando se encontró la solución óptima del modelo original, solo que se le agregó la nueva columna de la variable x_4 actualizada, así como la correspondiente al valor $c_4 - z_4 = 1$, antes calculado.

Al aplicar el algoritmo simplex, entonces se genera la tabla A.33.

[ENTRA TABLA A.33]

Tabla A.33

C_j		3	7	5	17	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD	Θ
17	X_4	1/5	0	2/5	1	3/5	-1/5	10	
7	X_2	2/5	1	-1/5	0	-4/5	3/5	20	
$C_j - z_j$	Z	-16/5	0	-2/5	0	-23/5	-4/5	310	

[TERMINA TABLA A.33]

Por tanto, se restaura la optimalidad. De este modo, la nueva solución y el nuevo valor óptimos de la función son:

$$\mathbf{x_B^{*'}} = \begin{pmatrix} x_4^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{z}^{*'} = 310$$

Con base en este resultado, Sugarco debe producir barras del tipo 4.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Si se comprueba este resultado con Lindo, se tiene que la codificación del modelo es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+7X2+5X3+17X4
s.t.
X1+X2+X3+3X4 <= 50
2X1+3X2+X3+4X4 <= 100

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP  2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 310.0000

VARIABLE      VALUE        REDUCED COST
   X1          0.000000        3.200000
   X2         20.000000        0.000000
   X3          0.000000        0.400000
   X4         10.000000        0.000000

ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
  2)          0.000000         4.600000
  3)          0.000000         0.800000

NO. ITERATIONS = 2
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Conclusión

Se llega a los mismos valores.

[TERMINA PROBLEMA DE APLICACIÓN]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Referencias bibliográficas [T1]

Arreola J. (2003). *Programación lineal: Una introducción a la toma de decisiones cuantitativa.* México: Thomson.

Bueno G. (1987). *Introducción a la programación lineal y al análisis de sensibilidad. México: Trillas.*

Gaytán J. (1992). *Principios de modelado y métodos de optimización Parte I: Programación lineal.* México: ITESM Campus Toluca.

Winston W. (2005). *Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos.* México: Thomson.

Referencias electrónicas [T1]

http://books.google.com.mx/books?id=pqkQPu7jhV0C&pg=PA131&dq=sensibilidad+en+coeficiente+de+funcion+objetivo&hl=es&sa=X&ei=kgD4UZjaOIvc9QS-8oHAAQ&ved=0CDIQ6AEwAQ#v=onepage&q=sensibilidad%20en%20coeficiente%20de%20funcion%20objetivo&f=false

http://books.google.com.mx/books?id=VqjhIZhsITsC&pg=PA351&dq=sensitivity+analysis+in+right-hand+sides&hl=es&sa=X&ei=2Vr4UdPUK8i8qgGEjoBg&ved=0CF4Q6AEwBQ#v=onepage&q=sensitivity%20analysis%20in%20right-hand%20sides&f=false

http://books.google.com.mx/books?id=10dI4EnerKAC&pg=PA157&dq=sensibilidad+a%C3%B1adiendo+nueva+variable&hl=es&sa=X&ei=u-v4UdujM4P88gS2rIAQ&ved=0CFYQ6AEwCA#v=onepage&q=sensibilidad%20a%C3%B1adiendo%20nueva%20variable&f=false

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

Aplicación de modelos de redes en la solución de problemas para la toma de decisiones

Modelo de redes aplicado al problema de programación de la producción [t1]

Un problema de programación de la producción puede verse como un problema de mezcla de producción para varios periodos hacia el futuro. Se quieren determinar los niveles de producción que permitirán a la compañía obtener el mínimo costo (o la máxima ganancia), cumpliendo con los requerimientos de las limitaciones en mano de obra, maquinaria, materiales, espacio de almacenamiento, requisito de demandas, etc. En general, los problemas de programación de la producción tienen naturaleza recurrente, es decir que se presentan un periodo tras otro, solo que con algunas variaciones en ciertos datos, como por ejemplo en las demandas, o en las disponibilidades de algunos recursos.

Lo anterior quiere decir que estos problemas requieren una toma de decisiones con la misma frecuencia. Por este motivo, los modelos de programación lineal se usan extensivamente en este campo, pues una vez que un modelo fue resuelto para un periodo, basta con repetir la estrategia de solución para los datos del nuevo periodo y así obtener recomendaciones acerca del programa óptimo de producción en su conjunto.

[INICIA PROBLEMA]

Problema resuelto

Supongamos que un fabricante debe cumplir con los siguientes compromisos para el primer trimestre:

[entra tabla]

Tabla 3.1

Mes	Enero	Febrero	Marzo
Unidades	10.000	30.000	20.000

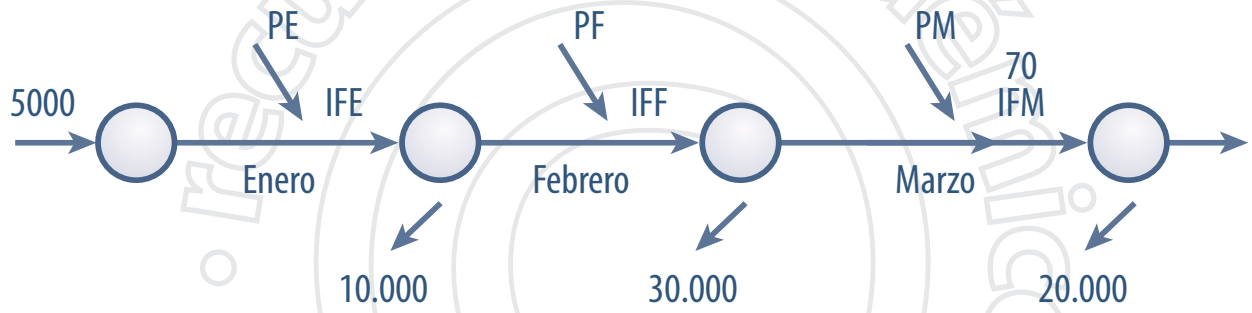
[fin de tabla]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

La capacidad mensual de producción de la planta es de 20 000 unidades. El costo unitario de producción varia cada mes del siguiente modo: enero $10, febrero $9 y marzo $12. La compañía estima en $3 el costo de almacenamiento de cada unidad que tenga en inventario en la bodega al cierre del mes. La capacidad de almacenamiento de la bodega es de 22 000 unidades. La empresa tiene actualmente en el inventario 500 unidades y desea tener 700 al final del periodo.

El problema a resolver consiste en determinar el programa de producción mensual que minimiza los costos totales del trimestre. Para efectos de la contabilización del inventario, supone que la producción se realiza durante todo el mes y el despacho se efectúa el último día de mes (véase figura 3.1).

[entra figura]



<<injertos de figura: 5000 PE IFE Enero 10.000 PF IFF Febrero 30.000 PM 70 IFM Marzo 20.000>>

Figura 3.1
[fin de figura]

Solución

Vamos a definir las siguientes variables de decisión:
P_i : Cantidad de artículos producidos en el mes i.
IF_i: Unidades en el inventario al final del mes i.

Sujeto a las siguientes restricciones:

1. Restricciones para la capacidad de producción por mes:

[entra tabla]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tabla 3.2

Enero	PE ≤ 20.000
Febrero	PF ≤ 20.000
Marzo	PM ≤ 20.000

2. Restricciones para los niveles de inventarios actual y al final del periodo de planeación:

[entra tabla]

Tabla 3.3

Inventario inicial (final diciembre)	IFD = 500
Inventario final (marzo)	IFM = 700

3. Restricciones de balance para el cubrimiento de la demanda comprometida por mes:

[entra tabla]

Tabla 3.4

Enero	IFD + PE =10.000 + IFE
Febrero	IFE + PF = 30.000 + IFF
Marzo	IFF + PM = 20.000 + IFM

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4. Restricciones para la capacidad de almacenamiento de la bodega al final de cada mes:

[entra tabla]

Tabla 3.5

Enero	IFD + PE ≤ 22.000
Febrero	IFE + PF ≤ 22.000
Marzo	IFF + PM ≤ 22.000

La función objetivo para minimizar el total de los costos se formula de la siguiente manera:

$Z = 10(XE) + 9(XF) + 12(XM)$
(costo de producción)

$+ 3(IFE + IFF + EFM)$
(del costo de almacenamiento)

[TERMINA PROBLEMA]

Modelo de redes aplicado para el programa de corte óptimo [T1]

En seguida se presenta un problema resuelto para el modelo de redes aplicado para el programa de corte óptimo.

[INICIA PROBLEMA]

Problema resuelto

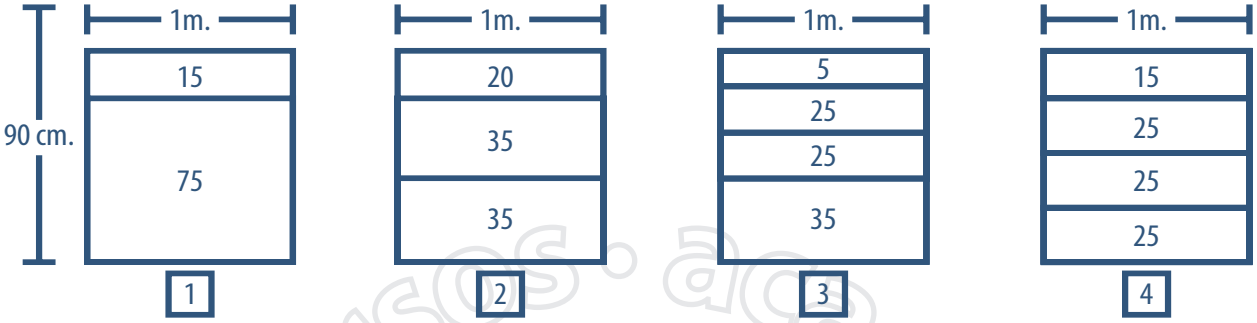
Una empresa que produce papel en rollos de 90 cm de ancho y 100 m de largo, recibe pedidos para despachar rollos de dimensiones menores. Por tanto se requiere cumplir con las siguientes ordenes de producción: (200 m de ancho 75 cm), (500 m de ancho 35 cm) y (300 metros de ancho 25 cm). La compañía desea determinar a partir de los rollos de tamaño estándar, el mejor programa de corte posible de manera que se minimice el desperdicio de papel.

Solución

La solución a este problema implica despachar dos o más rollos para obtener la longitud pedida de cada uno de los anchos, lo anterior debido a que el rollo estándar solo mide 100 m de largo. Es fácil verificar que el papel que se desperdicie de todo rollo sea inferior a 25 cm. De lo anterior sería importante determinar todas las formas en que se puede cortar un rollo de ancho de 90 cm, para obtener anchos de 75, 35 y 25 cm. Si tomamos como referencia un metro del rollo del ancho estándar de 90 cm, se obtendrán las siguientes posibles combinaciones de formas de corte:

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[entra figura]



<<Injertos de figura 90 cm 1 m 15 75 1 1 m 20 35 35 2 1 m 5 25 25 35 3 1 m 15 25 25 25 4>>

Figura 3.2

[fin de figura]

Del gráfico anterior, observamos que hay cuatro modalidades de corte. Para cada combinación se obtiene una configuración de anchos necesarios con un desperdicio específico según el caso. Las características para cada uno de las cuatro combinaciones de cortes posibles se resumen en la tabla 3.6.

[entra tabla]

Tabla 3.6

Forma de corte	Metros de ancho			Desperdicio
	0.75	0.35	0.25	
1	1	0	0	0.15
2	0	2	0	0.20
3	0	1	2	0.05
4	0	0	3	0.15

[fin de tabla]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación podemos definir las variables de decisión del modelo como sigue:

Xi: número de metros del rollo estándar (90 cm) cortados en la modalidad i.

Sujeta a las siguientes restricciones:

1. Restricciones de demanda a cubrir de cada tipo de ancho (metros):

$1X1 \geq 200$
$2X2 + 1X3 \geq 500$
$2X3 + 3X4 \geq 300$
con $Xi \geq 0$ (Restricciones de no negatividad)

Función objetivo: minimizar desperdicio: $0.15X1 + 0.20X2 + 0.05X3 + 0.15X4$

[TERMINA PROBLEMA]

Cabe mencionar que el modelo de programación lineal podría generar soluciones no enteras en las variables de decisión. Por tanto es necesario considerar para este tipo de modelos el uso de la programación entera.

Modelo de redes para el problema de transporte número 2 [T2]

Los modelos de transporte son una de las más conocidas aplicaciones de la programación lineal. Se presentan cuando por ejemplo necesitamos tomar decisiones con respecto a las mejores rutas de distribución de artículos desde m centros productivos hasta n bodegas o almacenes.

[INICIA PROBLEMA]

Problema resuelto

Una compañía embotelladora que tiene plantas ubicadas en A, B y C con las siguientes capacidades (véases tabla 3.14):

[entra tabla]

Tabla 3.14

Planta	Planta A	Planta B	Planta C
Producción (caja/mes)	100.000	120.000	100.000

[fin de tabla]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

La empresa surte a cuatro distribuidores localizados en diferentes zonas del país. La demanda esperada de cada uno de los distribuidores se observa en la tabla 3.15.

[entra tabla]

Tabla 3.15

Distribuidor	D1	D2	D3	D4
Demanda (caja/mes)	50.000	70.000	62.000	120.000

[fin de tabla]

Los costos de transportación unitarios por caja desde cada planta hacia cada distribuidor se aprecian en la tabla 3.16.

[entra tabla]

Tabla 3.16

	Plantas		
Distribuidores	**PA**	**PB**	**PC**
D1	100	200	300
D2	120	150	200
D3	150	200	150
D4	210	180	130

[fin de tabla]

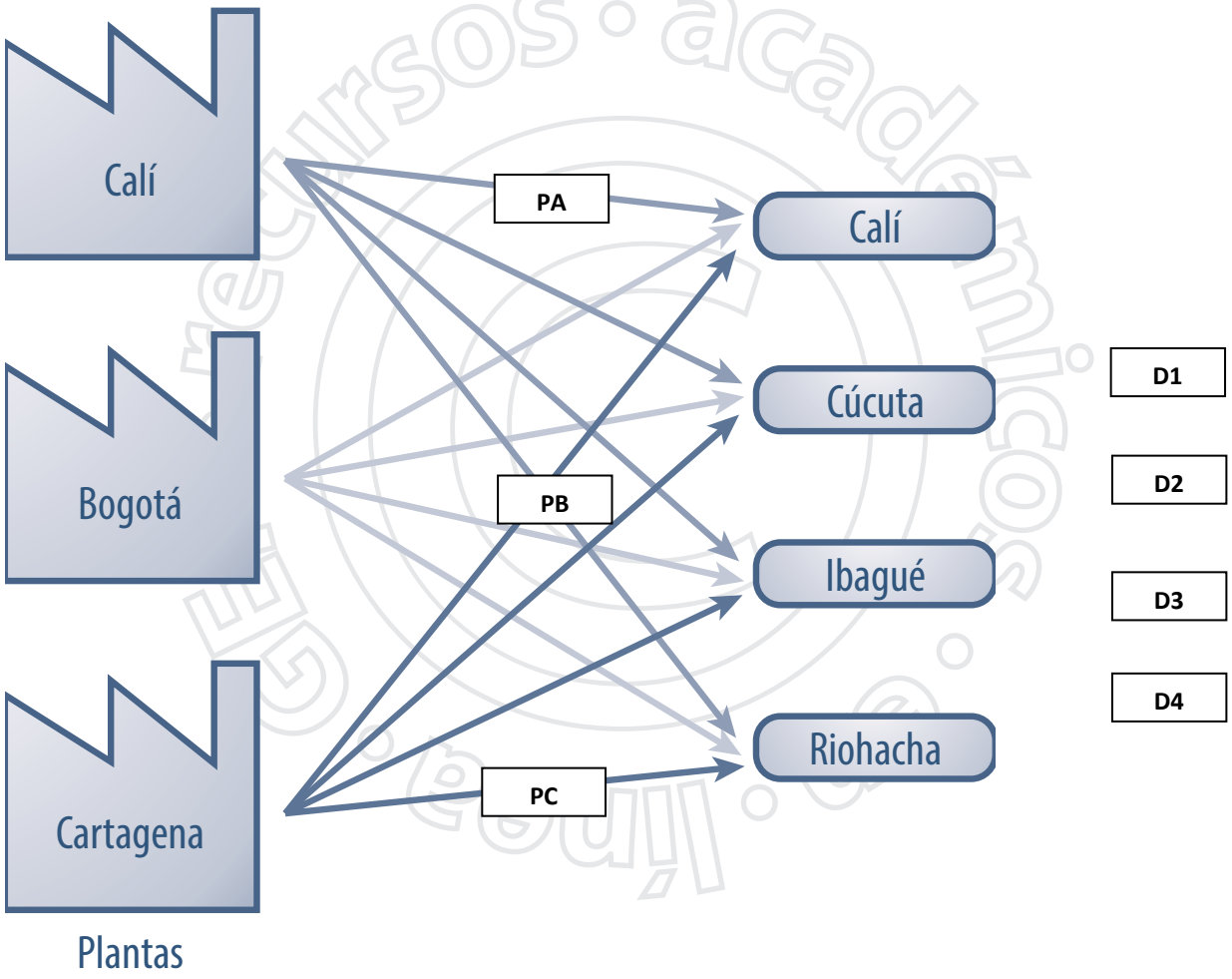
D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

¿De qué manera deben programarse los envíos desde las plantas hacia los distribuidores para tener el mínimo costo de transportación?

Solución

El problema puede esquematizarse como se muestra adelante.

[entra figura]



<<Injertos de figura: Medellín Bogotá Cartagena Plantas Cali Cúcuta Ibagué Riohacha Distribuidoras>>

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Figura 3.4
[fin de figura]

La definición de las variables de decisión es como sigue:
Xij: Cantidad de cajas enviadas de la planta i hasta la bodega j.

Sujeta a:

1. Restricciones de capacidad en las plantas:

(Planta A): XMCA + XMCU + XMI + XMR $\leq$100.000
(Planta B): XBCA + XBCU + XBI + XBR $\leq$120.000
(Planta C): XCCA + XCCU + XCI + XCR $\leq$100.000

2. Restricciones para las demandas de los distribuidores:

XMCA + XBCA + XCCA $\geq$ 50.000
XMCU + XBCU + XCCU $\geq$ 70.000
XMI + XBI + XCI $\geq$ 62.000
4 XMR + XBR + XCR $\geq$ 120.000
Xij$\geq$0 (restricciones de no negatividad)

Función objetivo:

Minimizar costo (*Z*) = 100XMCA + 120XMCU + 150XMI + 210XMR + 200XBCA + 150XBCU + 200XBI + 180XBR + 300XCCA + 200XCCU + 150XCI + 130XCR

[TERMINA PROBLEMA]

Dado que el objetivo del problema anterior es minimizar el costo total de transporte, es de esperarse que a cada distribuidor se le envíe justamente lo que necesita, motivo por el cual todas las restricciones de demanda se cumplirán como si fueran igualdades. Debe tenerse en cuenta que cuando la demanda total es inferior a la oferta total, un problema de transporte tendría una solución en la cual se satisfacen todas las demandas sobrando capacidad en las plantas, pero cuando la demanda total es superior a la oferta total, el problema no tendría solución.

Para este último caso se tendría que efectuar un balanceo de oferta y demanda totales, lo cual consiste en agregar al modelo una planta ficticia con capacidad similar a la que haga falta para igualar la demanda total.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[T2] Variante discreta para el modelo de redes aplicado al transporte

• Modelo de transporte: minimizar el costo total de transporte entre los nodos de origen y los de destino, satisfaciendo la demanda, y considerando la capacidad. Si no hay balance entre la capacidad y la demanda entonces se formula con desigualdades.

$$\text{Mín} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1..n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1..m$$

$$x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \in Z$$

xij: unidades a enviar del nodo i al nodo *j*.
cij: costo unitario de transporte del nodo *i* al nodo *j.*
ai: unidades de capacidad en el nodo *i.*
bj: unidades de demanda en el nodo *j.*

• Modelo de flujo de red con costo mínimo: embarcar los recursos disponibles a través de la red y considerando todos los posibles nodos con oferta o capacidad para satisfacer la demanda a un costo mínimo.

$$\text{Mín} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = b_i, \qquad j = 1..m$$

$$x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \in Z$$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

xij: unidades enviadas del nodo *i* al nodo *j* (flujo).
cij: costo unitario de transporte del nodo *i* al nodo *j*.
bi: capacidad o demanda disponible en el nodo *i*.
capacidad: bi > 0
demanda: bi < 0
transbordo: bi = 0

Modelo de redes aplicado al problema de costo fijo número 2 [T2]

A continuación se muestra un ejemplo resuelto con detalle para este caso de costo fijo.

[INICIA PROBLEMA]

Problema resuelto

Un negocio debe cubrir el gasto de ciertos costos fijos como renta, electricidad, seguros, nómina, gastos de publicidad, etc., que ocurren naturalmente de forma indiferente al volumen de venta del negocio. No obstante, también es previsible que los gastos fijos no sean estáticos ya que pueden variar de manera imprevisible de acuerdo con cambios significativos en la operación. Así entonces, un costo indirecto podemos decir que solo es válido para un rango específico de operación. Por ejemplo, un costo indirecto será diferente cuando el volumen de producción sea 500 unidades que si fuera 500 000.

Solución

Supongamos entonces que dicha empresa manufacturera está planeando su siguiente ciclo de producción. La compañía puede producir tres productos, los cuales requieren tres procesos de manufactura: maquinado, triturado y ensamble. En la tabla 3.17 se muestra la cantidad de horas requeridas para producir cada producto en cada uno de los tres procesos. Así también se muestra la capacidad total de horas disponibles para cada una de las tres operaciones.

[Entra tabla]

Tabla 3.17 Datos operativos para el problema de decisión del costo fijo.

Corregir: operación con acento, unidad y disponibles en bajas.

[fin de tabla]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

La empresa ha estimado que la contribución marginal de cada unidad de producto 1 es de $48 dólares. En el caso de los productos 2 y 3 tenemos que estos datos son $55 y $50 dólares, respectivamente. Los costos fijos de producción para los productos 2 y 3 son de $800 y $900 dólares mensuales, respectivamente. Sin embargo, la manufactura del producto 1 requiere una modificación en la línea de producción lo cual implica enfrentar un costo adicional de $100 dólares mensuales. Las ventas estimadas cubren el total de la capacidad de manufactura. El planteamiento del problema consiste en identificar la mezcla de productos que pueda lograr maximizar la utilidad obtenida por la compañía.

Para modelar el planteamiento del problema vamos a utilizar seis variables de decisión. Tenemos aquí tres variables para determinar el volumen a producir de cada uno de los tres productos. Adicionalmente tenemos tres variables binarias las cuales nos van a ser útiles para moldear la aplicación del costo fijo para cada uno de las tres líneas de producción en cuestión. Así entonces tenemos la formulación de la siguiente manera:

X_i = Cantidad del producto i a ser producido.
Donde: $X_i \geq 0, i = 1,2,3$.

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{si } X_i > 0 \\ 0, & \text{si } X_i = 0 \end{cases}$$

Primero debemos asegurar que las relaciones entre X_i y Y_i se den. La implementación de dicha relación se hará mediante la aplicación de las siguientes restricciones:

$$X_1 \leq M_1 Y_1$$
$$X_2 \leq M_2 Y_2$$
$$X_3 \leq M_3 Y_3$$

La constante M_i que ha sido incluida en la parte derecha de la restricción tiene la finalidad de expresar el valor del límite superior que puede ser calculado para las variables X_i. Es fácil comprender que el valor asignado de las constantes M_i sean números grandes; por ejemplo M_i =1e6. También es fácil verificar que si la variable X_i asume un valor diferente que 0, entonces la variable Y_i deberá asumir el valor 1. Alternativamente, si la variable X_i = 0, entonces la variable Y_i para cumplir la restricción deberá calcular un valor de 0 o de 1. Ahora bien que es lo que finalmente provoca que el modelo se decida por elegir en este último caso el valor de 0 para Y_i. La respuesta a esto está en la orientación de la función objetivo. En nuestro caso recordemos que buscamos minimizar el gasto fijo, por tanto es fácil verificar que el modelo va a elegir el valor mínimo posible para las variables binarias Y_i. Por tanto, podemos concluir que para cada variable X_i = 0, el modelo asignara Y_i = 0 porque además de que es factible también resulta en un mejor valor para la función objetivo en cuestión.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Ahora bien, identificar el valor preciso para cada M_i puede ser una buena idea en lugar de tan solo dejar expresado arbitrariamente un límite superior suficientemente alto. S_i acaso en nuestro caso de estudio tuviéramos la información acerca de que la compañía solo puede manufacturar y/o vender hasta un límite de 60 unidades del producto X_1, así entonces podríamos definir M_1=60.

En nuestro caso de estudio no tenemos precisados explícitamente los límites superiores para las variables X_i. No obstante, en algunos casos es posible derivarlos, lo haremos a continuación. Consideremos la variable X_1 de nuestro problema. Si quisiéramos obtener el límite superior para dicha variable tan solo hace falta asumir que la compañía producirá 0 unidades de los productos X_2 y X_3. Ahora bien si verificamos la capacidad de producción en la operación de maquinado podremos calcular que la cantidad máxima del producto X_1 será igual a 600 horas dividido por 2 horas por producto esto nos da entonces una capacidad máxima de 300 unidades para X_1. Si aplicamos el mismo procedimiento para la operación de triturado obtenemos entonces 300/6=50 unidades para X_1. En la operación de ensamble tenemos 400/5=800 unidades de X_1. Por tanto es ahora fácil verificar que el número máximo de unidades de X_1 que la compañía puede producir es igual a 50.

Si aplicamos el mismo concepto para el resto de los productos en cada una de las operaciones tenemos que el máximo de unidades que es posible producir para X_2: Mín$\left(\frac{600}{3},\frac{300}{3},\frac{400}{6}\right)$= 66.67, y el máximo de unidades de X_3 es: Mín $\left(\frac{600}{6},\frac{300}{4}\text{ y }\frac{400}{2}\right)$ = 75. Por tanto podemos concluir especificando los limites superiores para X_1,X_2 *y* X_3 como M_1 = 50, M_2 = 67 y M_3 = 75. Luego entonces podemos redefinir nuestras restricciones de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned} X_1 - 50Y_1 \le 0 \\ X_2 - 67Y_2 \le 0 \\ X_3 - 75Y_3 \le 0 \end{aligned}\right\}$$

A continuación tenemos la definición de las restricciones que son requeridas para limitar la capacidad de horas disponibles para producción en cada una de las tres operaciones de manufactura involucradas:

$$2X_1 + 3X_2 + 6X_3 \le 600\}$$ Operación de maquinado.

$$6X_1 + 3X_2 + 4X_3 \le 300\}$$ Operación de trituración.

$$5X_1 + 6X_2 + 2X_3 \le 400\}$$ Operación de ensamble.

Para la definición de la función objetivo tenemos lo siguiente:

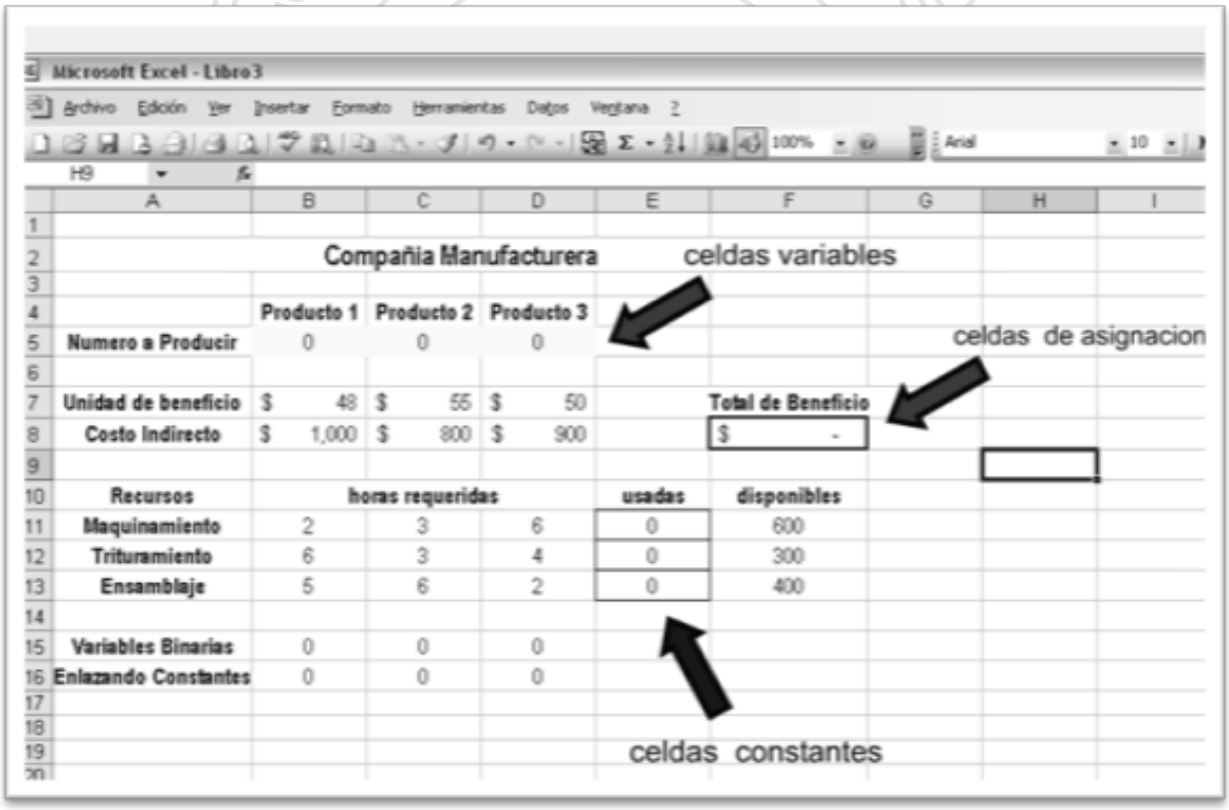
Máx: $48X_1 + 55X_2 + 50X_3 - 1000Y_1 - 800Y_2 - 900Y_3$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Los primeros tres elementos en la función objetivo calculan el ingreso total generado por la producción y venta de los tres productos. Los tres términos restantes de la función objetivo sustraen los costos fijos de manera específica para cada uno de los tres productos producidos. Por ejemplo, si X_1 asume un valor positivo, entonces la variable binaria Y_1 deberá calcular un valor unitario indicando a la función objetivo que corresponde deducir $1 000 para reflejar el costo fijo correspondiente. Por otra parte, si X_1 es igual a 0, entonces Y_1 será 0 también, indicando que no hay costo fijo que cubrir. Y así se hace sucesivamente para X_2, Y_2 y X_3, Y_3.

La implementación del modelo puede ser revisado en la figura 3.10. En el rango de celdas B5:D5 están las variables X_1, X_2 y X_3, mientras que en el rango de celdas B15:D15 representa a las variables binarias Y_1, Y_2, Y_3. Los coeficientes de la función objetivo se encuentran en el rango de celdas B7:D8. La función objetivo está en la celda F8.

[entra figura]



D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

<<Injertos: Compañía manufacturera celdas variables Producto 1 Producto 2 Producto 3 Número a producir 0 0 0
Unidad de beneficio $ 48 $ 55 $ 50 Total de beneficio
Celdas de asignación Costo indirecto $ 1 000 $ 800 $ 900 Recursos horas requeridas usadas disponibles Maquinamiento 2 3 6 0 600 Trituramiento 6 3 4 0 300 Ensamblaje 5 6 2 0 400 Variables binarias 0 0 0 Enlazando constantes 0 0 0 celdas constantes>>

Figura 3.10 Modelo para el problema de decisión del costo fijo.
[fin de figura]

En la tabla 3.18 se precisan las siguientes formulaciones que corresponden a la implementación del modelo en Excel.

[entra tabla]

Tabla 3.18

Celda	Fórmula	Copiar a
B16	B5-MIN($F$11/B11,$F$12/B12,$F$13/B13)*B15	C16:D16
E11	SUMPROD(B11:D11,$B$5:$D$5)	E12:E13
F8	SUMPROD(B7:D7,B5:D5) – SUMPROD(B8:D8,B15:D15)	–

[fin de tabla]

El rango de celdas B11:D13 contiene los coeficientes para los requerimientos unitarios de cada producto y en cada operación. Las constantes de capacidad para las operaciones de maquinado, triturado y ensamble se especifican en el rango de celdas F11 a la F13. Por su parte, el requerimiento de capacidad resultante para cada operación se expresa en el rango de celdas E11:E13. Finalmente, la implementación de las restricciones que relacionan a las variables Xi y Yi se expresa en el rango de celdas B16: D16 a través del uso de la fórmula:

$$= B16 - MIN(\$F\$11/B11,\$F\$12/B12,\$F\$13/B13) * B15$$

Esta fórmula está copiada en el rango de celdas C16:D16. Como se puede apreciar en la formulación anterior, en lugar de definir valores arbitrarios para M_i, implementamos fórmulas que automáticamente calculen los valores mínimos necesarios para cada M_i. En la figura 3.11 se muestra el diálogo de Solver, el cual indica los parámetros requeridos para resolver el modelo. Nótese que las variables X_i y Y_i aparecen en el rango de celdas B5:D5 y B15:D15, respectivamente.

[entra figura]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Figura 3.11 Ejemplo de un diálogo de Solver.
[fin de figura]

[entra figura]

	A	B	C	D	E	F
1						
2			Compañia Manufacturera			
3						
4		Producto 1	Producto 2	Producto 3		
5	Numero a Producir	0	55.555555	33.333333		
6						
7	Unidad de beneficio	$ 48	$ 55	$ 50		Total de Beneficio
8	Costo Indirecto	$ 1,000	$ 800	$ 900		$ 3.022
9						
10	Recursos	horas requeridas			usadas	disponibles
11	Maquinamiento	2	3	6	366.6667	600
12	Trituramiento	6	3	4	300	300
13	Ensamblaje	5	6	2	400	400
14						
15	Variables Binarias	0	1	1		
16	Enlazando Constantes	0	-11.111111	-41.666667		
17						

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

<<Injertos: Compañía manufacturera Producto 1 Producto 2 Producto 3 Número a producir 0 55.555555 33.333333

Unidad de beneficio $ 48 $ 55 $ 50 Total de beneficio $ 3.022
Costo indirecto $ 1 000 $ 800 $ 900 Recursos horas requeridas usadas 366.6667 300 400 disponibles 600 300 400 Maquinamiento 2 3 6 Trituramiento 6 3 4 Ensamblaje 5 6 2 Variables binarias 0 1 1 Enlazando constantes 0 −11.111111 −41.666667>>

Figura 3.12 Solución óptima para el problema.

[fin de figura]

El análisis de la solución muestra que la compañía debe producir cero unidades del producto 1, 55.55 unidades del producto 2 y 33.33 unidades del producto 3 (*X1* = 0, *X2* = 55.55, *X3* = 33.33). Es fácil verificar que se han asignado valores binarios consistentes en el rango de celdas B15:D15 (*Y1* = 0, *Y2* = 1, *Y3* = 1). El rango de celdas B16:D16 indica las cantidades por las cuales los valores para *X1*, *X2* y *X3* (en el rango de celdas B5:D5) están por debajo del límite superior. Si redondeamos los valores de *X2* y *X3* a 55 y 33, obtenemos una solución entera con una función objetivo de $2 975. Para resolver el modelo con una solución óptima entera, podemos agregar una restricción de integralidad para condicionar las variables *Xi* y después volver a ejecutar el modelo. Los resultados se muestran en la figura 3.13.

[ENTRA FIGURA]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

	A	B	C	D	E	F
1						
2			Compañia Manufacturera			
3						
4		Producto 1	Producto 2	Producto 3		
5	Numero a Producir	0	56	32		
6						
7	Unidad de beneficio	$ 48	$ 55	$ 50		Total de Beneficio
8	Costo Indirecto	$ 1,000	$ 800	$ 900		$ 2,980
9						
10	Recursos	horas requeridas			usadas	disponibles
11	Maquinamiento	2	3	6	360	600
12	Trituramiento	6	3	4	296	300
13	Ensamblaje	5	6	2	400	400
14						
15	Variables Binarias	0	1	1		
16	Enlazando Constantes	0	-10.666667	-43		
17						

<<Injertos: Compañía manufacturera Producto 1 Producto 2 Producto 3 Número a producir 0 56 32
Unidad de beneficio $ 48 $ 55 $ 50 Total de beneficio $ 2,980
Costo indirecto $ 1 000 $ 800 $ 900 Recursos horas requeridas usadas 360 296 400 disponibles 600 300 400 Maquinamiento 2 3 6 Trituramiento 6 3 4 Ensamblaje 5 6 2
Variables binarias 0 1 1 Enlazando constantes 0 −10.666667 −43>>

Figura 3.13 Resultado del modelo con restricciones de integralidad.

[fin de figura]

Es importante precisar que se requiere un mayor esfuerzo computacional para obtener una solución entera con respecto a la solución obtenida en la primera corrida. No obstante el esfuerzo vale la pena ya que la solución entera obtiene una solución mejorada con respecto a la solución redondeada.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[TERMINA PROBLEMA]

3.13 Modelo de redes para el problema de ubicación óptima de instalaciones [t1]

[INICIA PROBLEMA]

Problema resuelto

Los administradores de una cadena de restaurantes operan dos marcas digamos *X* e *Y*. La compañía está considerando abrir nuevas ubicaciones en la ciudad. Existen 10 lugares diferentes disponibles en donde la compañía pueda construir nuevos restaurantes. Puede hacerlo decidiendo por cualquiera de las dos marcas, sin embargo, es importante considerar que la compañía no desea ubicar dos sucursales de la misma marca a menos de 15 km de distancia una de la otra. La tabla 3.20 muestra la estimación del valor presente neto (VPN) respecto a la decisión de ubicación de cada tipo de marca y dependiendo de donde se haga. Para cada uno de los sitios probables, adicionalmente se especifica cuáles son las ubicaciones que geográficamente están dentro de un radio de 15 km uno de otro.

[entra tabla]

Tabla 3.20

Sitio / ubicación	Marca *X*	Marca *Y*	Otras ubicaciones en un radio de 15 km
1	$11.8	$16.2	2,3,4
2	13.3	13.8	1,3,5
3	19.0	14.6	1,2,4,5
4	17.8	12.4	1,3
5	10.0	13.7	2,3,9
6	16.1	19.0	7
7	13.3	10.8	6,8
8	18.8	15.2	7
9	17.2	15.9	5,10
10	14.4	16.8	9

[fin de tabla]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Solución

Como definición de las variables de entrada de nuestro modelo, se hará una para el VPN de los ingresos provenientes de la construcción de sucursales de la marca *X* y otra más para los de la marca *Y*. Tenemos aquí entonces:

R_i - ingresos de construcción de sucursal de la marca *X* en el sitio *i*.
O_i - ingresos de construcción de sucursal de la marca *Y* en el sitio *i*.

Suponga adicionalmente que la compañía como elemento de decisión, desea ubicar una sucursal de la marca *X* si y solo sí también logra ubicar dentro del radio de los 15 km de distancia una sucursal de la marca *Y*. Desarrolle un modelo para determinar la estrategia de ubicación de sucursales que debe seguir la compañía con ambas marca con finalidad de maximizar el VPN total.

Definición de las variables de salida

Requerimos definir dos variables de salida, una que llamaremos X_i, para la marca *X* y otra llamada Y_i para la marca *Y*.

$$X_{i_{bin}} \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ NO se construye la sucursal } "X" \text{ en la ubicación } i \\ 1 \text{ SI se construye la sucursal } "X" \text{ en la ubicación } i \end{array} \right\}$$

$$\text{para } i = 1...10$$

Acentuar sí, eliminar comillas de *x* y *y*

$$Y_{i_{bin}} \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ NO se construye la sucursal } "Y" \text{ en la ubicación } i \\ 1 \text{ SI se construye la sucursal } "Y" \text{ en la ubicación } i \end{array} \right\}$$

$$\text{para } i = 1...10$$

Acentuar sí, eliminar comillas de *y*

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Definición de las restricciones

La definición para las restricciones del problema, tienen que ver con asegurar de que no haya sucursales de la misma marca (sea *X* o *Y*) que estén a menos de 15 km de distancia una de la otra. Por tanto, para cada conjunto de ubicaciones que geográficamente estén a menos de 15 km es entonces necesario indicar que solo cuando mucho una sola sucursal es posible construir. Para ello se indican las siguientes restricciones para la marca *X*.

SITIO 1: $X1 + X2 + X3 + X4 \leq 1$
SITIO 2: $X1 + X2 + X3 + X5 \leq 1$
SITIO 3: $X1 + X2 + X3 + X4 + X5 \leq 1$
SITIO 4: $X1 + X3 + X4 \leq 1$
SITIO 5: $X2 + X3 + X5 + X9 \leq 1$
SITIO 6: $X6 + X7 \leq 1$
SITIO 7: $X6 + X7 + X8 \leq 1$
SITIO 8: $X7 + X8 \leq 1$
SITIO 9: $X5 + X9 + X10 \leq 1$
SITIO 10: $X9 + X10 \leq 1$

A continuación se indican las siguientes restricciones del mismo tipo pero en esta ocasión aplicado para las sucursales de la marca *Y*:

SITIO 1: $Y1 + Y2 + Y3 + Y4 \leq 1$
SITIO 2: $Y1 + Y2 + Y3 + Y5 \leq 1$
SITIO 3: $Y1 + Y2 + Y3 + Y4 + Y5 \leq 1$
SITIO 4: $Y1 + Y3 + Y4 \leq 1$
SITIO 5: $Y2 + Y3 + Y5 + Y9 \leq 1$
SITIO 6: $Y6 + Y7 \leq 1$
SITIO 7: $Y6 + Y7 + Y8 \leq 1$
SITIO 8: $Y7 + Y8 \leq 1$
SITIO 9: $Y5 + Y9 + Y10 \leq 1$
SITIO 10: $Y9 + Y10 \leq 1$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se especifican las restricciones relacionadas con la condición en la que se detalla que una sucursal de la marca *X* puede ser construida si y solo si una sucursal *Y* se encuentra a menos de 15 km de distancia. Para ello se construye el siguiente conjunto de restricciones para cada uno de los probables sitios en donde una sucursal de la marca *X* pueda ser construido.

SITIO 1: $X1 + X2 + X3 + X4 \leq Y1 + Y2 + Y3 + Y4$
SITIO 2: $X1 + X2 + X3 + X5 \leq Y1 + Y2 + Y3 + Y5$
SITIO 3: $X1 + X2 + X3 + X4 + X5 \leq Y1 + Y2 + Y3 + Y4 + Y5$
SITIO 4: $X1 + X3 + X4 \leq Y1 + Y3 + Y4$
SITIO 5: $X2 + X3 + X5 + X9 \leq Y2 + Y3 + Y5 + Y9$
SITIO 6: $X6 + X7 \leq Y6 + Y7$
SITIO 7: $X6 + X7 + X8 \leq Y6 + Y7 + Y8$
SITIO 8: $X7 + X8 \leq Y7 + Y8$
SITIO 9: $X5 + X9 + X10 \leq Y5 + Y9 + Y10$
SITIO 10: $X9 + X10 \leq Y9 + Y10$

Definición de la función objetivo

La función objetivo busca maximizar el VPN de ambas marcas de restaurantes de acuerdo con la ubicación geográfica en donde se construirán. Se representa de la siguiente manera:

$$Fo_{\text{máx}} \rightarrow \sum_{i=1}^{10} R_i X_i + \sum_{i=1}^{10} O_i Y_i$$

Siendo X_i, Y_i variables del tipo binario, tenemos que la multiplicación por el respectivo flujo de ingreso, sea R_i y O_i en cada caso respectivo, pues obtendremos como resultado el total del VPN.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Desarrollo del problema a través de la herramienta Solver

[entra figura]

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		VARIABLES DE ENTRADA			VARIABLES DE SALIDA			RESTRICCIONES	
2	sitio	VPN			X	Y			
3		Red	Olive		Red	Olive		Red	Olive
4	1	$11.80	$16.20						
5	2	$13.30	$13.80						
6	3	$19.00	$14.60						
7	4	$17.80	$12.40						
8	5	$10.00	$13.70						
9	6	$16.10	$19.00						
10	7	$13.30	$10.80						
11	8	$18.80	$15.20						
12	9	$17.20	$15.90						
13	10	$14.40	$16.80						
14	SUMA	$151.70	$148.40						

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

<<INJERTOS>>

	Variables de entrada		Variables de salida		Restricciones	
	VPN					
sitio	Red	Olive	Red	Olive	Red	Olive
1	$11.80	$16.20				
2	$13.30	$13.80				
3	$19.00	$14.60				
4	$17.80	$12.40				
5	$10.00	$13.70				
6	$16.10	$19.00				
7	$13.30	$10.80				
8	$18.80	$15.20				
9	$17.20	$15.90				
10	$14.40	$16.80				
SUMA	$151.70	$148.40				

Figura 3.14

[fin de figura]

Las variables de entrada (R_i, O_i) son los ingresos (VPN) para cada marca *X* y *Y*. Designamos el rango de celdas B4:B13 para la marca X (Ri) y el rango de celdas C4:C13 para la marca Y (O_i). Las variables de salida (X_i, Y_i) se ubicarán en el rango de celdas E4:E13 para la sucursal *X* y F4:F13 para la sucursal *Y*. El rango de celdas H4:I13 se deja para el manejo de las restricciones que aseguren solo cuando mucho una sola sucursal de cada marca en un radio de 15 km de distancia. Las restricciones ya establecidas se introducen en forma de suma y posteriormente en el Solver se les dará la restricción para que esta sea ≤ 1.

Los rangos de celdas para restricciones de las posibles ubicaciones para las sucursales *X* las vamos nombrar en Excel como Olive y Red, para las posibles ubicaciones de las sucursales *Y*. La función objetivo se determina sumando los VPN en su mezcla óptima por tipo de sucursal y posteriormente se suman los dos resultados de ambos negocios. En la figura 3.15 se muestra la formulación a detalle.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[entra figura]

	G	H	I	J	K	L	M
1		RESTRICCIONES			VPN	VPN	
2	sitio				TOTAL	TOTAL	
3		Red	Olive		Red	Olive	
4	1	=SUM(E4:E7)	=SUM(F4:F7)		=+E4*B4	=+F4*C4	
5	2	=+E4+E5+E6+E8	=+F4+F5+F6+F8		=+E5*B5	=+F5*C5	
6	3	=+E4+E5+E6+E7+E8	=+F4+F5+F6+F7+F8		=+E6*B6	=+F6*C6	
7	4	=+E4+E6+E7	=+F4+F6+F7		=+E7*B7	=+F7*C7	
8	5	=+E5+E6+E8+E12	=+F5+F6+F8+F12		=+E8*B8	=+F8*C8	
9	6	=+E9+E10	=+F9+F10		=+E9*B9	=+F9*C9	
10	7	=+E9+E10+E11	=+F9+F10+F11		=+E10*B10	=+F10*C10	
11	8	=+E10+E11	=+F10+F11		=+E11*B11	=+F11*C11	
12	9	=+E8+E12+E13	=+F8+F12+F13		=+E12*B12	=+F12*C12	
13	10	=+E12+E13	=+F12+F13		=+E13*B13	=+F13*C13	FO max
14		=SUM(H4:H13)	=SUM(I4:I13)		=SUM(K4:K13)	=SUM(L4:L13)	=+K14+L14

<<Injertos: Restricciones Sitio Red Olive VPN VPN Total Total Red Olive

Figura 3.15

[fin de figura]

Una vez que se ha definido la totalidad de la formulación en Excel, pasamos a activar el modelo en las opciones de la ventana de Solver (véase figura 3.16).

[entra figura]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

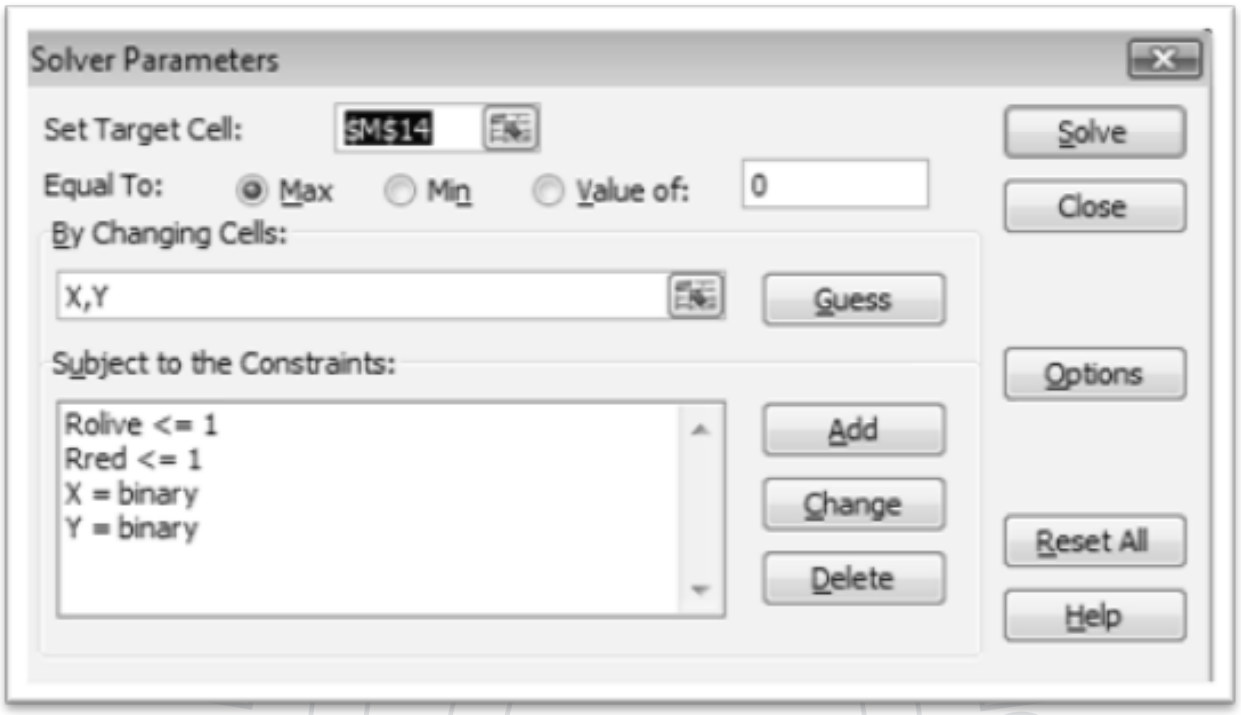


Figura 3.16

[fin de figura]

En la figura 3.17 se muestra la corrida del modelo aún sin considerar las restricciones en las cuales se condiciona la ubicación de las sucursales *X* en función de las sucursales *Y*.

[entra figura]

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		VARIABLES DE ENTRADA			VARIABLES DE SALIDA			RESTRICCIONES			VPN	VPN	
2	sitio	VPN			X	Y					TOTAL	TOTAL	
3		Red	Olive		Red	Olive		Red	Olive		Red	Olive	
4	1	$11.80	$16.20		0	1		1	1		$0.00	$16.20	
5	2	$13.30	$13.80		0	0		0	1		$0.00	$0.00	
6	3	$19.00	$14.60		0	0		1	1		$0.00	$0.00	
7	4	$17.80	$12.40		1	0		1	1		$17.80	$0.00	
8	5	$10.00	$13.70		0	0		1	0		$0.00	$0.00	
9	6	$16.10	$19.00		0	1		0	1		$0.00	$19.00	
10	7	$13.30	$10.80		0	0		1	1		$0.00	$0.00	
11	8	$18.80	$15.20		1	0		1	0		$18.80	$0.00	
12	9	$17.20	$15.90		1	0		1	1		$17.20	$0.00	
13	10	$14.40	$16.80		0	1		1	1		$0.00	$16.80	FO max
14	SUMA	$151.70	$148.40		3	3		8	8		$53.80	$52.00	$105.80

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

<<Injertos: Sitio Variables de entrada Red Olive VPN Variables de salida X Y Red Olive

Figura 3.17

[fin de figura]

La respuesta óptima de acuerdo con la corrida de Solver sugiere la construcción de tres sucursales de la marca *X* en las ubicaciones 4, 8 y 9. De manera similar ocurre para las sucursales *Y* en las cuales se proponen los sitios 1, 6 y 10. La estrategia anterior nos permite obtener un flujo máximo de ingresos (VPN) de $53.80 y $52.00 para las sucursales *X* y *Y*, respectivamente. Por tanto se tiene un ingreso total de $105.80.

Finalmente para agregar las restricciones relacionadas con la condición en la que se especifica que una sucursal de la marca *X* puede ser construida si y solo si una sucursal *Y* se encuentra a menos de 15 km de distancia. Tomando en cuenta la definición de rangos de celdas que ya se ha hecho en Excel, lo que se tendría que agregar en la ventana de Solver sería la formulación del tipo (Olive ≤ Red). La formulación especificada del modo anterior cubre las posibles ubicaciones geográficas definidas para el total de los 10 sitios. Dejamos a iniciativa del lector hacer el complemento del modelo para observar las diferencias en los resultados que serían obtenidos al aplicar dichas restricciones adicionales sobre el problema.

[TERMINA PROBLEMA]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Investigación de Operaciones
Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

CASO DE ESTUDIO:
TBB COMPAÑÍA DE TRANSPORTE INTERMODAL

TBB es una empresa de transporte intermodal localizada en el Estado de México, México. Esta empresa provee el servicio de contenedores entre diferentes ciudades. Estos contenedores son utilizados por los clientes para el transporte de kits de ensambles para la industria automotriz.

TBB suministra contenedores vacíos en los cuales los clientes pueden cargar sus ensambles y una vez que los contenedores llegan a su destino, los kits son descargados y los contenedores son transportados a otro punto para recolectar ensambles de un nuevo cliente. De tal manera, TBB necesita recolocar los contenedores vacíos periódicamente (en práctica, cada semana).

La última semana, muchos contenedores ISO 20 tienen que ser reubicados entre las terminales ubicadas en la Ciudad de México, Tampico, Lázaro Cárdenas, Guadalajara, Durango, Monterrey y San Luis Potosí, como se muestra en la Figura 1. Los costos (en USD) en esta red corresponden a la red actual que utiliza camiones para transportar los contenedores.

Los costos de envió se han incrementado en los últimos meses, y los ingenieros en logística han buscado otras alternativas para el envío de los contenedores, una de estas opciones es utilizar algunas rutas ferroviarias con los costos como se muestran en la Figura 2.

De las siguientes opciones, cuál le sugeriría a TBB? si usted fuera el líder del equipo de logística:

Opción 1: Seguir enviado los contenedores exclusivamente por carretera (Fig. 1).
Opción 2: Cambiar de envíos por carretera a envíos por tren (Fig. 2)
Opción 3: Diseñar una red intermodal en la que se permita el envío tanto por carretera como por tren.

a) Para cada opción determine el modelo de programación lineal

b) Para la opción 1 y 2 resuelva el problema utilizando el método de transporte. Determine la solución inicial por el método de los multiplicadores y resuelva el modelo de programación lineal utilizando el Software LINDO

c) Para la opción 3 resuelva el modelo de programación lineal con LINDO

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

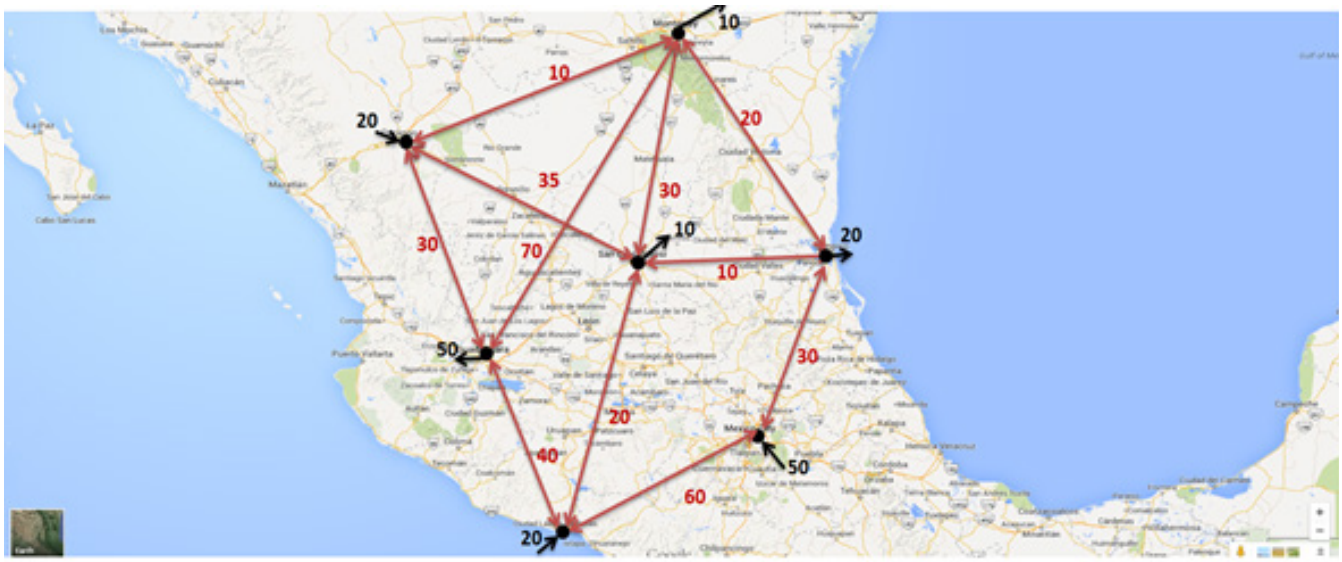


Fig. 1: Red de transporte carretero utilizada actualmente por TBB

Fig. 2: Red de transporte ferroviarios que podría utilizar TBB

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 9

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3260.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X12	40.000000	0.000000
X13	0.000000	20.000000
X14	0.000000	40.000000
X21	0.000000	30.000000
X25	0.000000	16.000000
X26	50.000000	0.000000
X31	10.000000	0.000000
X35	0.000000	8.000000
X37	0.000000	40.000000
X41	50.000000	0.000000
X47	0.000000	40.000000
X52	20.000000	0.000000
X53	0.000000	42.000000
X56	0.000000	12.000000
X62	0.000000	40.000000
X65	0.000000	68.000000
X73	20.000000	0.000000
X74	0.000000	20.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	20.000000
3)	0.000000	35.000000
4)	0.000000	10.000000
5)	0.000000	0.000000
6)	0.000000	27.000000
7)	0.000000	55.000000
8)	0.000000	-10.000000

NO. ITERATIONS= 9

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 24
OBJECTIVE VALUE = 3260.00000

SET Y1 TO <= 0 AT 1, BND= -3260. TWIN= -3260. 28
SET Y11 TO <= 0 AT 2, BND= -3460. TWIN= -3260. 40

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

```
NEW INTEGER SOLUTION OF    3460.00000     AT BRANCH      2 PIVOT      40
BOUND ON OPTIMUM:  3260.000
FLIP      Y11 TO >=         1 AT    2 WITH BND=   -3260.0000
SET       Y6 TO <=     0 AT    3, BND=  -3260.     TWIN=-0.1000E+31     49

NEW INTEGER SOLUTION OF    3260.00000     AT BRANCH      3 PIVOT      49

BOUND ON OPTIMUM:  3260.000
DELETE       Y6 AT LEVEL     3
DELETE      Y11 AT LEVEL     2
DELETE       Y1 AT LEVEL     1
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     3 PIVOTS=     49

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)     3260.000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      Y1        0.000000        373.000000
      Y2        1.000000        295.000000
      Y3        1.000000        110.000000
      Y4        0.000000          0.000000
      Y5        0.000000       -520.000000
      Y6        0.000000       2743.000000
      Y7        1.000000        165.000000
      Y8        1.000000        -27.000000
      Y9        0.000000         95.000000
     Y10        0.000000        110.000000
     Y11        1.000000       1000.000000
     Y12        1.000000       -120.000000
     Y13        1.000000       1743.000000
     Y14        0.000000        -35.000000
    XC12       10.000000          0.000000
    XC13        0.000000         20.000000
    XC14        0.000000         40.000000
    XC21        0.000000         30.000000
    XC25        0.000000         16.000000
    XC26        0.000000          0.000000
    XC31       10.000000          0.000000
    XC35        0.000000          8.000000
```

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

XC37	0.000000	40.000000
XC41	0.000000	0.000000
XC47	0.000000	40.000000
XC52	0.000000	0.000000
XC53	0.000000	42.000000
XC56	0.000000	12.000000
XC62	0.000000	40.000000
XC65	0.000000	68.000000
XC73	20.000000	0.000000
XC74	0.000000	20.000000
XT12	30.000000	0.000000
XT13	0.000000	0.000000
XT14	0.000000	40.000000
XT21	0.000000	30.000000
XT25	0.000000	16.000000
XT26	50.000000	0.000000
XT31	0.000000	20.000000
XT35	0.000000	28.000000
XT37	0.000000	30.000000
XT41	50.000000	0.000000
XT47	0.000000	10.000000
XT52	20.000000	0.000000
XT53	0.000000	22.000000
XT56	0.000000	12.000000
XT62	0.000000	40.000000
XT65	0.000000	68.000000
XT73	0.000000	10.000000
XT74	0.000000	50.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	20.000000
3)	0.000000	35.000000
4)	0.000000	10.000000
5)	0.000000	0.000000
6)	0.000000	27.000000
7)	0.000000	55.000000
8)	0.000000	-10.000000
9)	0.000000	0.000000
10)	0.000000	15.000000
11)	0.000000	10.000000
12)	0.000000	-20.000000

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

```
 13)        0.000000          7.000000
 14)        0.000000         35.000000
 15)        0.000000          0.000000
 16)        0.000000        -27.000000
 17)        0.000000        -55.000000
 18)        0.000000         10.000000
 19)        0.000000          0.000000
 20)        0.000000         20.000000
 21)        0.000000         -7.000000
 22)        0.000000        -35.000000

NO. ITERATIONS=      50
BRANCHES=    3 DETERM.=  1.000E    0

LP OPTIMUM FOUND AT STEP     21
OBJECTIVE VALUE =   2160.00000

FIX ALL VARS.(    2)  WITH RC >   500.000
SET     YT11 TO <=     1 AT    1, BND=  -2160.     TWIN=-0.1000E+31     33
SET      YC6 TO <=     0 AT    2, BND=  -2160.     TWIN=-0.1000E+31     42
SET      YC5 TO <=     0 AT    3, BND=  -2160.     TWIN= -2380.         51
DELETE     YT13 AT LEVEL     4
FLIP      YC5 TO >=        1 AT    3 WITH BND=   -2380.0000
DELETE     YT13 AT LEVEL     4
DELETE      YC5 AT LEVEL     3
DELETE      YC6 AT LEVEL     2

DELETE     YT11 AT LEVEL     1
RELEASE FIXED VARIABLES
SET      YC7 TO <=     0 AT    1, BND=  -3260.     TWIN= -3260.         62

NEW INTEGER SOLUTION OF    3260.00000     AT BRANCH      6 PIVOT      62
BOUND ON OPTIMUM:  2660.000
DELETE      YC7 AT LEVEL     1
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     6 PIVOTS=      62

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
```

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3260.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
YC1	0.000000	20.000000
YC2	0.000000	73.000000
YC3	0.000000	0.000000
YC4	0.000000	750.000000
YC5	0.000000	30.000000
YC6	0.000000	1400.000000
YC7	0.000000	0.000000
YT8	1.000000	20.000000
YT9	1.000000	143.000000
YT10	1.000000	-100.000000
YT11	1.000000	1000.000000
YT12	1.000000	-110.000000
YT13	1.000000	1750.000000
YT14	1.000000	600.000000
XC12	0.000000	7.000000
XC13	0.000000	10.000000
XC14	0.000000	35.000000
XC21	0.000000	23.000000
XC25	0.000000	16.000000
XC26	0.000000	0.000000
XC31	0.000000	10.000000
XC35	0.000000	25.000000
XC37	0.000000	20.000000
XC41	0.000000	5.000000
XC47	0.000000	15.000000
XC52	0.000000	0.000000
XC53	0.000000	25.000000
XC56	0.000000	12.000000
XC62	0.000000	40.000000
XC65	0.000000	68.000000
XC73	0.000000	20.000000
XC74	0.000000	45.000000
XT12	40.000000	0.000000
XT13	0.000000	20.000000
XT14	0.000000	40.000000
XT21	0.000000	30.000000
XT25	0.000000	16.000000

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

XT26	50.000000	0.000000
XT31	10.000000	0.000000
XT35	0.000000	8.000000
XT37	0.000000	40.000000
XT41	50.000000	0.000000
XT47	0.000000	40.000000
XT52	20.000000	0.000000
XT53	0.000000	42.000000
XT56	0.000000	12.000000
XT62	0.000000	40.000000
XT65	0.000000	68.000000
XT73	20.000000	0.000000
XT74	0.000000	20.000000
YC13	1.000000	0.000000
YC14	1.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.000000
3)	0.000000	8.000000
4)	0.000000	0.000000
5)	0.000000	-15.000000
6)	0.000000	0.000000
7)	0.000000	28.000000
8)	0.000000	0.000000
9)	0.000000	0.000000
10)	0.000000	15.000000
11)	0.000000	-10.000000
12)	0.000000	-20.000000
13)	0.000000	7.000000
14)	0.000000	35.000000
15)	0.000000	-30.000000
16)	0.000000	20.000000
17)	0.000000	-7.000000
18)	0.000000	0.000000
19)	0.000000	0.000000
20)	0.000000	30.000000
21)	0.000000	0.000000
22)	0.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 62
BRANCHES= 6 DETERM.= 1.000E 0

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

Descripción del método gráfico [T1]

Para aplicar este método de solución, se realiza el procedimiento que se resume a continuación en los pasos siguientes.

[INICIA ALERTA]

Alerta

Es importante considerar todas las restricciones y las variables de no negatividad. Además, el MPLC debe contener un número finito de desigualdades o rectas.

[TERMINA ALERTA]

[T2]Paso 1: Modelar el problema

En la modelación del problema se trata de construir el MPLC dado el enunciado de un problema de programación lineal, de tal forma que el resultado de este tenga como producto la función lineal a optimizar y su conjunto de restricciones también lineales.

[T2]Paso 2: Definir conjunto intersección

El objetivo de este paso es dibujar en el plano cada una de las restricciones (incluyendo las variables de no negatividad), con la finalidad de definir el conjunto intersección que se forma, o bien, para indicar que dicho conjunto es el vacío.

[T2]Paso 3: Asignar un valor numérico arbitrario a la función a optimizar (*Z*)

En este paso se debe asignar un “valor numérico arbitrario” de *Z*.

[T2]Paso 4: Dibujar la función a optimizar

Con base en el paso anterior, aquí se encuentran las trazas (intersección con el eje horizontal y la intersección con el eje vertical). Una vez que se tienen dichas trazas, se dibuja el segmento de recta que las une; de preferencia, usando una línea discontinua, con la finalidad de no confundirla con las rectas de las restricciones lineales.

[T2]Paso 5: Generar un conjunto de familias de rectas a la función a optimizar

Las familias de las rectas a la función a optimizar se generan asignando diversos valores a *Z*; luego, para cada valor de *Z*, se dibuja en el plano la recta de dicha función.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

[T2]Paso6: Identificar geométricamente el vértice (punto de intersección) del conjunto intersección

Con base en el paso anterior, geométricamente se detecta cuál podría ser el vértice o punto factible que proporciona el mejor valor *Z*, ya sea para maximizar o minimizar.

[T2]Paso 7: Proporcionar la solución óptima y valor óptimo de *Z*

En este paso se determinan las coordenadas del vértice o punto factible que proporciona el mejor valor para *Z*; a este vértice se le denomina **solución óptima** y sele denota como *X**. Luego, con base en las coordenadas encontradas, se sustituye en la función a optimizar, para determinar el valor óptimo de *Z*, el cual se denota como *Z**.

recursos académicos • en • línea • GEP

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Investigación de Operaciones
Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

Problema de aplicación de programación lineal

Una empresa fabrica dos tipos de productos: sillas y mesas. La empresa tiene dos departamentos el de carpintería y el de tapicería. Para fabricar una silla, se requiere de 3 horas de carpintería y 1 hora de tapicería. Para fabricar una silla se requiere 1 hora de carpintería y 2 horas de tapicería. Todo el personal de tapicería trabaja un total de 90 horas, y el de carpintería 80 horas. La empresa obtiene ganancias por la venta de cada unidad de producto según como se indica: 40 unidades monetarias (u.m.) por silla y 60 u.m. por mesa. ¿Cómo debe ser la producción de silla y mesas para que la empresa maximice sus ganancias? Realice la modelación del problema y posteriormente aplique el método gráfico y corrobore su resultado aplicando el método simplex.

Modelación de problema.

Paso 1: *Resumen de parámetros del problema*
Para llevar a cabo la modelación del problema, es conveniente presentar los datos (parámetros) indicados en el problema en una tabla como la mostrada a continuación:

Producto	Tiempo carpintería (horas/unidad producto)	Tiempo tapicería (horas/unidad producto)	Ganancia por unidad de producto ($/unidad de producto)
Silla	3	1	40
Mesa	1	2	60
Disponibilidad de recursos (horas)	90	80	

Paso 2: *Definición de objetivo*
Maximizar las ganancias de la empresa considerando la disponibilidad de tiempo en cada uno de los dos departamentos.

Paso 3: *Identificar las variables de decisión*
x_1 : Cantidad de sillas a fabricar
x_2 : Cantidad de mesas a fabricar

Paso 4: *Definir la función objetivo:*
$Max\ z = 40x_1 + 60x_2$
Un análisis de unidades para el primer término de la función objetivo sería:
$50\ (\$ / silla)\ ,\ x_1(sillas)$

De este modo, $40x_1\ (\$ / silla)(silla) \equiv 40x_1(\$)$

Por tanto de manera análoga para el segundo término.

Paso 5: *Establecer todas las restricciones*
Tiempo de carpintería: $3x_1 + 1x_2 \leq 90$
Tiempo de tapicería: $1x_1 + 2x_2 \leq 80$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Paso 6: *Definir variables de no negatividad*

$x_1, x_2 \geq 0$

Por tanto, el modelo de programación lineal continua (MPLC) que representa a este problema es:
$Max\ z = 40x_1 + 60x_2$
s.a
$3x_1 + 1x_2 \leq 90$
$1x_1 + 2x_2 \leq 80$
$x_1, x_2 \geq 0$

MÉTODO GRÁFICO

A continuación se aplica el método gráfico para hallar la solución óptima del MPLC y que a su vez nos proporcionará la solución del problema.

Paso 1: *Dibujar el polígono*
Se hará uso de Geogebra 4.2 para dibujar el área (polígono) que se forma. Dicha área se muestra en la figura 1.

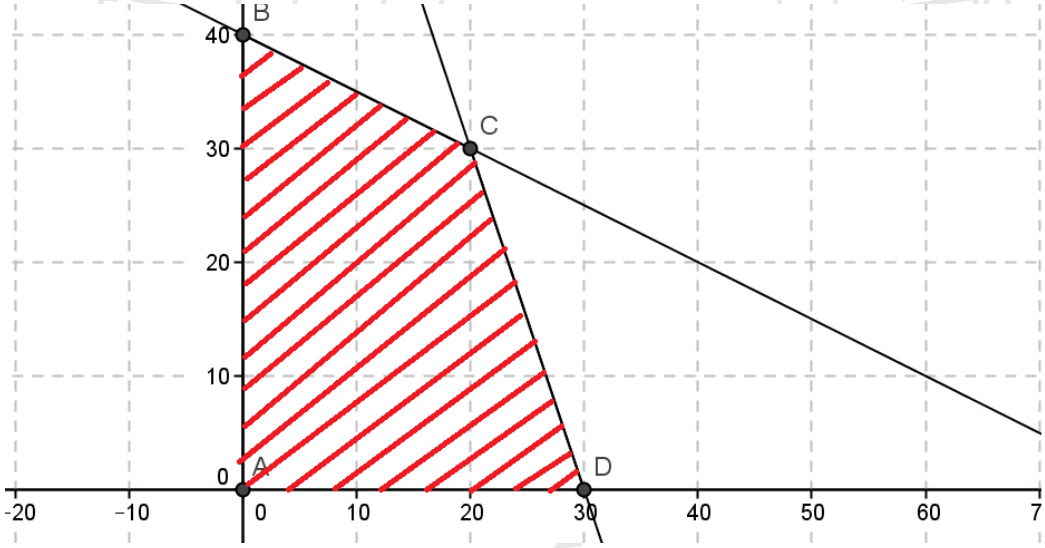


Figura 1. Área o polígono formada por las cuatro restricciones del MPLC.

Para buscar el punto factible (vértice) que proporcionará el valor óptimo de la función objetivo, se traza una familia de rectas paralelas a la de la función objetivo, según como se observa en la figura 2.

Paso 2: *Generar y dibujar familias de rectas paralelas a la función a optimizar*
Nuevamente con base en el polígono de figura 1 (sin considerar el área achurada) se proponen valores para Z = 0, Z = 1200, Z = 2400 y Z = 2600; que precisamente son los valores cuando se interceptan con los vértices del polígono, según como se presente en la figura 2.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

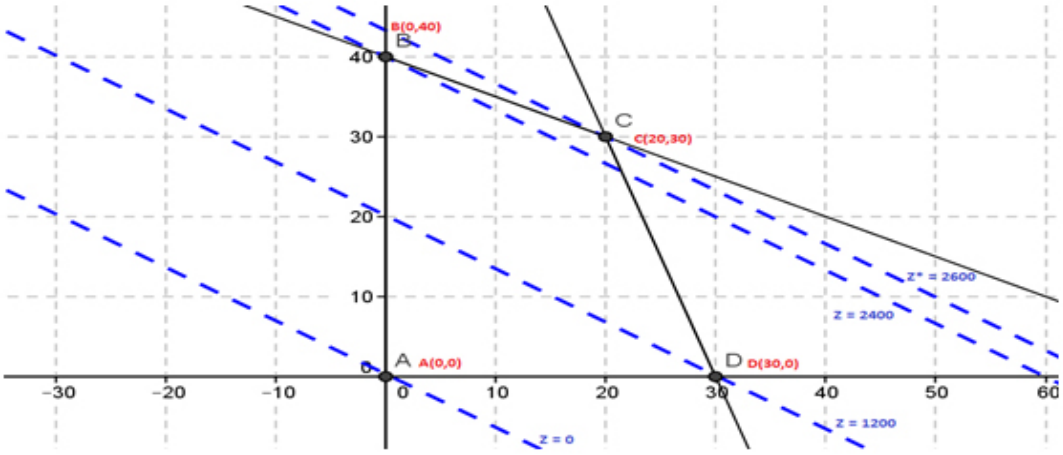


Figura 2. Presentación del punto óptimo y valor óptimo de la función objetivo.

Paso 3: *Establecer el punto factible óptimo y el valor óptimo de la función objetivo*
El punto factible óptimo (solución óptima) se encuentra en:

$x_1^* = 20$, $x_2^* = 30$

Y el valor óptimo de la función objetivo es: $z^* = 2600$

Paso 4: *Interpretación de lo obtenido en paso 3*
Fabricar 20 sillas y 30 mesas para obtener la máxima ganancia de $ 2600.

MÉTODO SIMPLEX

El MPLC a resolver por el método simplex es:

$Max\ z = 40x_1 + 60x_2$

s.a

$3x_1 + 1x_2 \leq 90$

$1x_1 + 2x_2 \leq 80$

$x_1, x_2 \geq 0$

Paso 1: *Estandarizar el modelo*

$Max\ z = 40x_1 + 60x_2 + 0x_3 + 0x_4$

s.a

$3x_1 + 1x_2 + x_3 = 90$

$1x_1 + 2x_2 + x_4 = 80$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Paso 2: *Buscar una solución inicial básica factible (SIBF)*
El número total de variables son n = 4
El número total de restricciones son m = 2

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Por tanto una SIBF se obtiene haciendo (n-m) variables iguales a 0.
Si se hacen las variables $x_1 = x_2 = 0$, entonces una SIBF sería:

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 90, 80)$

Paso 3: *Realizar el tableau simplex inicial*

X1	X2	X3	X4	LD	VB	Theta
3	**1**	1	0	90	X3	90/1 = 90
1	**2**	0	1	80	X4	80/2 = 40
40	**60**	0	0	Z		

Paso 4: *Generar primera iteración (nuevo tableau)*

X1	X2	X3	X4	LD	VB	Theta
5/2	**0**	1	-1/2	50	X3	50/(5/2) = 20
1/2	**1**	0	½	40	X2	40/(1/2) = 80
10	**0**	0	-30	Z – 2400		

Paso 5: *Generar segunda iteración (otro tableau)*

X1	X2	X3	X4	LD	VB	Theta
5/2	**0**	1	-1/2	50	X3	50/(5/2) = 20
1/2	**1**	0	½	40	X2	40/(1/2) = 80
10	**0**	0	-30	Z – 2400		

Paso 6: *Verificar que se cumpla criterio de optimalidad*
Como los Cj – Zj de las variables no básicas son valores negativos, entonces se cumple el criterio de optimalidad.

Paso 7: *Establecer el punto factible óptimo y el valor óptimo de la función objetivo*
Se llega al mismo resultado obtenido en el método gráfico, que es:

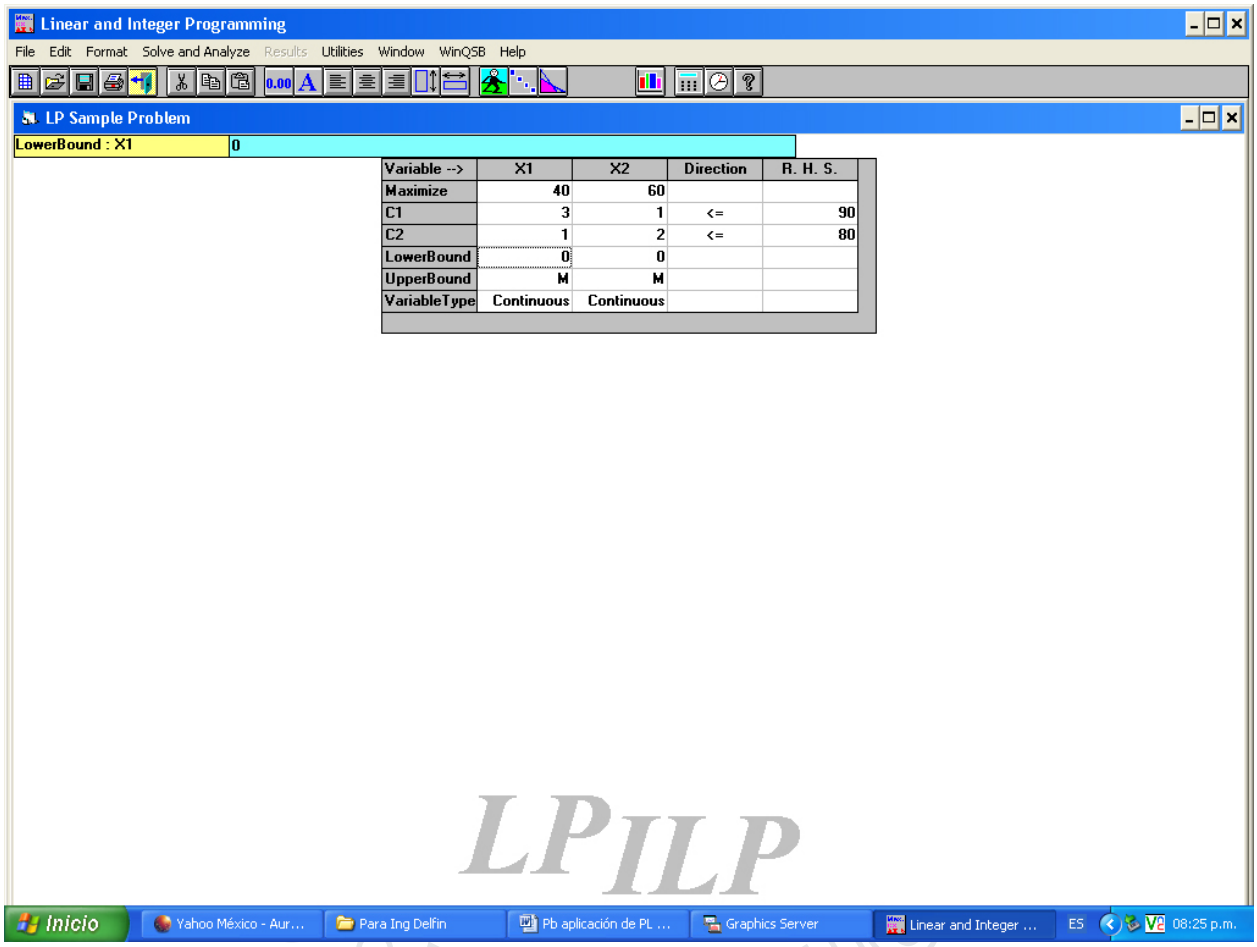
$$\mathbf{x}_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Y el valor óptimo de la función objetivo es: $z^* = 2600$

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

USO DE SOFTWARE WinQSB

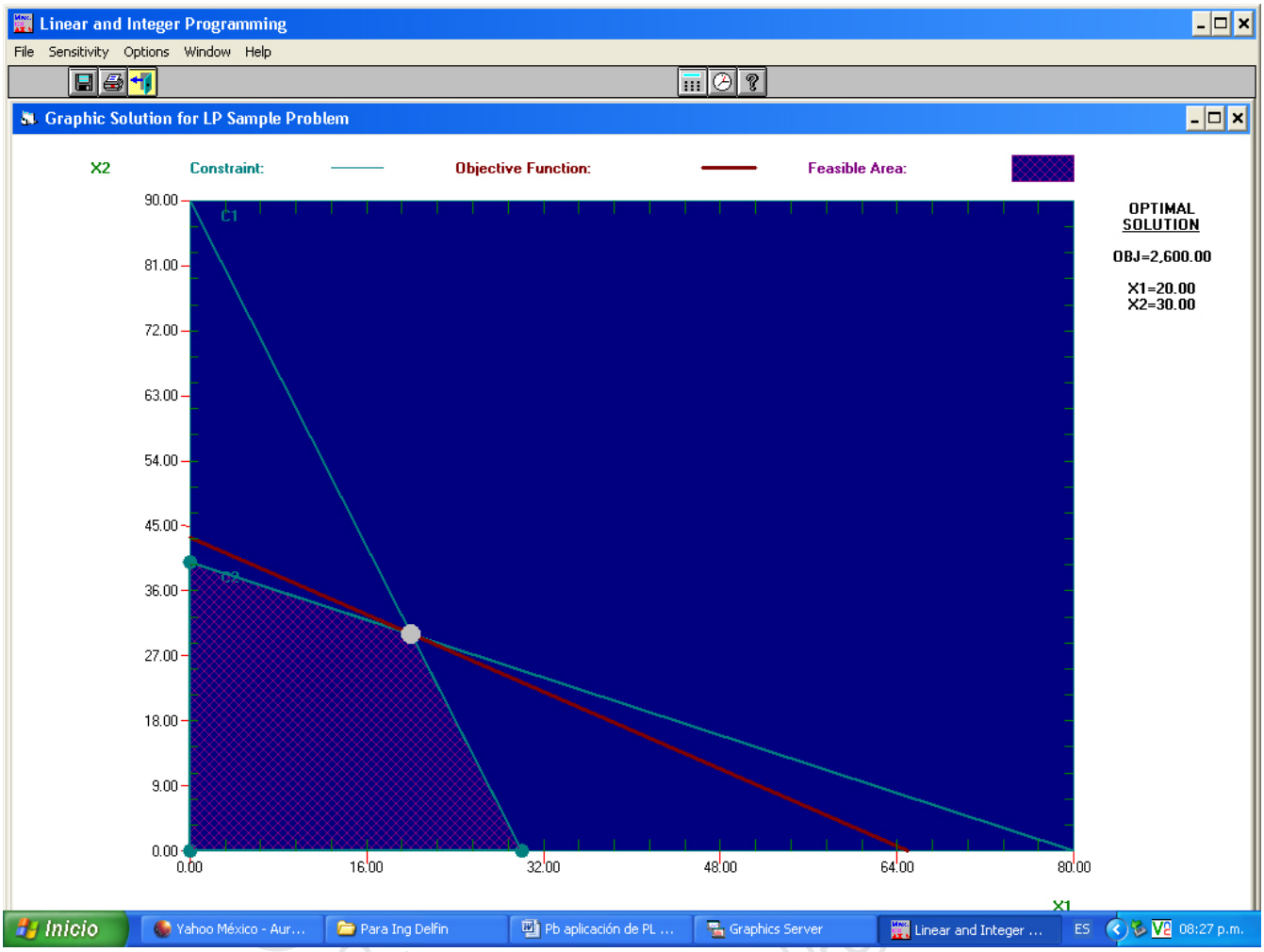
Con ***Método gráfico,*** se presenta la ventana al introducir el modelo



LPILP

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Ventana al dar click en la pestaña de: Solve and Analize, Graphic Method y OK:



Conclusión: Es el mismo resultado obtenido en el método gráfico, en cuanto a:

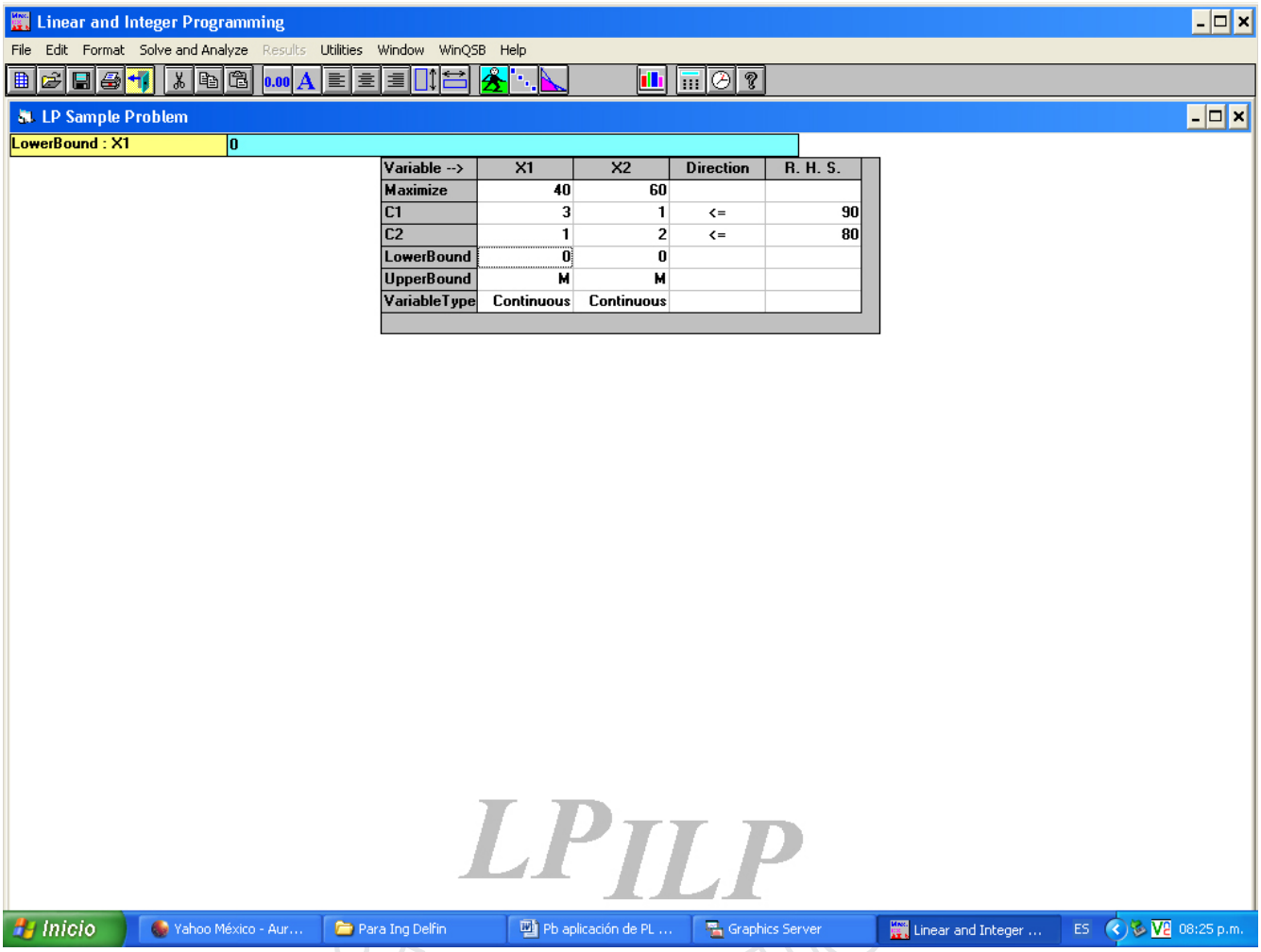
• Polígono

• Solución factible óptima y

• Valor óptimo de función objetivo.

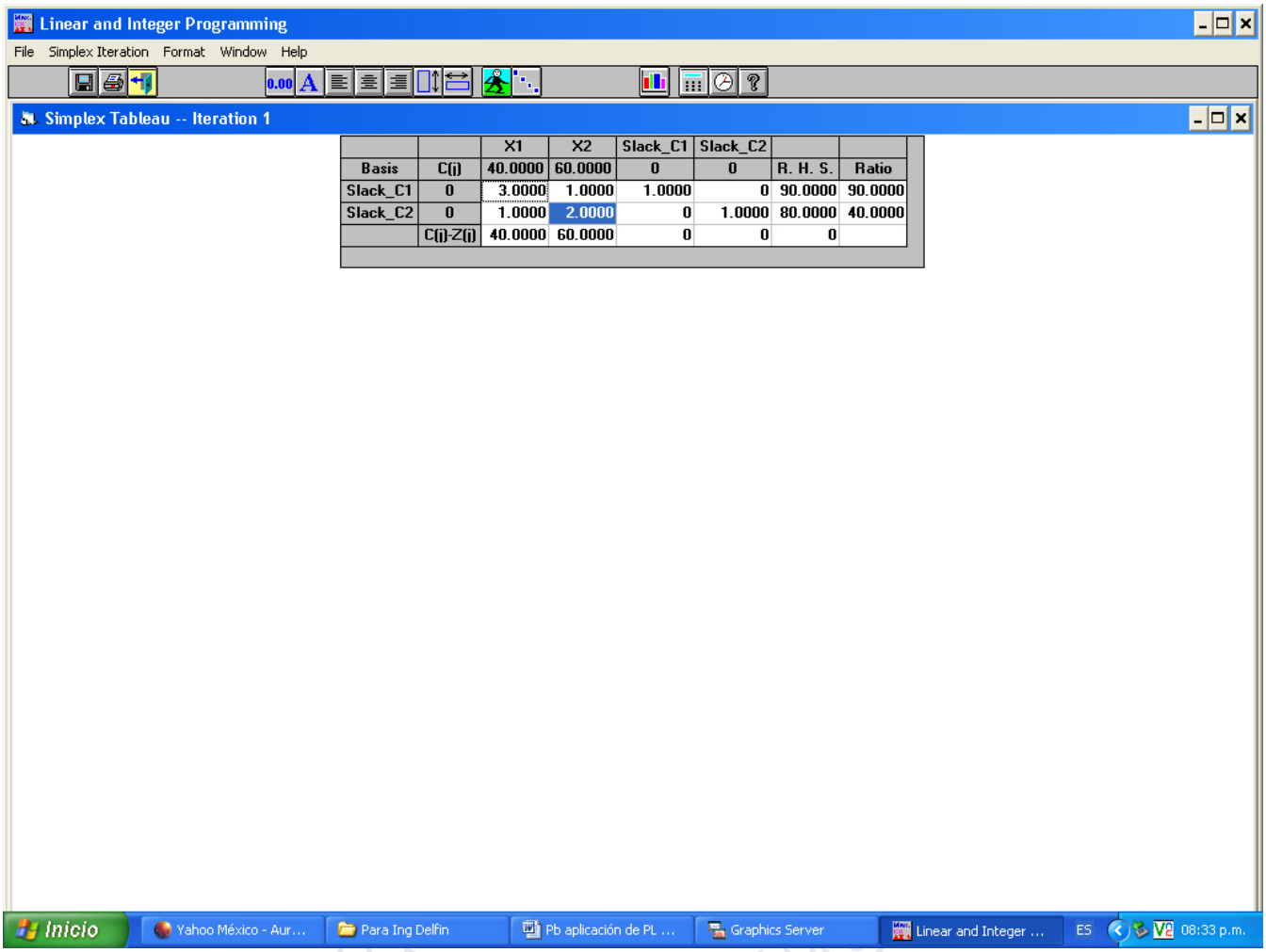
D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Con ***Método simplex,*** se presenta la ventana al introducir el modelo



D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

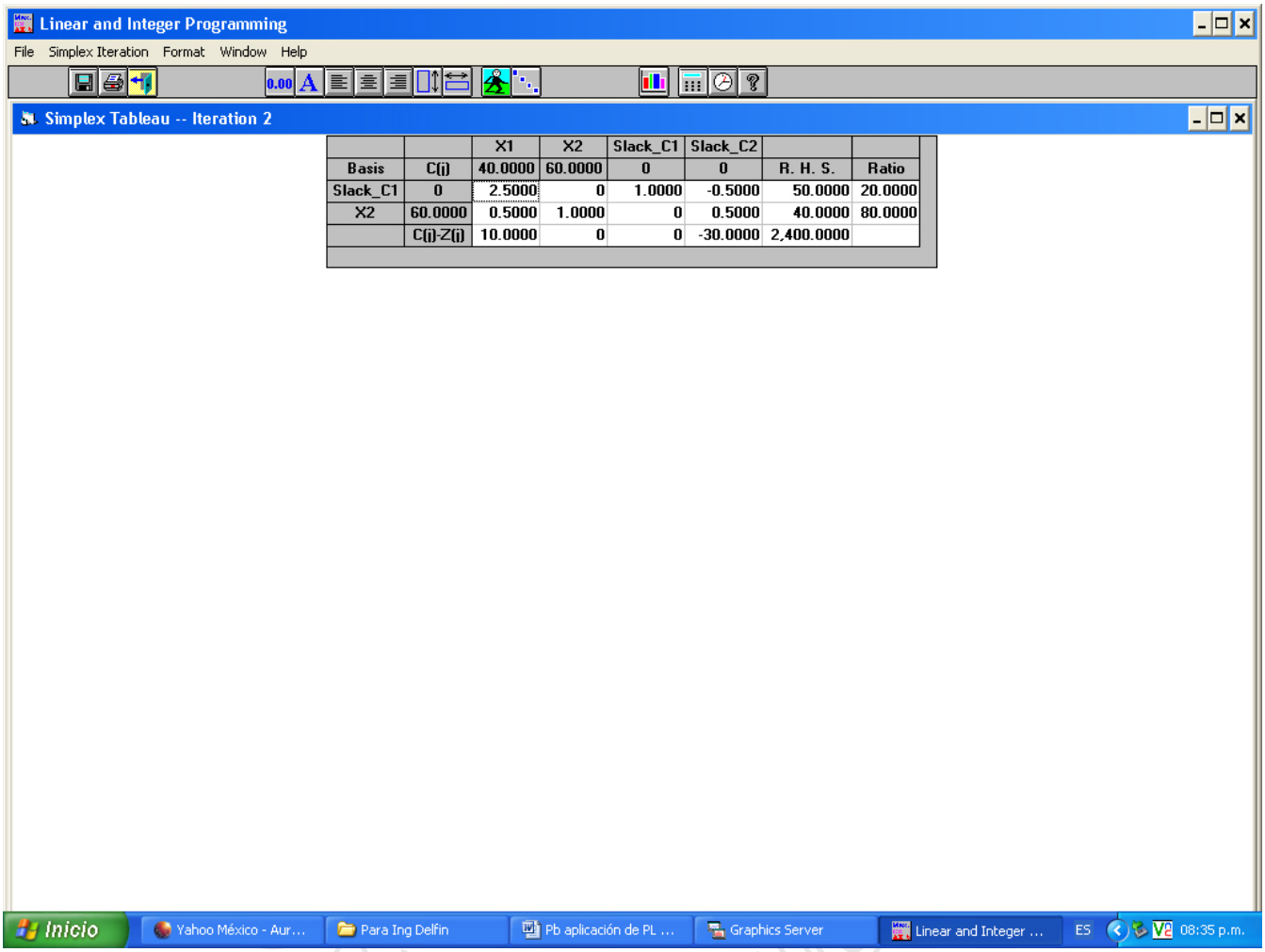
Ventana al dar click en la pestaña de: Solve and Analize y Solve and Display Steps:



		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2		
Basis	C(j)	40.0000	60.0000	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	3.0000	1.0000	1.0000	0	90.0000	90.0000
Slack_C2	0	1.0000	2.0000	0	1.0000	80.0000	40.0000
	C(j)-Z(j)	40.0000	60.0000	0	0	0	

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

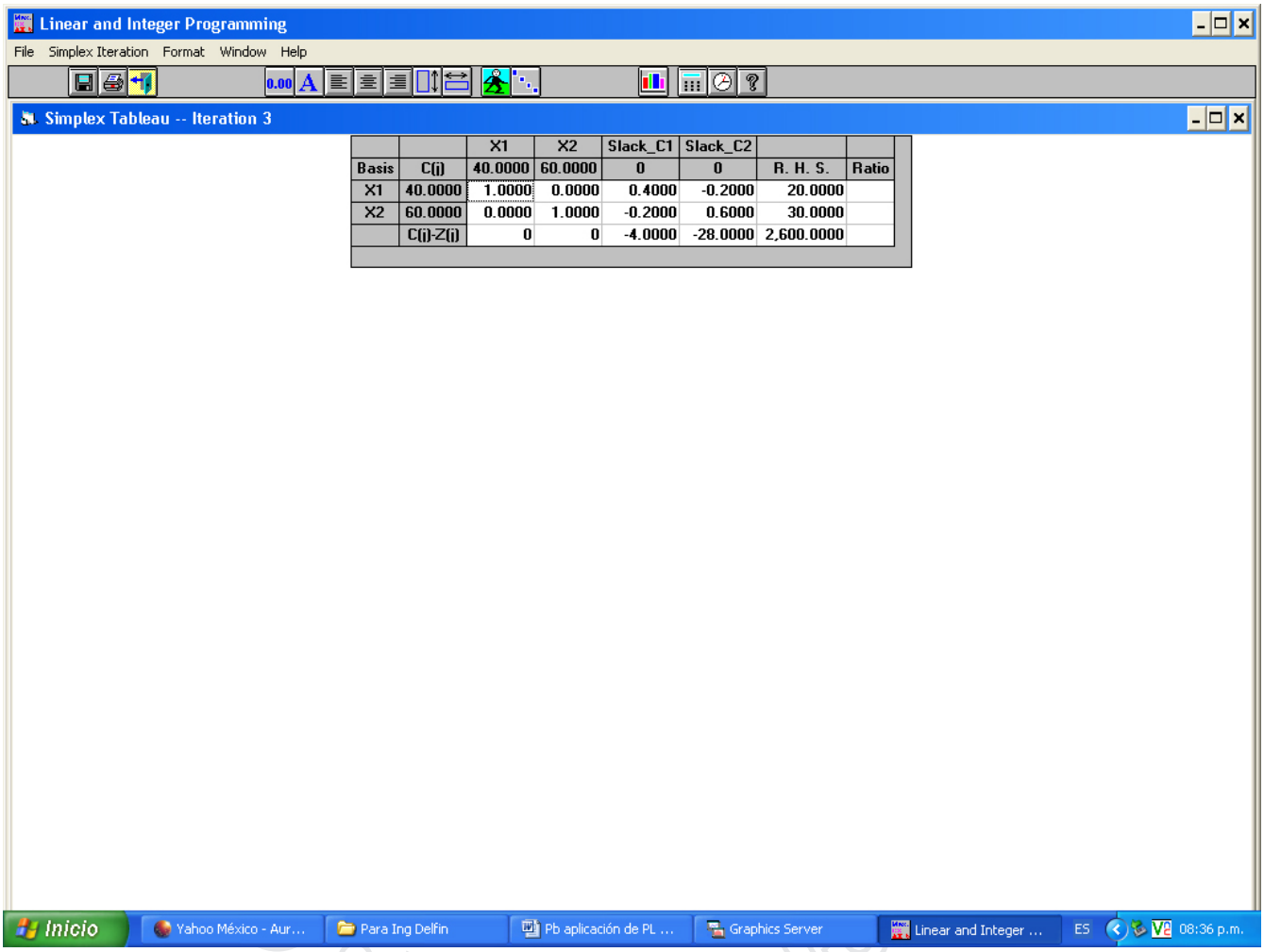
Ventana al dar click en Simplex Iteration y Next Iteration:



		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2		
Basis	C(j)	40.0000	60.0000	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	2.5000	0	1.0000	-0.5000	50.0000	20.0000
X2	60.0000	0.5000	1.0000	0	0.5000	40.0000	80.0000
	C(j)-Z(j)	10.0000	0	0	-30.0000	2,400.0000	

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

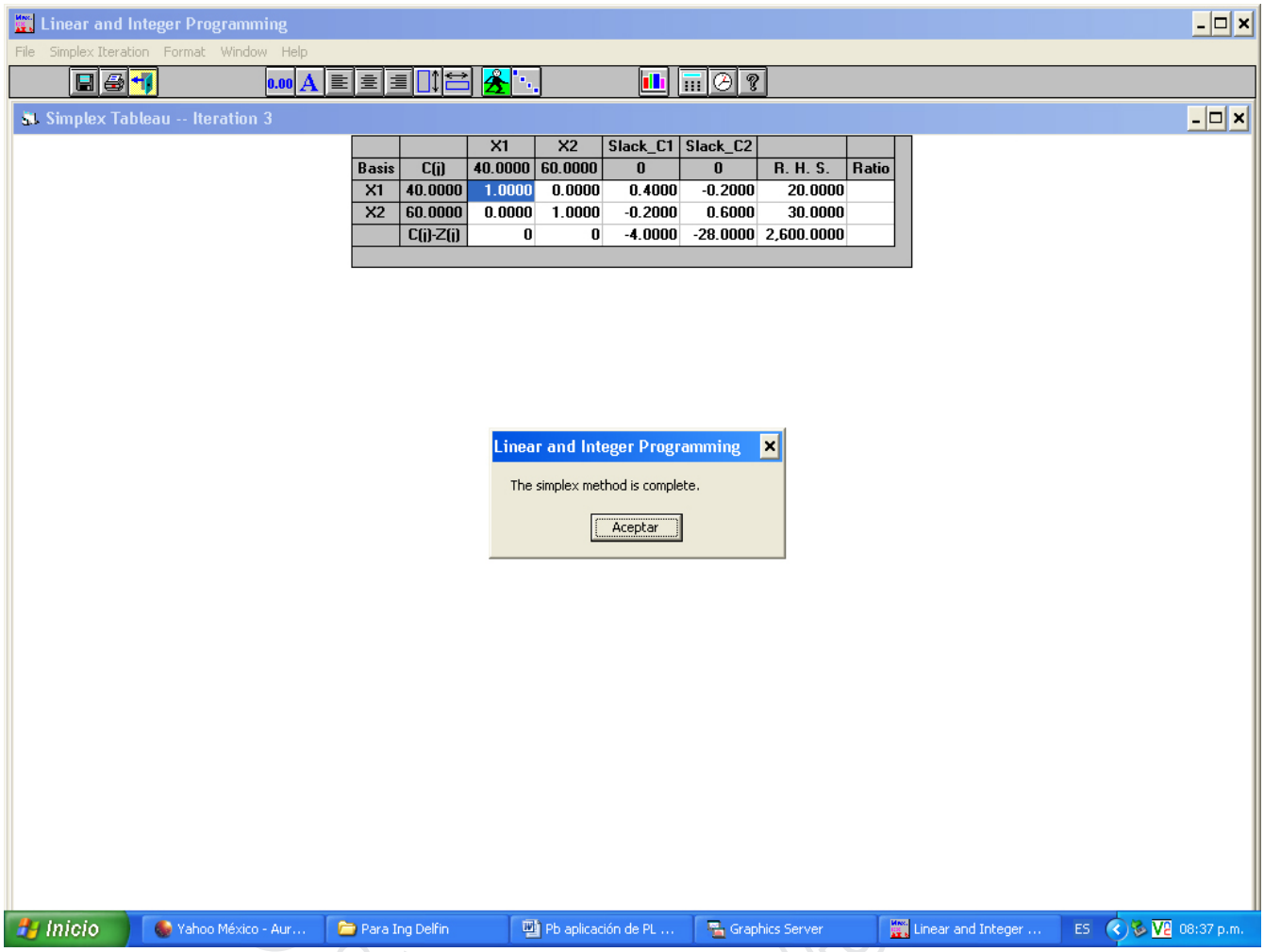
Otra ventana al dar click en Simplex Iteration y Next Iteration:



		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2		
Basis	C(j)	40.0000	60.0000	0	0	R. H. S.	Ratio
X1	40.0000	1.0000	0.0000	0.4000	-0.2000	20.0000	
X2	60.0000	0.0000	1.0000	-0.2000	0.6000	30.0000	
	C(j)-Z(j)	0	0	-4.0000	-28.0000	2,600.0000	

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Nuevamente otra ventana al dar click en Simplex Iteration y Next Iteration:



		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2		
Basis	C(j)	40.0000	60.0000	0	0	R. H. S.	Ratio
X1	40.0000	1.0000	0.0000	0.4000	-0.2000	20.0000	
X2	60.0000	0.0000	1.0000	-0.2000	0.6000	30.0000	
	C(j)-Z(j)	0	0	-4.0000	-28.0000	2,600.0000	

Conclusión: Es el mismo resultado obtenido en el método simplex, en cuanto:

- Tableau simplex inicial,
- Tableau de primera iteración,
- Tableau de segunda iteración,
- Misma solución óptima y
- Mismo valor óptimo de función objetivo.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Problemas resueltos adicionales

[INICIA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

Resolver con software Lindo y comparar el resultado con el resuelto en el libro:

$MaxZ = 8X_1 + 5X_2$

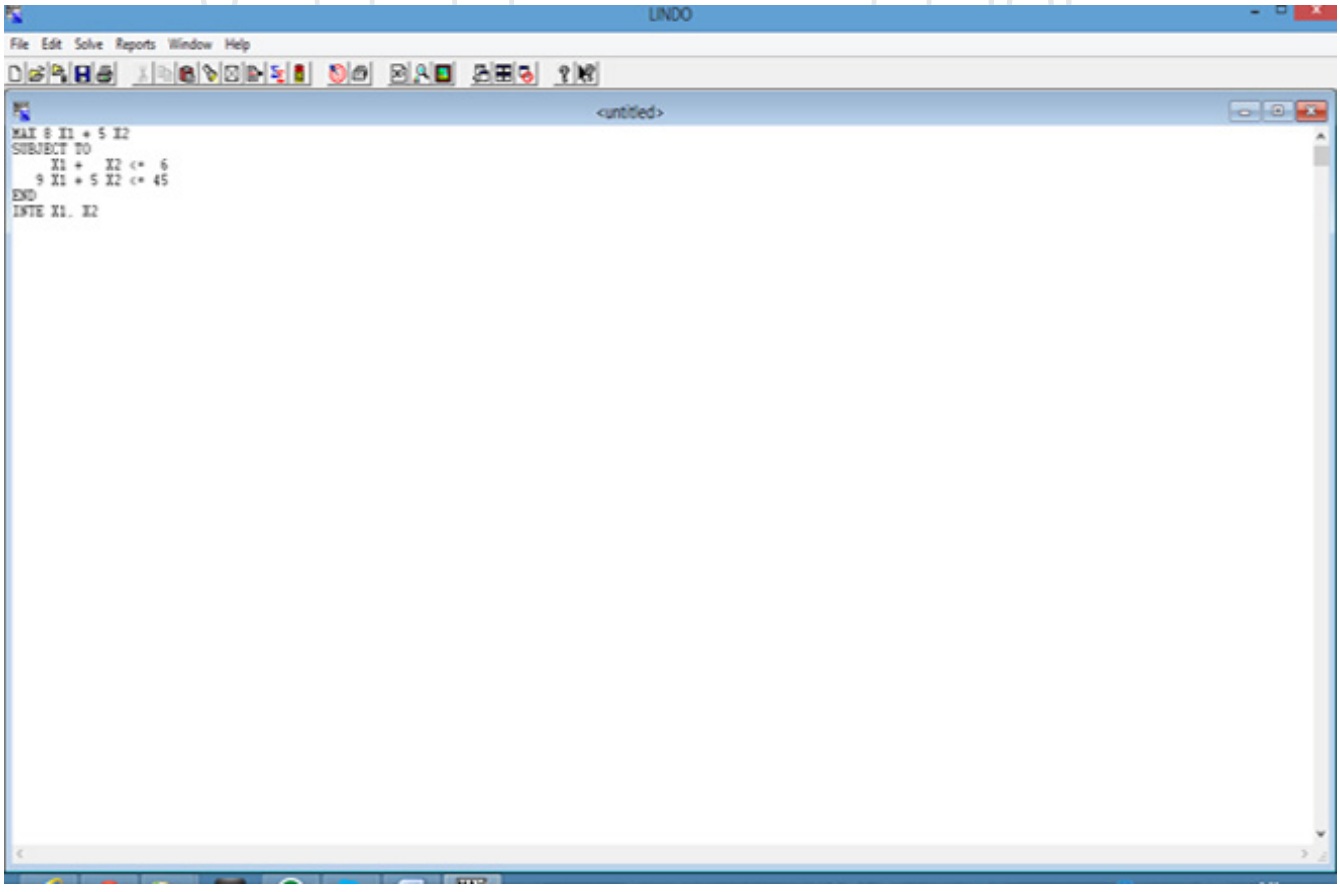
Sujeto a:

1. $X_1 + X_2 \leq 6$
2. $9X_1 + 5X_2 \leq 45$

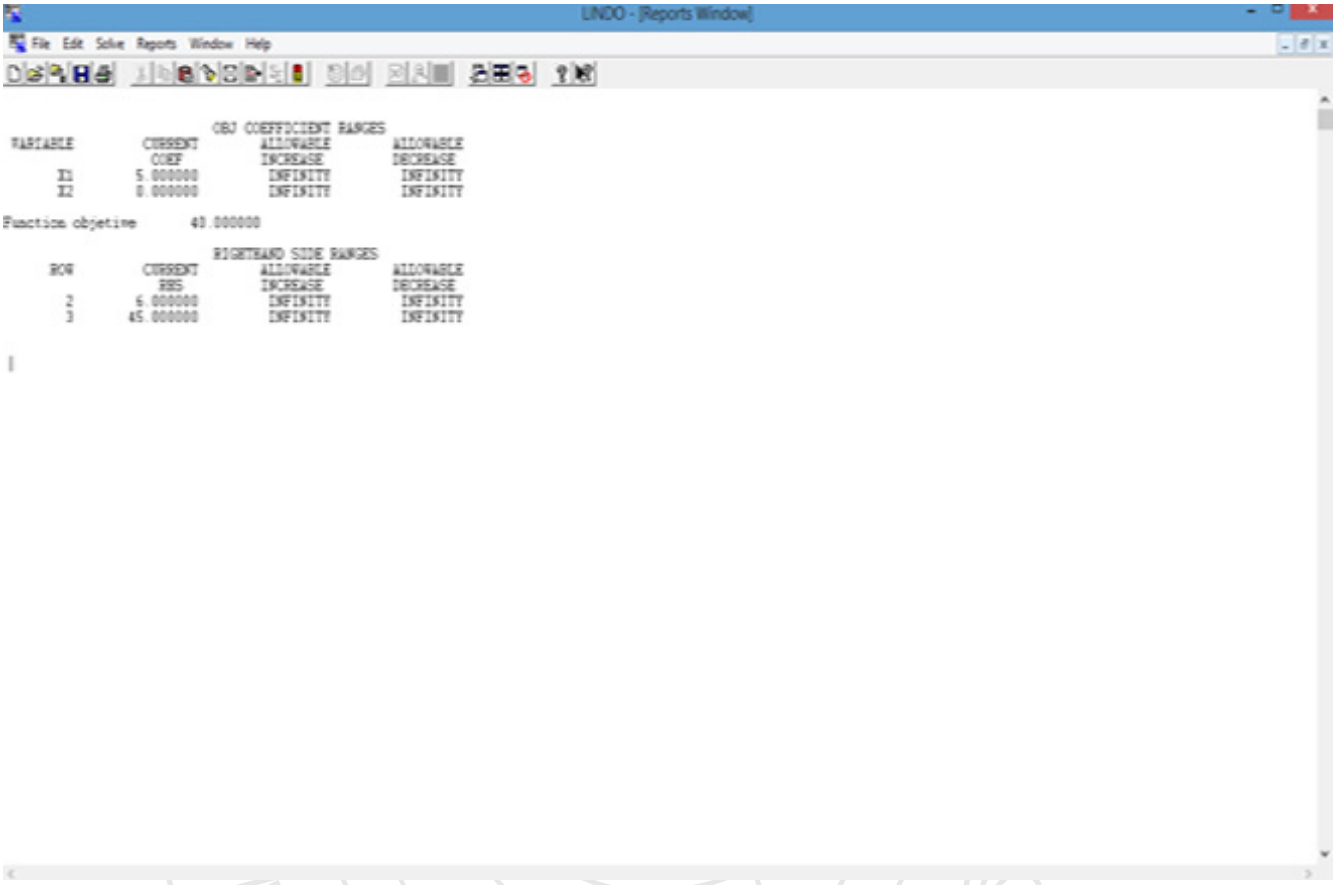
$X_1, X_2 \geq 0$
$X_1, X_2 \in \square^+$

Solución

Primero, se copia el problema en el tablero, luego de la instrucción New, después se resuelve con Solve:



D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.



Solución optima única al problema de programación lineal entera:

$X_1^* = 5$; $X_2^* = 0$; $Z^* = 40$

Se deben producir 5 unidades del artículo 1 ($X_1^* = 5$); se deben fabricar 0 unidades del artículo 2 (no se deben producir unidades del artículo 2) ($X_2^* = 0$); la utilidad máxima es de 40 u. m. ($Z^* = 40$). Estamos comprobando que los resultados son los mismos.

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

[INICIA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

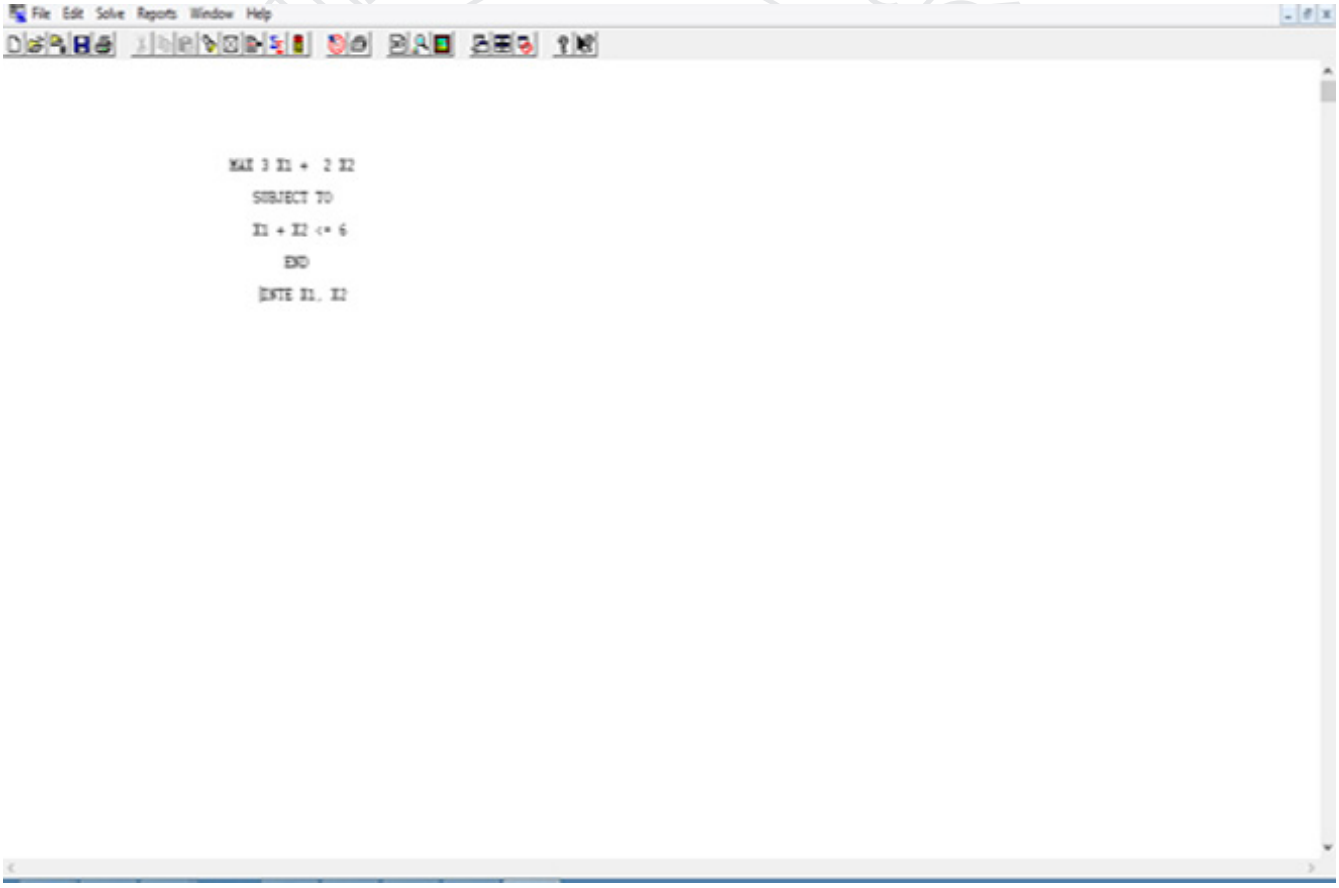
$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2$$

Con las siguientes restricciones:

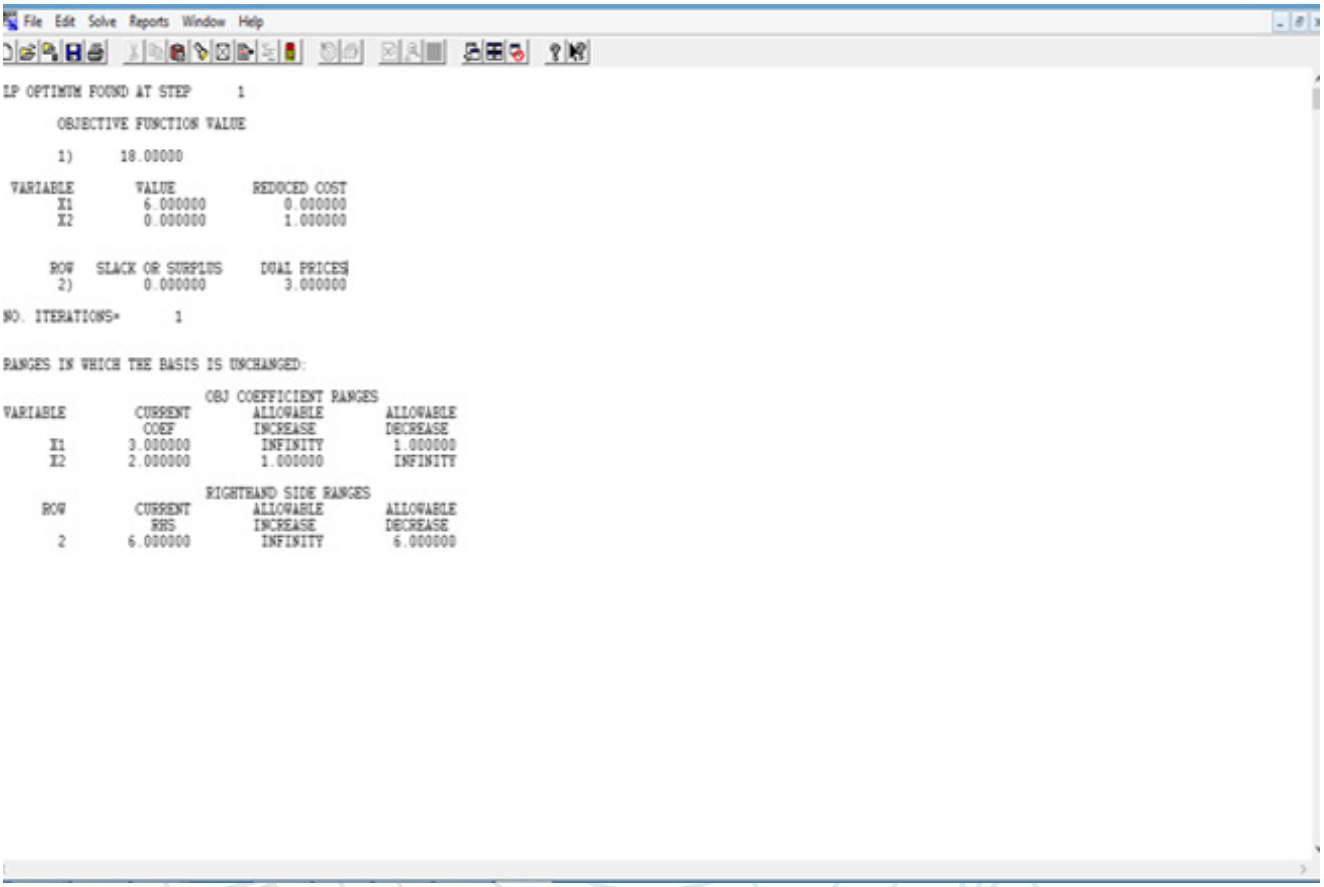
$$1.\ X_1 + X_2 \leq 6$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$
$$X_1, X_2 \in \square^+$$

Solución

Aplicando el programa Lindo, se tiene:



D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.



Solución optima única al problema de programación lineal entera:

$X_1^* = 6$; $X_2^* = 0$; $Z^* = 18$.

Se deben producir 6 unidades del artículo 1 ($X_1^* = 6$); se deben fabricar 0 unidades del artículo 2 (no se deben producir unidades del artículo 2) ($X_2^* = 0$); la utilidad máxima es de 18 u. m. ($Z^* = 18$).

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

[INICIA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$$\text{Max } Z = 7X_1 + 8X_2$$

Con sus restricciones:

$$1.\ 10X_1 + 3X_2 \leq 52$$
$$2.\ 2X_1 + 3X_2 \leq 18$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$
$$X_1, X_2 \in \mathbb{Z}^+$$

Solución

Estandarización:

$$1.\ 10X_1 + 3X_2 + S_1 = 52$$
$$2.\ 2X_1 + 3X_2 + S_2 = 18$$
$$0.\ Z - 7X_1 - 8X_2 = 0$$

Tabla 1. Simplex

		Cj	7	8	0	0
CB	VB	B	X_1	X_2	S_1	S_2
0	S_1	52	10	3	1	0
0	S_2	18	2	3	0	1
	Z	0	– 7	– 8	0	0

Variable que entra a la base: X_2
Variable que sale de la base: S_2

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tabla 2. Simplex

		Cj	7	8	0	0
CB	VB	B	X_1	X_2	S_1	S_2
0	S_1	34	8	0	1	– 1
8	X_2	6	2/3	1	0	1/3
	Z	48	– 2/3	0	0	8/3

Variable que entra a la base: X_1
Variable que sale de la base: S_1

Tabla 3. Simplex

		Cj	7	8	0	0
CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2
7	X_1	17/4	1	0	1/8	– 1/8
8	X_2	19/6	0	1	– 1/12	5/12
	Z	661/12	0	0	5/24	59/24

Solución óptima única para el problema primal:

$X_1^* = 17/4$; $X_2^* = 19/6$; $S_1^* = 0$; $S_2^* = 0$; $Z^* = 661/12$, pero para el problema de Programación Lineal Entera no corresponde la respuesta por no tener valores enteros. Para solucionar este problema aplicamos el algoritmo fraccional de Gomory:

$1 X_1 + 1/8 S_1 – 1/8 S_2 = 17/4$
$(1 + 0) X_1 + (0 + 1/8) S_1 + (– 1 + 7/8) S_2 = (4 + 1/4)$
$1/8 S_1 + 7/8 S_2 = 1/4$ Nueva ecuación
$1/8 S_1 + 7/8 S_2 \geq 1/4$ Nueva restricción
$– 1/8 S_1 – 7/8 S_2 + S_3 = – 1/4$ Ecuación a introducir al sistema

Aplicamos el dual–simplex, para quitarle la infactibilidad al sistema.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tabla 4. Dual–Simplex

		Cj	7	8	0	0	0
CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
7	X_1	17/4	1	0	1/8	– 1/8	0
8	X_2	19/6	0	1	– 1/12	5/12	0
0	S_3	– 1/4	0	0	– 1/8	– 7/8 – 7/8	1

Variable que sale de la base: S_3
Variable que entra a la base: S_1

Tabla 5. Dual–Simplex

		Cj	7	8	0	0	0
CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
7	X_1	4	1	0	0	– 1	1
8	X_2	10/3	0	1	0	1	– 2/3
0	S_1	2	0	0	1	7	– 8
	Z	656/12	0	0	0	1	5/3

Aplicamos el algoritmo fraccional de Gomory:

$1 X_2 + 1 S_2 – 2/3 S_3 = 10/3$
$(1 + 0) X_2 + (1 + 0) S_2 + (– 1 + 1/3) S_3 = (3 + 1/3)$
$1/3 S_3 = 1/3$
$1/3 S_3 = 1/3$ Nueva ecuación
$1/3 S_3 \geq /3$ Nueva restricción
$– 1/3 S_3 + S_4 = – 1/3$ Ecuación a introducir al sistema

Tabla 6. Dual–Simplex

		Cj	7	8	0	0	0	0
CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4
7	X_1	4	1	0	0	– 1	1	0
8	X_2	10/3	0	1	0	1	– 2/3	0
0	S_1	2	0	0	1	7	– 8	0
0	S_4	– 1/3	0	0	0	0	– 1/3	1
	Z	656/12	0	0	0	1	5/3	0

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Variable que sale de la base: S_4
Variable que entra a la base: S_3

Tabla 7. Dual–Simplex

		Cj	7	8	0	0	0	0
CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4
7	X_1	3	1	0	0	– 1	0	3
8	X_2	4	0	1	0	1	0	– 2
0	S_1	10	0	0	1	7	0	– 24
0	S_3	1	0	0	0	0	1	– 3
	Z	53	0	0	0	1	0	5

Solución optima única al problema de programación lineal entera:

$X_1^* = 3$; $X_2^* = 4$; $S_1^* = 10$; $S_2^* = 0$; $S_3^* = 1$; $S_4^* = 0$; $Z^* = 53$.

Se deben producir 3 unidades del artículo 1 ($X_1^* = 3$); se deben fabricar 4 unidades del artículo 2 ($X_2^* = 4$); sobraron 10 unidades de los recursos de la sección 1 ($S_1^* = 10$); se emplearon todos los recursos de la sección 2 ($S_2^* = 0$); sobró una unidad de los recursos de la sección 3 ($S_3^* = 1$); se utilizaron todos los recursos de la sección 4 ($S_4^* = 0$); la utilidad máxima es de 53 u. m. ($Z^* = 53$).

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

PROGRAMACION LINEAL ENTERA
ALGORITMO FRACCIONAL DE GOMORY

EJEMPLO 1:

MAX $Z = 8 X_1 + 5 X_2$

Con sus restricciones:

1. $X_1 + X_2 \leq 6$
2. $9 X_1 + 5 X_2 \leq 45$

$X_1, X_2 \geq 0$

$X_1, X_2 \in \square^+$

Solución:

Estandarización:

Agregamos las variables de holgura S_1 y S_2:

1. $X_1 + X_2 + S_1 = 6$
2. $9 X_1 + 5 X_2 + S_2 = 45$
0. $Z - 8 X_1 - 5 X_2 = 0$

Aplicamos el algoritmo simplex:

		Cj	8	5	0	0
CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2
0	S_1	6	1	1	1	0
0	S_2	45	9	5	0	1
	Z	0	– 8	– 5	0	0

Variable de entrada a la base la que más se aleja de cero por la izquierda en la última fila, es decir, se escoge entre (- 8, - 5, 0, 0)

Variable de salida de la base el cociente más cercano a cero por la derecha que resulta de dividir cada uno de los recursos éntrela columna que acaba de netar a la base, (6/1, 45/9)

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Variable que entra a la base: X_1 Variable que sale de la base: S_2

TABLERO 2:

CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2
0	S_1	1	0	4/9	1	– 1/9
8	X_1	5	1	5/9	0	1/9
	Z	40	0	– 5/9	0	8/9

Variable que entra a la base: X_2 Variable que sale de la base: S_1

TABLERO 3:

CB	VB	b	X1	X2	S1	S2
5	X2	9/4	0	1	9/4	– 1/4
8	X1	15/4	1	0	– 5/4	1/4
	Z	165/4	0	0	5/4	3/4

Solución Óptima Única para el problema primal:

$X_1^* = 15/4$; $X_2^* = 9/4$; $S_1^* = 0$; $S_2^* = 0$; $Z^* = 165/4$, pero para el problema de Programación Lineal Entera no nos sirve la respuesta, ya que las variables de decisión tienen valores fraccionarios. Para resolver este problema, aplicamos un refinamiento de la Programación Lineal, el cual corresponde al algoritmo fraccional de Gomory (es de aclarar que existen otros dos el entero y el mixto):

Existen otros, como son el algoritmo entero y el algoritmo mixto.

Paso 1. Resolver el problema primal, si la solución es entera, corresponde a la óptima para el problema de Programación Lineal Entera.

Paso 2. Seleccionar decimales y escoger aquel que tenga la mayor parte fraccionaria tomando las ecuaciones completas.

Paso 3. Se separan la parte entera, es decir, quedarse solamente con la parte fraccionaria.

Nota: Luego de encontrar una solución óptima para el primal, por Simplex y después de agregarle la primera nueva ecuación al sistema se pasa a Dual – Simplex, para quitarle la infactibilidad al sistema.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A partir de los siguientes ejemplos, vamos a mostrar la manera de aplicar el algoritmo fraccional de Gomory para solucionar un problema de Programación Lineal Entera:

$1\ X_1 - 5/4\ S_1 + 1/4\ S_2 = 15/4$
$(1 + 0)\ X_1 + (-2 + 3/4)\ S_1 + (0 + 1/4)\ S_2 = (3 + 3/4)$
$3/4\ S_1 + 1/4\ S_2 = 3/4$ Nueva ecuación
$3/4\ S_1 + 1/4 S_2 \geq 3/4$ Nueva restricción
$-3/4\ S_1 - 1/4\ S_2 + S_3 = -3/4$ Ecuación a introducir al sistema

A continuación se aplica el dual – simplex, con el objetivo de quitarle la infactibilidad al sistema.

TABLERO 4: DUAL – SIMPLEX

CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
5	X_2	9/4	0	1	9/4	– 1/4	0
8	X_1	15/4	1	0	– 5/4	1/4	0
0	S_3	– 3/4	0	0	– 3/4	– 1/4	1
	Z	165/4	0	0	5/4	3/4	0

Variable que se vuelve no básica: S_3 Variable que se vuelve básica: S_2

TABLERO 5: DUAL – SIMPLEX

CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
5	X_2	0	0	1	0	– 1	3
8	X_1	5	1	0	0	2/3	– 5/3
0	S_1	1	0	0	1	1/3	– 4/3
	Z	40	0	0	0	1/3	5/3

Solución Optima Unica al problema de Programación Lineal Entera:

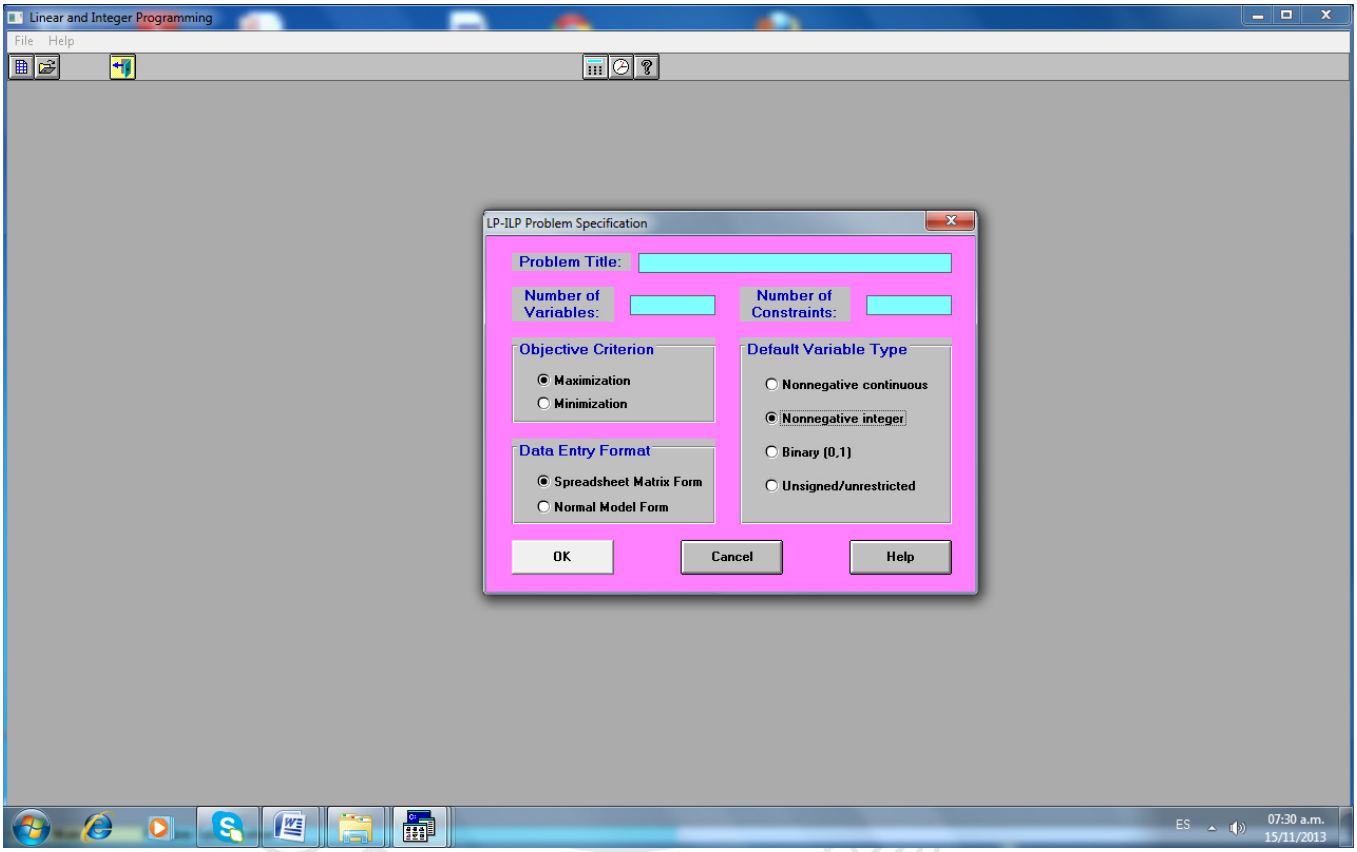
$X_1^* = 5$; $X_2^* = 0$; $S_1^* = 1$; $S_2^* = 0$; $S_3^* = 0$; $Z^* = 40$.

EJEMPLO 2:

Vamos a resolver el anterior problema con el software WINQSB:

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

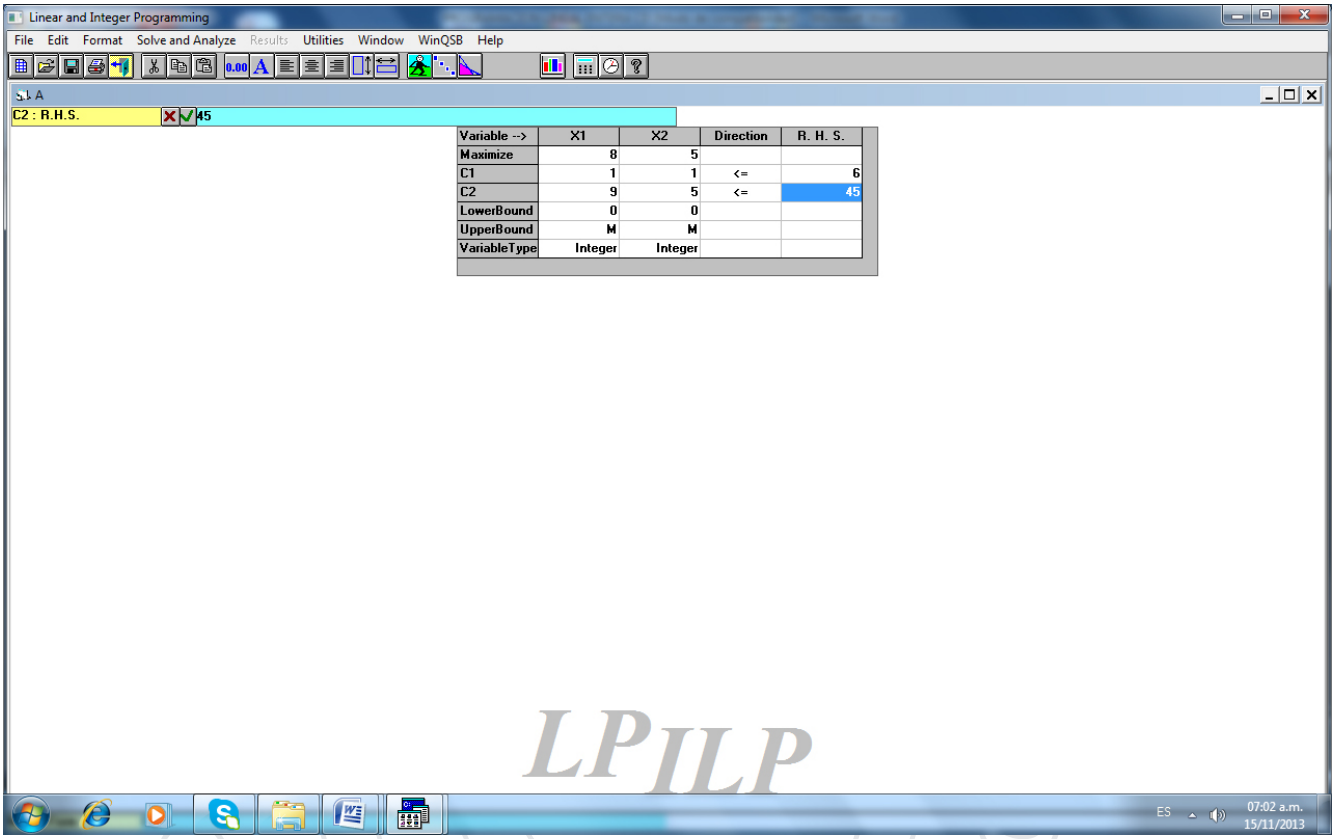
La primera ventana que nos encontramos al abrir el programa es la siguiente, en la cual aprovechamos para darle un nombre al problema (Problem Title), número de variables (Number of Variables) , número de restricciones (Number of Constraints), criterio de la función objetivo (maximization o minimization), en este caso (Nonnegative Integer), formato para entrada de datos (Spreadsheet Matrix Form) y OK para introducir los datos.



Para trabajar con un problema nuevo, se puede hacer desde File, New Problem o desde el botón que se encuentra situado en el botón situado en el extremo superior izquierdo.

A continuación se introducen los datos del problema a solucionar:

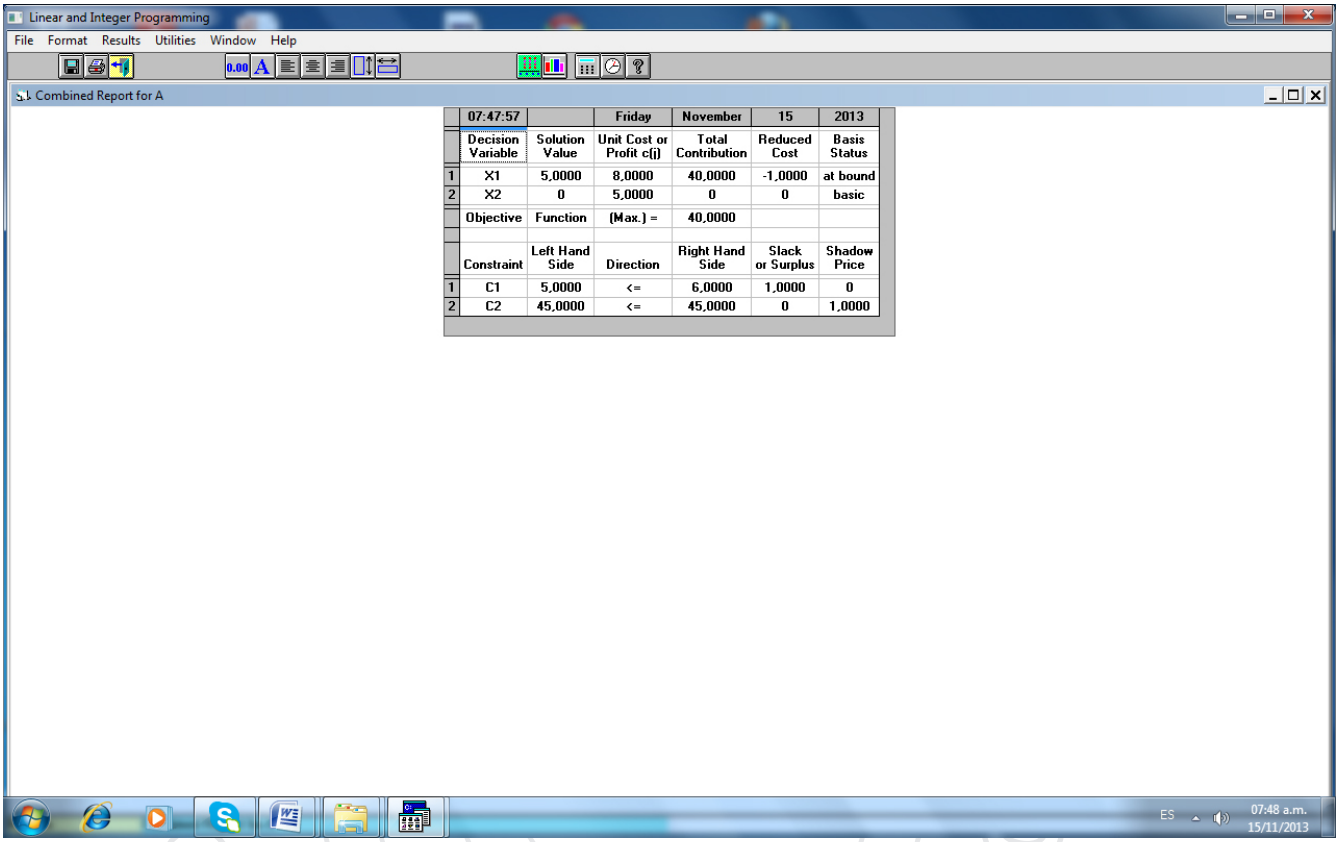
D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.



Nos vamos para Solve and Analyze, para resolver el problema:

LPILP

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.



Solución Optima Unica al problema de Programación Lineal Entera:

$X_1^* = 5$; $X_2^* = 0$; $Z^* = 40$.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Investigación de Operaciones
Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

Soluciones Unidad 5

Algoritmos especiales: El problema del transporte

5.1 La asignación por el método de la esquina noroeste se muestra en la Tabla 5.7 y el costo inicial es de 65'500 + 500M. Después de cuatro iteraciones se llega a la solución óptima de $60'000 con el siguiente plan de asignación: de las plantas mandar toda su capacidad al almacén 1 y de este almacén surtir a las cuatro concesionarias.

5.2 Con el método MAV se llega en 1 iteración, con el del método noroeste en 3 y con el método del costo mínimo en 2.

5.3 a) Costo de $15'650

	Veracruz	Ciudad de México	Cuernavaca	Tlaxcala	Oferta
Puebla	200	250	100		550
Satélite			300	350	650
Nodo ficticio				200	200
Demanda	200	250	400	550	

b) solución óptima $14450

	Veracruz	Ciudad de México	Cuernavaca	Tlaxcala	Oferta
Puebla	200	250	100		550
Satélite			100	550	650
Nodo ficticio			200		200
Demanda	200	250	400	550	

5.4 La solución generada por MAV es la solución óptima. Si creamos la solución inicial con el método de la esquina noroeste tenemos que hacer una iteración más para llegar a la solución óptima.

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

5.5 Tenemos que multiplicar $0.1/ton*km por cada uno de las distancias de la tabla para que nos dé como resultado $/ton. La solución inicial por el método de la esquina noroestes nos da un costo de $8'765

	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Oferta
Plantación 1	400	50		450
Plantación 2		400		400
Plantación 3		75	225	300
Demanda	400	525	225	

Después de dos iteraciones se llega al siguiente plan de distribución

	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Oferta
Plantación 1	400		50	450
Plantación 2		225	175	400
Plantación 3		300		300
Demanda	400	525	225	

El costo de este plan de distribución es de $4'977.5. Los máximos beneficios son 450(9.5) + 6.5(400) + 5(300) – 4977.5 = **$3'397.5**

5.6 El costo de distribución óptimo es $6'115. Los beneficios son 450(9.5) + 6.5(400) + 5(300) – 6'115 = **$2'260**. No le conviene, las ganancias son menores que en el problema 5.5.

5.7 En este caso los orígenes y destinos son los periodos (P)rimavera, (V)erano, (O)toño e (I)nvierno. La oferta es la capacidad de producción en cada uno de los periodos y la demanda es el pronóstico hecho por el depto. de mercadotecnia. Existe un costo unitario de producción para cada periodo y un costo de almacenaje de $10. La tabla inicial es:

	P	V	O	I	Oferta
P	80	90	100	110	30'000
V	M	85	95	105	25'000
O	M	M	82	92	30'000
I	M	M	M	86	25'000
Demanda	25'000 – 10'000	40'000	30'000	15'000+10'000	

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Por ejemplo, en primavera se van a producir 30'000 unidades si las consumimos en el mismo periodo nos cuentan $80, si consumimos $20'000 unidades en primavera y 10'000 en veranos, éstas nos constarán $80 más $10 pesos por almacenarlas un periodo. El costo de M significa que no podemos producir para periodos anteriores.

5.8 La solución inicial generada por MAV

	P	V	O	I	Oferta
P	15'000	15'000			30'000
V		25'000	0	0	25'000
O			30'000		30'000
I				25'000	25'000
Demanda	15'000	40'000	30'000	25'000	

La costo del plan de producción es $9'285'000, la solución óptima es la generada por MAV. Por lo tanto la utilidad es 120(15'000)+140(40'000)+125(30'000)+105(25000)-9'285'000= $4'490'000

5.9 *a)*Min 400xp1p2 + 400xp2p1 + 400xp1c + 900xp2c + 900xp1w1 + 100xcw2 + 200xw2w1 + 900w1w2

Subject to

xp1w1 + xp1c + + xp1p2 – xp2p1 = 50

xp2p1 + xp2c – xp1p2 = 40

xcw2 – xp1c – xp2c = 0

xw1w2 – xw2w1 – xp1w1 = -45

xw2w1 – xw1w2 – xcw2 = -45

end

*b)*Se deben de agregar una demanda de 10 en el almacén C -- restricción 3 en el problema en a). Sin embargo el problema no tiene solución ya que se debería incrementar la oferta en 10 unidades.

xcw2 – xp1c – xp2c = -10

end

c) al modelo en a) anexar la siguiente restricción **xp1c <= 20**

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.10 Construimos por MAV la solución inicial

	P1	P2	c	W1	W2	Oferta
P1	0	400	400	900	M	50 + B
P2	400	0	900	M	M	40+B
C	M	M	0	M	100	B
W1	M	M	M	0	900	B
W2	M	M	M	200	0	B
Demanda	B	B	B	45	45	

Si B = 90, después de una iteración encontramos la solución óptima con un costo de $ 70'000 y el siguiente plan de distribución

	P1	P2	c	W1	W2	Oferta
P1	50		90	0		140
P2	40	90				130
C					90	90
W1				90		90
W2				45	45	90
Demanda	90	90	90	135	135	

5.11 La solución es:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 80000.00

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
XP1P2	0.000000	700.000000
XP2P1	0.000000	100.000000
XP1C	20.000000	0.000000
XP2C	40.000000	0.000000

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

XP1W1	30.000000	0.000000
XCW2	60.000000	0.000000
XW2W1	15.000000	0.000000
W1W2	0.000000	900.000000
XW1W2	0.000000	200.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	300.000000
3)	0.000000	0.000000
4)	0.000000	900.000000
5)	0.000000	1200.000000
6)	0.000000	1000.000000
7)	0.000000	200.000000

Si restringimos el número de unidades por la ruta xp1c el costo se incremente en $10'000 ($80'000-$70'000)

5.13 Primero la demanda de plantas no es suficiente para satisfacer la demanda. Por lo tanto el plan de distribución tiene un costo de $2'490'000. La demanda de 3 no es atendida y solo se le llevaran 500 unidades a 4

	1	2	3	4	
A	1800	300		500	2600
B		1800			1800
Ficticio			**550**	**1250**	**1800**
Demanda	1800	2100	550	1750	

5.14 No porque el costo aumentaría a $3'960'000

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.15 Costo = $8'000, con el siguiente plan de distribución

	C	D	E	
A		100		100
B	100		100	200
Demanda	100	100	100	

5.16 El costo se mantiene igual ($5'000) mandando 100 unidades de A a E, 200 de B a C y 100 de C a E.

5.17 La oferta no es suficiente para los requerimientos de Vuelo-Mex. De tal manera que el costo mínimo de $8'525'000 se obtiene cuando se compran 110'000 litros a D para abastecer a B; 220'000 litros a E y se abastece A (165'000) y B (55'000); 330'000 litros a F y se abastece a C; y 385'000 a G para abastecer a A(110'000) y C(330'000). No se surten 385'000 litros a B.

5.19

a)

	1	2	3	4	5	6	7	8	Deman-da
1	0	M	M	1.5	1.2	M	M	M	450+B
2	M	0	M	1.3	0.6	M	M	M	700+B
3	M	M	0	2	0.7	M	M	M	500+B
4	M	M	M	0	M	1	0.6	0.7	B
5	M	M	M	0.2	0	0.8	0.4	0.9	B
6	M	M	M	M	M	0	0.3	0.8	B
7	M	M	M	M	M	M	0	0.4	B
8	M	M	M	M	M	0.8	M	0	B
Oferta	B	B	B	B	B	550+B	500+B	600+B	

b) Min 1.5P1D4 + 1.2P1D5 + 1.3P2D4 + 0.6P2D5 + 2P3D4 + 0.7P3D5 +

D4C6 + 0.6D4C7 + 0.7D4C8 + 0.2D5D4 + 0.8D5C6 + 0.4D5C7 + 0.9D5C8 +

0.3C6C7 + 0.4C7C8 + 0.8C6C8 + 0.8C8C6

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Subject to

P1D5 + P1D4 = 450

P2D4 + P2D5 = 700

P3D4 + P3D5 = 500

D4C6 + D4C7 + D4C8 - P1D4 - P2D4 - P3D4 = 0

D5D4 + D5C6 + D5C7 + D5C8 - P1D5 - P2D5 - P3D5 = 0

C6C7 + C6C8 - D4C6 - D5C6 = - 550

C7C8 - D4C8 - D5C8 = -500

C8C6 - D4C8 - D5C8 - C6C8 = - 600

End

c) $2430

d) D4C6 + D4C7 + D4C8 - P1D4 - P2D4 - P3D4 = -100

D5D4 + D5C6 + D5C7 + D5C8 - P1D5 - P2D5 - P3D5 = -100

D.R. © 2012 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1
X3 >= 2 X1

1.2
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \geq 2$
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 < 5$
$x_3+x_5 = 2$
$x_1+x_4 \leq 2$

1.3
$x_1+x_4+x_5 -1 >= M(1 - y_1)$
$x_2+x_3 -1 >= M(1 - y_2)$
$y_1 + y_2 = 1$
y_1, y_2

1.4
Nodo artificial de oferta.
Nodo artificial de demanda.

1.5
a) Falso.
b) Verdadero.
c) Falso
d) Falso.
e) Verdadero

1.9
Variables
$xij = 1$ si el arco (i,j) pertenece a la ruta más corta, 0 en caso contrario.
Minimizar $z = 10x_{12} + 5x_{14} + 7x_{42} + 8x_{25} + 3x_{23} + 9x_{36} + 7x_{56} + 6x_{53} + 11x_{45}$

Sujeto a:
Las restricciones deben ser por nodo y representar la conservación de flujo del nodo:

Total de flujo entrando al nodo = *total de flujo saliendo del nodo*

Se pondrán tres a manera de ejemplo.
Nodo 1 (el nodo uno es el nodo de origen, por tanto recibe una unidad): $1= x_{12}+x_{14}$.
Nodo 5: $x_{25} + x_{45} = x_{53}+x_{56}$.
Nodo 6: $x_{36}+ x_{56} =1$

1.13
Si x_{ij} es la cantidad de productos a enviar del punto i al punto j, es necesario definir unas variables enteras y_{ij} que representen la cantidad de camiones (llenos o semi-llenos) que se envían del punto i al punto j y añadir la restricción ($y_{ij} >= x_{ij} / Q$).

Problema reto
Una empresa produce jugos de manzana, naranja, zanahoria, betabel, naranja-zanahoria, revitalizante y energizante. La empresa no tiene problemas de demanda, todo lo que produce lo vende y ha determinado que de cada kilo de fruta/verdura se puede obtener un litro de jugo. En las tablas 1.20 y 1.21 se muestra la información sobre precios, costos, disponibilidad de producto y composición de los jugos. ¿Cuántos litros de cada jugo debe fabricar para obtener el máximo beneficio económico?

Tabla 1.20

Fruta/Verdura	Disponibilidad (kilos)	Costo (kilos)	Precio de venta (litro)
Manzana	20000	$25.00	$32.00
Naranja	45000	$9.00	$15.00
Zanahoria	32000	$9.95	$17.00
Betabel	19000	$17.50	$25.00

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Tabla 1.21

Jugo	Especificación	Precio de venta
Naranja-zanahoria	50% naranja 50% zanahoria.	$16.00
Revitalizante	No menos de 20% de zanahoria No más de 60% de naranja No menos de 10% de manzana	$28.00
Energizante	25% betabel 30% naranja 40% zanahoria 5% manzana	$23.00

Solución

x_{11} : manzana para el jugo puro.
x_{13} : manzana para el jugo revitalizante.
x_{11} : manzana para el jugo energizante.
x_{21} : naranja para el jugo puro.
x_{22} : naranja para el jugo naranja-zanahoria.
x_{23} : naranja para el jugo revitalizante.
x_{24} : naranja para el jugo energizante.
x_{31} : zanahoria para el jugo puro.
x_{32} : zanahoria para el jugo naranja-zanahoria.
x_{33} : zanahoria para el jugo revitalizante.
x_{34} : zanahoria para el jugo energizante.
x_{41} : betabel para el jugo puro.
x_{43} : betabel para el jugo revitalizante.
x_{44} : betabel para el jugo energizante.

Función objetivo:

Maximizar $z = (32–25)\, x_{11} + (28–25)\, x_{13} + (23–25)\, x_{14} + (15–9)\, x_{21} + (16–9)\, x_{22} + (28–9)\, x_{23} + (23–9)\, x_{24} + (17–9.95)\, x_{31} + (16–9.95)\, x_{32} + (28–9.95)\, x_{33} + (23–9.95)\, x_{34} + (25–17.5)\, x_{41} + (23–17.5)\, x_{44}$.

Sujeto a:

$x_{11} + x_{13} + x_{14} \leq 20000$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 45000$
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 32000$
$x_{41} + x_{43} + x_{44} \leq 19000$
$x_{22} = 0.5(x_{32} + x_{22})$
$x_{32} = 0.5\ (x_{32} + x_{22}$
$x_{33} >= 0.2(x_{33} + x_{23} + x_{13})$
$x_{23} <= 0.6\ (x_{33} + x_{23} + x_{13})$
$x_{13} >= 0.1\ (x_{33} + x_{23} + x_{13})$
$x_{44} = 0.25\ (x_{44} + x_{24} + x_{34} + x_{14})$
$x_{24} = 0.3\ (x_{44} + x_{24} + x_{34} + x_{14})$
$x_{34} = 0.4\ (x_{44} + x_{24} + x_{34} + x_{14})$
$x_{14} = 0.05\ (x_{44} + x_{24} + x_{34} + x_{14})$
$x_{11} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{14} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0, x_{24} \geq 0, x_{31} \geq 0, x_{32} \geq 0, x_{33} \geq 0, x_{34} \geq 0, x_{41} \geq 0, x_{43} \geq 0, x_{44} \geq 0.$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1
$y_1^* = 3.6, y_2^* = 1.4 \ ; \ w^* = 320$

2.2
$x_1^* = 20, x_2^* = 60 \ ; \ z^* = 180$

2.3
$x_1^* = 30, x_2 = 0 \ ; \ z^* = 150$

2.4
$y_1^* = 7.5, y_2^* = 5 \ ; \ w^* = 75$

2.5
$x_1^* = 30, x_2 = 0 \ ; \ z^* = 150$

2.6
$x_1^* = 20, x_2 = 0, x_3 = 0 \ ; \ z^* = 100$

2.7
$x_1 = 0, x_2^* = 10, x_3 = 0, x_4 = 0 \ ; \ z^* = 50$

2.8
$x_1 = 0, x_2^* = 2.4, x_3^* = 19.2, x_4 = 0 \ ; \ z^* = 69.6$

2.9
$y_1 = 0, y_2^* = 12 \ ; \ w^* = -60$

2.10
Modelo es no acotado

2.11
$x_1^* = 40, x_2 = 0, x_3 = 0 \ ; \ z^* = 40$

2.12
Modelo no acotado

2.21
$x_1^* = 5, x_2^* = 7.5 \ ; \ z^* = 320$, sí se cumple el teorema fuerte de la dualidad.

2.22
$y_1^* = 1, y_2^* = 1, y_3 = 0 \ ; \ w^* = 120$, sí se cumple el teorema fuerte de la dualidad.

2.23
$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3^* = \frac{5}{3} \ ; \ w^* = 50$, sí se cumple el teorema fuerte de la dualidad.

2.24
$x_1^* = \frac{5}{3}, x_2 = 0, x_3 = 0 \ ; \ z^* = -60$, sí se cumple el teorema fuerte de la dualidad.

2.25
$c_1 \in (2, +\infty), \ b_1 \in [20, +\infty)$

2.26
$c_2 \in [\frac{9}{2}, +\infty), \ b_2 \in [20, +\infty)$

2.27
$c_2 \in [\frac{9}{2}, +\infty), \ b_2 \in [20, +\infty)$

2.28
$c_1 \in [\frac{-5}{3}, +\infty), \ b_1 \in [12, +\infty)$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1

Definición de variables

COA_i = costo de operación anual de la ciudad *i*.
X_{ij} = unidades obtenidas por los factores,
donde *i*= 1…5 (ciudad) y *j*= factor intangible 1…4

Función objetivo

Mín *f*(o) = COA_i

$COA_i = MO_i + T_i + IL_i + P_i + O_i$
MO = mano de obra
T= transportación
IL = impuestos locales
P = poder
O= otros

$F_{ii} = \text{sum } X_{ij}$ para *i*=1…5 (*j*=1 a 4)

Mín *f*(o) = F_i + COA

Fi = factor intangible

Restricciones

COA = 0, COA ≥ 0
Fi = 0, *Fi* ≥ 0

3.2

Variables

X_{ij} = Número de embarques del país de origen y al país destino *j*.
donde *i*=1…3 (L.A., Chicago y Dallas o Knox Ville),
j=1…3 (Denver, Seattle y Nueva York)

d = demanda
cap = capacidad
c = costo de embarque

Función objetivo

Mín *f*(o)= costo

Costo =

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} X_{ij}C_{ij} + 100{,}000\sum_{j=1}^{3} X3_j + 80{,}000\sum_{j=1}^{3} X4_j$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \geq D_j \qquad \text{para j=1…3}$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq Cap_i D_j \qquad \text{para i=1…4}$$

El modelo me va a decir el número de embarques a enviar de la planta origen al país destino, claro minimizando el costo tanto de manufactura como de envío.

No sería proporcionado la planta a abrir.

Restricciones

$X_{ij} \geq 0$ y entero
$D_i \geq 0$ se usa o no planta "y"
$D_i \leq 1$
D_i ent
$D_1 = 1$
$D_2 = 2$

3.3

Variable

X_{ij} = número de cargas del almacén *i* a la locación *j*
donde *i* = 1…5 *j* = 1…2
CM = costo por milla
NM = número de millas

Función objetivo

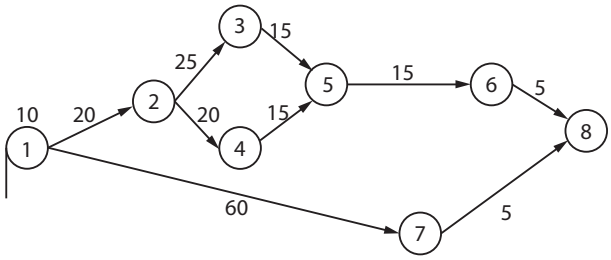
Mín F (o) = costo

$$\text{costo} = \sum_{j=1}^{3} x_{ij} cm_{ij} nm_{ij} l_j \text{ para } j = 1\ldots2$$

Restricciones

$L_j \geq 0$ abro o no la locación
$L_j \leq 1$
L_j = ent

3.4



La ruta crítica sería:
1-2-3-5-6-8 = 10+20+25+15+15+5= 80 días.
Se consideraría ruta crítica debido a que la dirección seleccionada y recorrida por la misma se caracteriza

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

por su gran extensión y demora del punto llamado inicio a otro punto llamado destino, consumiendo un gran número de días que en determinado momento al convertirse en términos monetarios, afectaría económicamente a la empresa.

Variables

E_i = tiempo más temprano de la actividad i, donde $i = 1…6$
L_i = tiempo más tarde de la actividad i, donde $i = 1…6$
P_i = tiempo normal de proceso de la actividad i.
V_i = costo adicional por la reducción de la actividad i.
R_i = tiempo real de la actividad i.
M_i = el tiempo más temprano de propuesta de la actividad i.

E1 = 10	L8 = E8
E2 ≥ E1 + 20	L7 ≤= L8 – 5
E3 ≥ E2 + 25	L6 ≤= L8 – 5
E4 ≥ E2 + 20	L5 ≤= L6 – 15
E5 ≥ E3 + 15	L4 ≤= L5 – 15
E5 ≥ E4 + 15	L3 ≤= L5 – 15
E6 ≥ E5 + 15	L2 ≤= L4 – 20
E7 ≥ E1 + 60	L2 ≤= L3 – 25
E8 ≥ E6 + 5	L1 ≤= L7 – 60
E8 ≥ E7 + 5	L1 ≤= L2 – 20

Ruta Crítica → $L_i – E_i = 0$ la ruta crítica se dará cuando el tiempo más tarde de la actividad i menos el tiempo más temprano de actividad i sea igual a cero; es decir, sin holgura.

Función objetivo

Máx F(o) = 1000 (e8 - m8) - v_i (p_i - r_i)

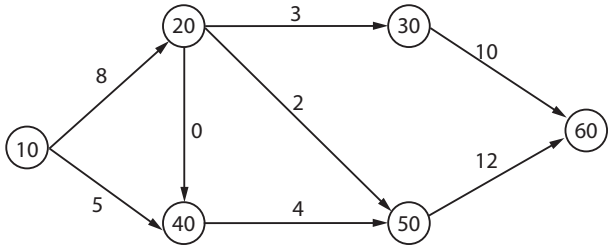
Restricciones

$E_i \geq 0$ donde $i = 1…6$
E_i = ent
$L_i \geq 0$ donde $i = 1…6$
L_i = ent

Restricciones respecto a los días a reducir:

$R_1 \geq 5$
$R_2 \geq 5$
$R_3 \geq 10$
$R_4 \geq 5$
$R_5 \geq 2$
$R_6 \geq 5$
$R_7 \geq 15$
$R_8 \geq 1$

3.5



La ruta crítica sería: 10-20-50-60
8+2+12= 22 días.

Definición de variables

E_i = tiempo más temprano de la actividad i, donde $i = 10…60$
L_i = tiempo más tarde de la actividad i, donde $i = 10…60$
H_i = tiempo de holgura de la actividad i, donde $i = 10…60$

E10 = 0	L60 = E60
E20 ≥ E10 + 8	L50 ≤ L60 – 12
E30 ≥ E20 + 3	L40 ≤ L50 – 4
E40 ≥ E10 + 5	L40 ≤ L20 – 0
E40 ≥ E20 + 0	L30 ≤ L60 – 10
E50 ≥ E20 + 0	L20 ≤ L40 – 0
E50 ≥ E40 + 4	L20 ≤ L30 – 3
E60 ≥ E30 + 10	L10 ≤ L40 – 5
E60 ≥ E50 + 12	L10 ≤ L20 – 8

Ruta crítica $L_i – E_i = 0$ cuando el tiempo de holgura sea cero.

tiempo de holgura: $H_i = L_i – E_i$
h50 = l50 – e50

Se considera como tiempo de holgura al intervalo de tiempo existente entre una actividad y otra.

Función objetivo

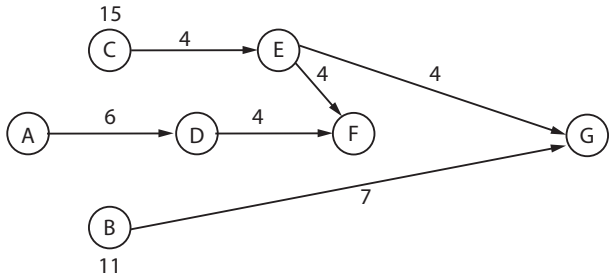
Mín F(o) = e60

Restricciones

$E_i \geq 0$ donde $i = 10…60$
E_i = ent
$L_i \geq 0$ donde $i = 10…60$
L_i = ent

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.6



La ruta crítica sería → a-d-f-e-g = 6+6+4+4+4= 24 días.

E_i = tiempo más temprano de la actividad *i*, donde *i* = a…g
L_i = tiempo más tarde de la actividad *i*, donde *i* = a…g
H_i = tiempo de holgura de la actividad *i*, donde *i* =a…g
P_i = tiempo normal de proceso de la actividad *i*, donde *i* =a…g
V_i = costo adicional por la reducción de la actividad *i*, donde *i* =a…g
R_i = tiempo real de la actividad *i*, donde *i* =a…g

EA = 0	LG = EG
EB = 11	LG ≤ LE – 4
EC = 13	LG ≤ LB – 7
ED ≥ EA + 6	LF ≤ LE – 4
EE ≥ EC + 4	LF ≤ LD – 4
EF ≥ ED + 4	LE ≤ LC – 4
EF ≥ EE + 4	LD ≤ LF – 4
EG ≥ EB + 7	LC = 13
EG ≥ EE + 4	LB = 11
	LA ≤ LD – 6

Ruta crítica → $L_i - E_i = 0$ cuando el tiempo de holgura sea cero.
Tiempo de holgura = $H_i = L_i - E_i$

Función objetivo
Mín F(o) = E_g
Costo por reducción: $E_i (P_i - R_i)$

Restricciones
$E_i \geq 0$ donde *i* = a…g
E_i = ent

$L_i \geq 0$ donde *i* = a…g
L_i = Ent

RA ≥ 3
RB ≥ 1
RC ≥ 2
RD ≥ 0
RE ≥ 1
RF ≥ 1
RG ≥ 2

3.7
Definición de variables
I = planta= 1…3
J = centro de distribución= 1…4
C_i = capacidad de producción en la planta *i*
S_i = costo de ordenar para la planta *i*
D_j = demanda del centro de distribución *j*
G = costo de distribución de la planta i al distribuidor *j*
X_{ij} = unidades a enviar de la planta i al distribuidor *j*

$\sum_{j=1}^{4} g_{ij}x_{ij} + s_i$ para *i* = 1...3 costo de distribución de la planta *i* al distribuidor *j*

Función objetivo
Minimizar los costos de distribución totales

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{4}\left(g_{ij}x_{ij}\right)+s_i\right)$$

Restricciones

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq c_i \quad \text{i} = 1...3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geq d_i \quad \text{j} = 1...4$$

Asuma que los costos de producción unitarios, excluyendo los costos de setup son los mismos en todas las plantas.

$X_{ij} \geq 0$ # unidades a enviar desde planta *i* hasta cd. *j* ent.
i= 1…3
j= 1…4

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Mín 750X11 + 1000X12 + 800X13 + 900X14 + 650X21 + 950X22 + 1250X23 + 500X24 + 800X31 + 525X32 + 675X33 + 775X34 + 20000y1 + 15000y2 + 12000y3

Restricciones

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 55$
$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 50$
$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 30$
$X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 20$
$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 15$
$X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 30$
$X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 35$
$y_1 - X_{11} - X_{12} - X_{13} - X_{14} \leq 0$
$y2 - X_{21} - X_{22} - X_{23} - X_{24} \leq 0$
$y3 - X_{31} - X_{32} - X_{33} - X_{34} \leq 0$
$100{,}000_{y1} - X_{11} - X_{12} - X_{13} - X_{14} \geq 0$
$100{,}000_{y2} - X_{21} - X_{22} - X_{23} - X_{24} \geq 0$
$100{,}000_{y3} - X_{31} - X_{32} - X_{33} - X_{34} \geq 0$

3.8

Definición de variables

I= capítulo = 1…10
R_i = % de examen del capítulo *i*
I_i =inversión del espacio del capítulo *i*
E =espacion total= 93.5" cuadradas
X_i = variable binaria que determina si se incluye o no las notas del capítulo *i*

$X_i \geq 0$ 1 si se incluyen notas del capítulo
≤ 1 0 no se incluyen notas del capítulo
X_i = ent

Función objetivo

Maximizar el % del resumen para el examen

$$\sum_{i=1}^{10} x_i r_i$$

Restricciones

$$\sum_{i=1}^{10} x_i i_i \leq e$$

$X_2 + X_3 + X_7 + X_8 + X_9 \geq 3$
$X_4 \leq X_5$
max $5X_1 + 10X_2 + 15X_3 + 10X_4 + 10X_5 + 5X_6 + 20X_7 + 5X_8 + 15X_9 + 5X_{10}$

Restricciones

$X_2 + X_3 + X_7 + X_8 + X_9 \geq 3$
$10X_1 + 18X_2 + 22X_3 + 16X_4 + 14X_5 + 20X_6 + 32X_7 + 12X_8 + 12X_9 + 10X_{10} \leq 93.5$
$X_5 - X_4 \leq 0$

3.9

Función objetivo

Mín $100Y_{11} + 200Y_{12} + 300Y_{13} + 350Y_{21} + 60Y_{22} + 100Y_{23}$

Restricciones

$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 35$
$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 30$
$X_{11} + X_{21} \geq 20$
$X_{12} + X_{22} \geq 15$
$X_{13} + X_{23} \geq 30$
$y_{11} - X_{11} \leq 0$
$y_{12} - X_{12} \leq 0$
$y_{13} - X_{13} \leq 0$
$y_{21} - X_{21} \leq 0$
$y_{22} - X_{22} \leq 0$
$y_{23} - X_{23} \leq 0$
$10{,}000Y_{11} - X_{11} \geq 0$
$10000y_{12} - X_{12} \geq 0$
$10000y_{13} - X_{13} \geq 0$
$10000y_{21} - X_{21} \geq 0$
$10000y_{22} - X_{22} \geq 0$
$10000y_{23} - X_{23} \geq 0$

3.10

Función objetivo

F.O. –≥ 3 4
Máx sum(sum(X_{ij}*(g_{ij} -r_i*a_{ij})))
$i = 1$ $j = 1$

Restricciones

4
Sum (*aij*) ≤ d*i* para $i = 1…3$
$j = 1$

3.11

Este problema parece ser muy similar al problema de transportación estándar discutido en el capítulo 3 y 6 excepto que los costos de localización deben ser considerados, en este problema no nos son dados la lista de suministros y las demandas a satisfacer para usar el mismo costo total de las rutas.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

En cambio, podemos escoger las localizaciones para usarlas como puntos de almacenamiento y el costo asociado con la elección de cada localización. Si el monto es importante, será enviado desde el almacén a cualquier destino diferente al del dummy el entero costo de localización deberá ser pagado. Hay que notar que la capacidad para las bodegas es suficiente ya que no todas las bodegas pueden ser usadas para satisfacer la demanda total del cliente. De hecho, esta compañía es de Nueva York, el almacén puede manejar toda la demanda por sí sola.

El objetivo es minimizar la suma de transportación y los costos de localización escogiendo una bodega o una de combinación de bodegas y rutas que vayan del almacén hacia los clientes.

Problemas de este tipo son un caso especial de los problemas de carga fija discutidos anteriormente, el de este caso es un tipo de problema de localización de almacén normalmente se resuelven de manera similar a los problemas de transportación, difieren de en que no todas las localizaciones posibles pueden ser pueden ser usadas.

El último costo alternativo deberá ser usado por una sola localización para servir a todos los puntos de la demanda. Particularmente si un costo grande de localización está asociado con cada punto de suministro. Problemas de este tipo normalmente son llamados problemas de localización de almacén y son un tipo de un largo grupo e problemas conocidos como problemas de localización. La fórmula matemática de los problemas de localización de almacén es una combinación de problemas de cargas fijas y problemas de transportación.

N = número de clientes o puntos de demanda.
M = numero de localizaciones de almacenes a considerar
S_i = capacidad del almacén "i"
D_j = demanda del cliente "j"
C_{ij} = costo de transportación por unidad para el almacén i y el cliente *j*.
F_i = costo de localización para el almacén *i*.
X_{ij} = cantidad comprada desde el almacén *i* para el cliente *j*.
Y_i = vale 1 si cualquier cantidad es comprada del punto de compra y 0 si no se compra.

El modelo general para los problemas de localización debe ser expresado de esta manera.

Función objetivo
Mín $_z$ = sum sum $c_{ij} X_{ij}$ + sum $f_i y_i$

Restricciones
sum $X_{ij} = d_j$
sum $X_{ij} \leq$ si y_i

3.12
Definición de variables
X_{ij} = ventas de la región i del administrador *j*
i = 1 (Bostock), 2 (McMahon), 3 (Miller)
j = 1 (región noreste), 2 (región suroeste)

Función objetivo
Máx X_{ij}

Restricciones
$X_{ij} \geq 0$
X_{ij} = entero
$X_{11} \leq 100$
$X_{12} \leq 95$
$X_{21} \leq 85$
$X_{22} \leq 80$
$X_{31} \leq 85$
$X_{32} \leq 75$

3.13
Evaluación de los resultados
•Se comprará 1 camión para transporte de gasolina.
•Se comprarán 10 camiones para el transporte de mudanzas.
•Se comprará 1 camión para el transporte de productos químicos.
•Maximizando así la ganancia anual de la firma a $122,500

3.14
Evaluación de los resultados
•Se producirán 75 waffleras.
•Se producirán 750 platos.
•No se producirán tostadores.
•El fabricante maximizara su utilidad a $1,875

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.15

Alternativas de corte

Alternativa 1

A	A
A	A
A	A
A	A

Alternativa 2

C	C	B
C	C	B

Alternativa 3

B	B	B	B	B
B	B	B	B	B

Alternativa 4

A	A	
A	A	
C	C	B

•Se utilizaron 313 piezas cortadas de la alternativa 1
•Se utilizaron 200 piezas cortadas de la alternativa 2
•Se utilizaron 80 piezas cortadas de la alternativa 3
•Minimizando así el recorte perdido usando un total de 593 piezas de tamaño estándar.

3.16

Evaluación de los resultados

•Se utilizaran 37 cortes de la alternativa 1
•Se utilizaran 3 cortes de la alternativa 2
•Se utilizaran 3 cortes de la alternativa 4
•Se utilizaran 72 cortes de la alternativa 7
•Minimizando así el recorte perdido usando 115 rollos de tamaño estándar

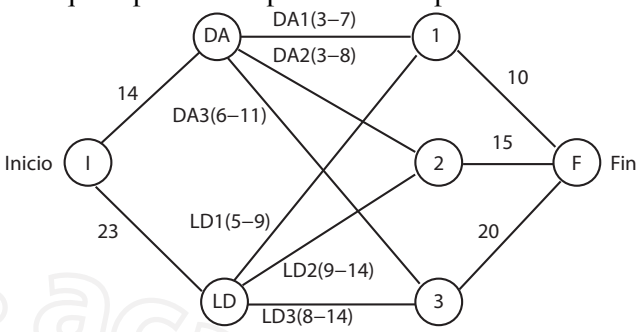
3.17

Evaluación de los resultados

•Se producirán 750 productos tipo a en el primer periodo en tiempo normal.
•Se producirán 1,500 productos tipo a en el segundo periodo en tiempo normal.
•No se producirán en tiempo extra ningún producto tipo "a".
•Se producirán 250 productos tipo b en el primer periodo tiempo normal.
•Se producirán 200 productos tipo b en el segundo período en tiempo normal.
•Se producirán 400 productos tipo b en el segundo periodo en tiempo extra.
•La planta manufacturera minimizará así el costo de producción a $88,500.

3.18

Red que representa el problema de operadoras



Evaluación de los resultados "l"

•En el turno 1 habrá 5 operadoras de asistencia de directorio y 5 de larga distancia.
•En el turno 2 habrá 3 operadoras de asistencia de directorio y 12 de larga distancia.
•En el turno 3 habrá 11 operadoras de asistencia de directorio y 9 de larga distancia.

3.19

Función objetivo

Mín $Xa_1 + Xb_1 + Xc_1 + Xa_2 + Xb_2 + Xc_2 + Xa_3 + Xb_3 + Xc_3$

Restricciones

$Xa_1 \geq 0$
$Xa_2 \geq 0$
$Xa_3 \geq 0$
$Xb_1 \geq 0$
$Xb_2 \geq 0$
$Xb_3 \geq 0$
$Xc_1 \geq 0$
$Xc_2 \geq 0$
$Xc_3 \geq 0$
$20\ Xa_1 + 40\ Xb_1 + 75\ Xc_1 \geq 2{,}500$
$16\ Xa_2 + 32\ Xb_2 + 60\ Xc_2 \geq 4{,}000$
$28\ Xa_3 + 56\ Xb_3 + 105\ Xc_3 \geq 3{,}500$

3.20

Definición de variables

X_i = número de empleados en el horario *i*

Función objetivo

Mín F(o) = número mínimo de empleados requeridos

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Restricciones
$X_i \geq 0$
X_i = ent
i = 4 hr

$X_1 \leq 3$
$X_2 \leq 5$
$X_3 \leq 10$
$X_4 \leq 6$
$X_5 \leq 10$
$X_6 \leq 8$

3.21
Definición de variables
X_{ij} = cantidad de maestros "i" que forman el comité del depto. "j"
$X_{ij} \geq 0$ no se escoge
$X_{ij} \leq 1$ si se escoge
X_{ij} = Ent
C_{ij} = costo del maestro "i" del depto. "j"

"i" =1..8
"j" =1..8

Restricciones
$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 = 4$
$X_{14}, X_{24}, X_{34}, X_{44}, X_{54}, X_{64}, X_{74}, X_{84} =\geq 5$
$X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{55} + X_{65} + X_{75} + X_{85} \leq 100$
$X_{12}, X_{22}, X_{32}, X_{42}, X_{52}, X_{62}, X_{72}, X_{82} \leq 1$
$X_1 + X_7 = 0$
$X_n \geq 0$

Función objetivo

$$Mín \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} x_{ij} c_{ij}$$

3.22
Función objetivo
Mín $2.5X_1 + 2.6X_2 + 3X_3 + 4.1X_4 + 4X_5 + 3.6X_6 + 4.5X_7 + 3.1X_8$

Restricciones
$X_1 + X_2 \geq 500$
$X_3 + X_4 \geq 300$
$X_5 + X_6 \geq 1000$
$X_7 + X_8 \geq 200$
$.1X_1 + .1X_3 + .1X_5 + .1X_7 \leq 120$
$.2X_1 + .2X_3 + .2X_5 + .2X_7 \leq 260$
$.11X_1 + .11X_3 + .1X_6 + .1X_8 \leq 140$
$.22X_2 + .22X_4 + .22X_6 + .22X_8 \leq 250$

Mín. costo = costo de embarque + costo de maquinado + costo ensamblado de cada uno de los consumidores

Ejemplo del costo del cliente a para sus productos

costo del producto del consumidor "a" = $2.50X_1 + 5.1X_2$
$1.5X_1 + 4X_2 + .1X_1 (4) + .2X_1 (3) + .11X_2 (4) + .22X_2 (3)$

Solución
$X_1 = 500, X_2 = 0, X_3 = 300, X_4 = 0, X_5 = 64, X_6 = 936, X_7 = 0, X_8 = 200$

Para el cliente "a" se deben de fabricar 500 unidades en la planta 1.
Para el cliente "a" se deben de fabricar 0 unidades en la planta 2.

Para el cliente "b" se deben de fabricar 300 unidades en la planta 1.
Para el cliente "b" se deben de fabricar 0 unidades en la planta 2.

Para el cliente "c" se deben de fabricar 64 unidades en la planta 1.
Para el cliente "c" de deben de fabricar 936 unidades en la planta 2.

Para el cliente "d" se deben de fabricar 0 unidades en la planta 1.
Para el cliente "d" se deben de fabricar 200 unidades en la planta 2.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.23

Variables del modelo

X_t=técnicos capacitados en el mes t ($t = 1, 2, 3, 4, 5$)

Y_t=técnicos con experiencia al inicio del mes t ($t = 1, 2, 3, 4, 5$)

Función objetivo

Costo total del trabajo = costo de los que están aprendiendo +costo de los especializados.

$= 1000 * (X_1+X_2+X_3+X_4+X_5) + 2000 * (Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_5)$

F.O.

Mín

$1000X_1 + 1000X_2 + 1000X_3 + 1000X_4 + 1000X_5 + 2000Y_1 + 2000Y_2 + 2000Y_3 + 2000Y_4 + 2000Y_5$

Restricciones

El número de técnicos especializados al inicio de enero son 50

$\geq Y_1 = 50$

El número de horas disponibles en cada mes debe de ser mayor o igual a la demanda del mes. El número de horas disponibles igual a número de horas de los técnicos especializados - número de horas dedicadas al aprendiz * número de técnicos que se está capacitando.

$\geq 160Y_1 - 50X_1 \geq 6000$
$160Y_2 - 50X_2 \geq 7000$
$160Y_3 - 50X_3 \geq 8000$
$160Y_4 - 50X_4 \geq 9500$
$160Y_5 - 50X_5 \geq 11000$

Técnicos con experiencia disponibles al inicio del mes t = técnicos con experiencia disponibles al inicio del mes $(t - 1)$ + técnicos capacitados durante el mes $(t - 1)$ - técnicos con experiencia que dejan el empleo durante el mes $(t - 1)$.

$\geq$Para feb. $Y_2 =< Y_1 + X_1 - 0.05Y_1 \not\in Y_2 \leq 0.95Y_1 + X_1$
Para mar. $Y_3 =< Y_2 + X_2 - 0.05Y_2 \not\in Y_3 \leq 0.95Y_2 + X_2$
Para abr. $Y_4 =< Y_3 + X_3 - 0.05Y_3 \not\in Y_4 \leq 0.95Y_3 + X_3$
Para may. $Y_5 =< Y_4 + X_4 - 0.05Y_4 \not\in Y_5 \leq 0.95Y_4 + X_4$

Mín

$1000X_1 + 1000X_2 + 1000X_3 + 1000X_4 + 1000X_5 + 2000Y_1 + 2000Y_2 + 2000Y_3 + 2000Y_4 + 2000Y_5$

Sujeto a

$X_1 \geq 0$
$X_2 \geq 0$
$X_3 \geq 0$
$X_4 \geq 0$
$X_5 \geq 0$
$Y_1 = 50$
$Y_2 \geq 0$
$Y_3 \geq 0$
$Y_4 \geq 0$
$Y_5 \geq 0$
$160Y_1 - 50X_1 \geq 6000$
$160Y_2 - 50X_2 \geq 7000$
$160Y_3 - 50X_3 \geq 8000$
$160Y_4 - 50X_4 \geq 9500$
$160Y_5 - 50X_5 \geq 11000$
$0.95Y_1 + X_1 - Y_2 \geq 0$
$0.95Y_2 + X_2 - Y_3 \geq 0$
$0.95Y_3 + X_3 - Y_4 \geq 0$
$0.95Y_4 + X_4 - Y_5 \geq 0$

3.24

Variables

Z = costo total de distribución
X_{ij} = unidades enviadas de la planta i al distribuidor j
C_{ij} = costo de distribución de la planta i al distribuidor j
Z_{ik} = unidades enviadas de la planta i al cliente k
C_{ik} = costo de distribución de la planta i al cliente k
Y_{jk} = unidades enviadas del distribuidor j al cliente k
C_{jk} = costo de distribución del distribuidor j al cliente k
N_i = capacidad mensual de producción de la planta i
M_j = capacidad mensual de almacenamiento y distribución del almacén j
R_k = demanda mensual del cliente k

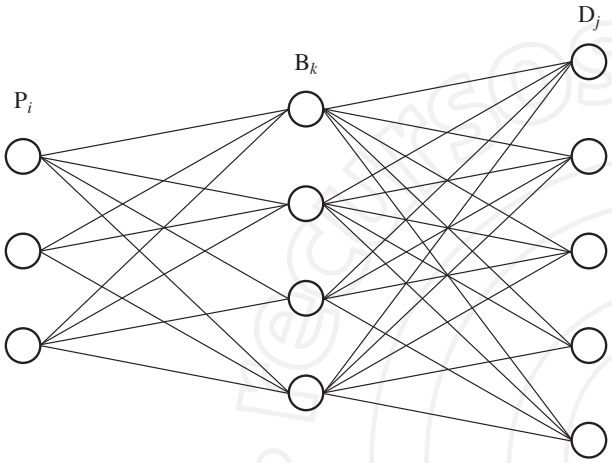
Función objetivo

Minimizar z = suma $(i, j)c_{ij}\ x_{ij}$ + suma $(i, k)\ c_{ik}\ z_{ik}$ + suma $(j, k)\ c_{jk}\ y_{jk}$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Restricciones
Suma $(j = 1\ldots m)\ x_{ij}$ + suma $(k = 1\ldots r)\ z_{jk} \leq n_i$ para $i = 1\ldots n$
Suma $(i = 1\ldots n)\ x_{ij} \leq m_j$ para $j = 1\ldots m$
Suma $(i = 1\ldots n)\ x_{ij} \geq$ suma $(k = 1\ldots r)\ y_{ij}$ para $j = 1\ldots m$
Suma $(i = 1\ldots n)\ z_{ik}$ + suma $(j = 1\ldots m)\ y_{jk} \geq r_k$ para $k = 1\ldots r$
$X_{ij}, z_{ij}, y_{jk} \geq 0$ y entero

3.25
Modelo de transbordo



Variables de entrada
C_i = Capacidad de la Planta *i*.
D_j = Demanda de la Distribuidora *j*.
E_{ik} = Costo de distribución de la planta *i* a la bodega *k*.
F_{kj} = Costo de distribución de la bodega *k* a la distribuidora *j*.
I_k = Inventario Inicial por bodega.

Variables de salida
X_{ik} = Cantidad de unidades que van de la planta *i* a la bodega *k*.
Y_{kj} = Cantidad de unidades que van de la bodega *i* a la distribuidora *j*.
G_k = Inventario real final en cada bodega.

Restricciones
Capacidad de la planta

$$\sum_{k=1}^{4} Xik \leq Ci \quad \text{para } i = 1,2,3.$$

Satisfacer la demanda.

$$\sum_{k=1}^{4} Ykj \leq Dj \quad \text{para } j = 1,2,3,4,5.$$

Balance de los nodos.

$$Ik + \sum_{j=1}^{3} Xik = Gk + \sum_{j=1}^{5} Ykj \quad \text{para } k = 1,2,3,4.$$

Función objetivo:

$$\text{F.O.} \rightarrow \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{4}(Xik)(Eik) + \sum_{k=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}(Ykj)(Fkj)$$

Declaración de variables
Gk, Xik, Ykj ≥ 0

3.26
La solución se basará en saber cuántos técnicos de tiempo completo se contratarán cada día, esto implica que ese día empiezan a trabajar y lo harán por los siguientes 4 días. De estos técnicos también hay que saber cuántos de ellos trabajarán día extra. También hay que saber por cada día cuantos trabajadores de medio tiempo se contratarán, y como con los trabajadores de tiempo completo ese día empiezan a trabajar y lo harán por los siguientes 4 días. Con estos datos se podrá calcular cuántos trabajadores equivalentes a tiempo completo habrá en cada día, y así poder plantear las restricciones necesarias como la cantidad de trabajadores en cada día.

Variables de entrada
HTC: Horas de tiempo completo por día.
HTM: Horas de medio tiempo por día.
NMEi: Cantidad mínima de empleados equivalentes a tiempo completo en el día i.
CT: Costo por hora de técnico de tiempo completo.
CTE: Costo por hora extra de técnico de tiempo completo.
CM: Costo por hora de técnico de medio tiempo.
PMC: Porcentaje máximo permitido de técnicos de medio tiempo con respecto a los técnicos de tiempo completo.

Variables de salida
TC_i: Técnicos de tiempo completo contratados el día *i*.
TCE_i: Técnicos de tiempo completo contratados el día *i* que trabajarán día extra.
TM_i: Técnicos de medio tiempo contratados el día *i*.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Variables de paso
TTC_i: Técnicos de tiempo completo que estarán trabajando el día i. (Este día no es su día extra).
TTE_i: Técnicos de tiempo completo que estarán trabajando el día i. (Este día si es su día extra).
TTM_i: Técnicos de medio tiempo que estarán trabajando el día i.

$TTC_1 = TC_4 + TC_5 + TC_6 + TC_7 + TC_1$
$TTC_2 = TC_5 + TC_6 + TC_7 + TC_1 + TC_2$
$TTC_3 = TC_6 + TC_7 + TC_1 + TC_2 + TC_3$
$TTC_4 = TC_7 + TC_1 + TC_2 + TC_3 + TC_4$
$TTC_5 = TC_1 + TC_2 + TC_3 + TC_4 + TC_5$
$TTC_6 = TC_2 + TC_3 + TC_4 + TC_5 + TC_6$
$TTC_7 = TC_3 + TC_4 + TC_5 + TC_6 + TC_7$

$TTE_1 = TCE_4 + TCE_5 + TCE_6 + TCE_7 + TCE_1$
$TTE_2 = TCE_5 + TCE_6 + TCE_7 + TCE_1 + TCE_2$
$TTE_3 = TCE_6 + TCE_7 + TCE_1 + TCE_2 + TCE_3$
$TTE_4 = TCE_7 + TCE_1 + TCE_2 + TCE_3 + TCE_4$
$TTE_5 = TCE_1 + TCE_2 + TCE_3 + TCE_4 + TCE_5$
$TTE_6 = TCE_2 + TCE_3 + TCE_4 + TCE_5 + TCE_6$
$TTE_7 = TCE_3 + TCE_4 + TCE_5 + TCE_6 + TCE_7$

$TTM_1 = TM_4 + TM_5 + TM_6 + TM_7 + TM_1$
$TTM_2 = TM_5 + TM_6 + TM_7 + TM_1 + TM_2$
$TTM_3 = TM_6 + TM_7 + TM_1 + TM_2 + TM_3$
$TTM_4 = TM_7 + TM_1 + TM_2 + TM_3 + TM_4$
$TTM_5 = TM_1 + TM_2 + TM_3 + TM_4 + TM_5$
$TTM_6 = TM_2 + TM_3 + TM_4 + TM_5 + TM_6$
$TTM_7 = TM_3 + TM_4 + TM_5 + TM_6 + TM_7$

Restricciones
$TCE_i \leq TC_i$

La cantidad de técnicos de tiempo completo contratados el día i debe ser menor o igual a la cantidad de técnicos de tiempo completo contratados el día i.

$$\frac{\sum_{i=1}^{7} TMi}{\text{--------}} \leq \text{PMC}$$

$$\sum_{i=1}^{7} TCi$$

La relación entre técnicos de medio tiempo contratados debe ser cuando mucho del PMC% en relación con los técnicos de tiempo completo contratados.

$HTC * (TTCi + TTEi) + HTM * TTMi \geq HTC * MEi$

La cantidad de técnicos trabajando equivalentes a tiempo completo trabajando el día i debe cubrir el mínimo de técnicos requeridos el día i.

Función objetivo

$$\text{F.O.} \rightarrow \sum_{i=1}^{7} (CT)(TTCi)(HTC) + (CTE)(TTEi)(HTC) + (CM)(TTMi)(HTM)$$

Min
Minimizar el costo de contratación de técnicos de tiempo completo y medio tiempo semanalmente.

3.27
La solución de este modelo se basará en conocer la cantidad de toneladas de carbonato de sodio que cada una de las plantas surtirán a cada una de las vidrieras (si es que se surte). Esto basado en tres cosas: 1. Ganancias debidas a las toneladas de carbonato de sodio surtidas a cada una de las vidrieras. 2. Gastos generados por transportar las toneladas de carbonato de sodio de cada planta a cada vidriera surtida. 3. Gastos debidos a la inversión de la construcción de cada planta a construir (se considerará que una planta se debe construir si está en la solución del modelo surta al menos a una vidriera).

Por último, en la nota se considera que se prorratee el costo de construcción de cada planta en 5 años, y como los datos que se proveen son de naturaleza mensual, se hará un análisis de este modelo de manera mensual.

Se les asignará un orden a cada planta y vidriera:

Orden	Planta	Vidriera
1	Guadalajara	Toluca
2	México	México
3	Querétaro	Querétaro
4	Veracruz	Guadalajara
5	Monterrey	Monterrey

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Variables de entrada
CTO_i = Costo de construir la planta i ($CTO5 = 0$)
CAP_i = Capacidad mensual de la planta i.
D_j = Demanda mensual de la Vidriera j.
U_j = Utilidad por tonelada de carbonato de sodio de vendérsela a la vidriera j.
T_{ij} = Costo de transporte por tonelada de carbonato de sodio de la planta i a la vidriera j.

Variable de salida
X_{ij} = Toneladas de carbonato de sodio que surtirá por mes la planta i a la vidriera j.

Variables de paso

$$V_j = \sum_{i=1}^{5} Xij \quad \text{para } j = 1\ldots5$$

La cantidad de toneladas de carbonato de sodio que recibe cada vidriera.

$$Y_j = \sum_{j=1}^{5} Xij \quad \text{para } i = 1\ldots5$$

La cantidad de toneladas de carbonato de sodio que vende cada planta.

$Z_i \quad \geq 0$
$\quad\quad \leq 1 \quad$ (0 si $Y_i = 0$, y 1 si $Y_i = 1$)
ent
Esta variable nos indica si la planta i se construye ($Z_i = 0$ No se construye la planta i, $Z_i = 1$ si se construye la planta i).

Restricciones
$V_j \geq D_j$
La cantidad de toneladas recibidas por cada vidriera de cubrir la demanda mensual de éstas.

$Y_i \leq CAP_i$
La cantidad de toneladas que vende cada planta no debe exceder su capacidad de producción.

	Y_i	
LI	LS	
0	0	$Z_i = 0$
1	CAP_i	$Z_i = 1$

$Z_i \leq Y_i$
$CAP_i * Z_i \geq Y_i$
Condiciones para el cálculo de Z_i (Se construye o no la planta i).

Función objetivo

$$\text{F.O.} \rightarrow \sum_{j=1}^{5} WjUj - \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} XijTij - \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{CTOi}{60}\right)Zi$$

Max

3.28
Variables

$$Xi = \begin{cases} 1 & \text{Si la estación es construida en la ciudad } i \\ 0 & \text{La estación no es construida} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Restricciones

R1) $X_1 + X_2 \geq 1$ (Ciudad 1)
R2) $X_1 + X_2 + X_6 \geq 1$ (Ciudad 2)
R3) $X_3 + X_4 \geq 1$ (Ciudad 3)
R4) $X_3 + X_4 + X_5 \geq 1$ (Ciudad 4)
R5) $X_4 + X_5 + X_6 \geq 1$ (Ciudad 5)
R6) $X_2 + X_5 + X_6 \geq 1$ (Ciudad 6)

Función objetivo
$Z_{mín} = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$

MÍN $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$
Sujeto a

R1) $X_1 + X_2 \geq 1$
R2) $X_1 + X_2 + X_6 \geq 1$
R3) $X_3 + X_4 \geq 1$
R4) $X_3 + X_4 + X_5 \geq 1$
R5) $X_4 + X_5 + X_6 \geq 1$
R6) $X_2 + X_5 + X_6 \geq 1$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.29

X11 = Trabajo tipo 1 en máquina 1
X12 = Trabajo tipo 1 en máquina 2
X13 = Trabajo tipo 1 en máquina 3
X21 = Trabajo tipo 2 en máquina 1
X22 = Trabajo tipo 2 en máquina 2
X23 = Trabajo tipo 2 en máquina 3
X31 = Trabajo tipo 3 en máquina 1
X32 = Trabajo tipo 3 en máquina 2
X33 = Trabajo tipo 3 en máquina 3
X41 = Trabajo tipo 4 en máquina 1
X42 = Trabajo tipo 4 en máquina 2
X43 = Trabajo tipo 4 en máquina 3
X51 = Trabajo tipo 5 en máquina 1
X52 = Trabajo tipo 5 en máquina 2
X53 = Trabajo tipo 5 en máquina 3

MAX X11 + X12 + X13 + X21 + X22 + X23 + X31 + X32 + X33 + X41 + X42 + X43 + X51 + X52 + X53

Sujeto a
8 X11 + 18 X21 + 12 X31 + 15 X41 + 8 X51 ≤ 72
12 X12 + 16 X22 + 8 X32 + 12 X42 + 5 X52 ≤ 72
25 X13 + 16 X23 + 18 X33 + 7 X43 + 13 X53 ≤ 144
X11 + X12 + X13 ≤ 6
X21 + X22 + X23 ≤ 12
X31 + X32 + X33 ≤ 14
X41 + X42 + X43 ≤ 15
X51 + X52 + X53 ≤ 22

Resultado

X11 = 5	X12 = 0	X13 = 0
X21 = 0	X22 = 0	X23 = 0
X31 = 0	X32 = 0	X33 = 0
X41 = 0	X42 = 0	X43 = 15
X51 = 4	X52 = 14	X53 = 3

F.O.: = 41 trabajos

3.30

La lectora 1 se asignará a cheques
La lectora 2 se asignará a notas
La lectora 3 se asignará a procesamiento de datos
La lectora 4 se asignará a ahorros
La lectora 5 se asignará a cambios

MÁX
60X1 – 150X2 + 30X3 + 50X4 + 70X6 + 60X7 + 40X8 + 50X9 + 30X11 – 150X12 + 10X13 + 30X14 + 40X16 – 150X17 150X18 + 60X19 + 40X21 + 70X22 + 50X23 + 80X24

Sujeto a
X1 + X2 + X3 + X4 + X5 = 1
X6 + X7 + X8 + X9 + X10 = 1
X11 + X12 + X13 + X14 + X15 = 1
X16 + X17 + X18 + X19 + X20 = 1
X21 + X23 + X22 + X24 + X25 = 1
X1 + X6 + X11 + X16 + X21 = 1
X2 + X7 + X12 + X17 + X22 = 1
X3 + X8 + X13 + X18 + X23 = 1
X4 + X9 + X19 + X14 + X24 = 1
X5 + X10 + X15 + X20 + X25 = 1

3.31

Los programas de turnos son independientes, la unión de dependientes, los llama basados en el programa de 5 días consecutivos y 8 horas por día de trabajo y solamente a empleados de tiempo completo.

El turno 1 descansa los días: lunes y martes
El turno 2 descansa los días: martes y miércoles
El turno 3 descansa los días: miércoles y jueves
El turno 4 descansa los días: jueves y viernes
El turno 5 descansa los días: viernes y sábado
El turno 6 descansa los días: sábado y domingo
El turno 7 descansa los días: domingo y lunes

El mínimo número de obreros requerido es de 18
Se requieren 3 obreros para el turno 1 matutino
Se requieren 2 obreros para el turno 2 matutino
Se requieren 3 obreros para el turno 3 matutino
Se requieren 1 obrero para el turno 4 matutino
Se requieren 1 obrero para el turno 7 matutino
Se requieren 4 obreros para el turno 2 vespertino
Se requieren 2 obreros para el turno 4 vespertino
Se requieren 1 obrero para el turno 6 vespertino
Se requieren 1 obrero para el turno 7 vespertino

MÍN X11 + X12 + X21 + X22 + X31 + X32 + X41 + X42 + X51 + X52 + X61 + X62 + X71 + X72

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Sujeto a
X21 + X31 + X41 + X51 + X61 ≥ 6
X22 + X32 + X42 + X52 + X62 ≥ 5
X31 + X41 + X51 + X61 + X71 ≥ 5
X32 + X42 + X52 + X62 + X72 ≥ 4
X11 + X41 + X51 + X61 + X71 ≥ 5
X12 + X42 + X52 + X62 + X72 ≥ 4
X11 + X21 + X51 + X61 + X71 ≥ 6
X12 + X22 + X52 + X62 + X72 ≥ 5
X11 + X21 + X31 + X61 + X71 ≥ 8
X12 + X22 + X32 + X62 + X72 ≥ 6
X11 + X21 + X31 + X41 + X51 ≥ 6
X12 + X22 + X32 + X42 + X52 ≥ 4
X11 + X21 + X31 + X41 + X71 ≥ 10
X12 + X22 + X32 + X42 + X72 ≥ 7

3.32

El turno 1 son los empleados que descansan lunes y martes
El turno 2 son los empleados que descansan martes y miércoles
El turno 3 son los empleados que descansan miércoles y jueves
El turno 4 son los empleados que descansan jueves y viernes
El turno 5 son los empleados que descansan viernes y sábado
El turno 6 son los empleados que descansan sábado y lunes

El número mínimo de cajeros requeridos 11

Se requieren 3 empleados en el turno 1
Se requieren 2 empleados en el turno 2
Se requieren 3 empleados en el turno 3
Se requieren 2 empleados en el turno 4
Se requieren 1 empleados en el turno 5
Se requieren 0 empleados en el turno 6

MÍN X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6

Sujeto a
$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 10$
$X_1 + X_4 + X_5 + X_6 \geq 4$
$X_1 + X_2 + X_5 + X_6 \geq 5$
$X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 8$
$X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \geq 6$
$X_1 + X_2 + X_3 + X_6 \geq 8$

3.33

X_{ij}= miles de carros SMC distribuidos de la planta *i* al almacén *j*.

MÍN 67 X11 + 16 X12 + 27 X13 + 65 X14 + 46 X15 + 112 X16
+ 58 X21 + 78 X22 + 39 X23 + 4 X24 + 20 X25 + 48 X26
+ 17 X31 + 96 X32 + 57 X33 + 20 X34 + 30 X35 + 32 X36
+ 15 X41 + 54 X42 + 22 X43 + 42 X44 + 27 X45 + 93 X46
+ 37 X51 + 66 X52 + 28 X53 + 20 X54 + 12 X55 + 72 X56
+ 306 Y1 + 140 Y2 + 200 Y3 + 164 Y4 + 88 Y5

Sujeto a
X11 + X12 + X13 + X14 + X15 + X16 - 18 Y1 ≤ 0
X21 + X22 + X23 + X24 + X25 + X26 - 24 Y2 ≤ 0
X31 + X32 + X33 + X34 + X35 + X36 - 27 Y3 ≤ 0
X41 + X42 + X43 + X44 + X45 + X46 - 22 Y4 ≤ 0
X51 + X52 + X53 + X54 + X55 + X56 - 31 Y5 ≤ 0
X11 + X21 + X31 + X41 + X51 = 10
X12 + X22 + X32 + X42 + X52 = 8
X13 + X23 + X33 + X43 + X53 = 12
X14 + X24 + X34 + X44 + X54 = 6
X15 + X25 + X35 + X45 + X55 = 7
X16 + X26 + X36 + X46 + X56 = 11

Resultado

X11 = 0	X21 = 0	X31 = 10
X12 = 8	X22 = 0	X32 = 0
X13 = 10	X23 = 0	X33 = 0
X14 = 0	X24 = 0	X34 = 0
X15 = 0	X25 = 0	X35 = 0
X16 = 0	X26 = 0	X36 = 11
X41 = 0	X51 = 0	Y1 = 1
X42 = 0	X52 = 0	Y2 = 0
X43 = 0	X53 = 2	Y3 = 1
X44 = 0	X54 = 6	Y4 = 0
X45 = 0	X55 = 7	Y5 = 1
X46 = 0	X56 = 0	

F.O.: = 1774.00

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

3.34

Máx $50X_1 + 80X_2 + 90X_3 + 120X_4 + 110X_5 + 40X_6 + 75X_7$

Sujeto a:

$X_1 + X_4 + X_5 \geq 2$

$X_2 + X_3 \leq 1$

$X_6 + X_7 = 1$

$480X_1 + 540X_2 + 680X_3 + 1000X_4 + 700X_5 + 510X_6 + 900X_7 \leq 3000$

Resultado

$X_1 = 0$

$X_2 = 0$

$X_3 = 1$

$X_4 = 1$

$X_5 = 1$

$X_6 = 1$

$X_7 = 0$

F.O: = 360.00

3.35

Variables de salida

X_j = Número de unidades a producir en un horario regular en el mes j.

Y_j = Número de unidades a producir en un tiempo extra en el mes j.

Z_j = Inventario al final del mes j.

donde $j = 1,\ldots,4$ (pero Z_4 no existe ya que no hay inv. en el mes 4)

MÍN $0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 7Y_1 + 7Y_2 + 7Y_3 + 7Y_4 + 3Z_1 + 3Z_2 + 3Z_3$

ST

$X_1 + Y_1 - Z_1 = 1800$

$X_2 + Y_2 + Z_1 - Z_2 = 2200$

$X_3 + Y_3 + Z_2 - Z_3 = 3400$

$X_4 + Y_4 + Z_3 = 2800$

$X_1 \leq 2400$

$X_2 \leq 2400$

$X_3 \leq 2400$

$X_4 \leq 2400$

$Y_1 \leq 800$

$Y_2 \leq 800$

$Y_3 \leq 800$

$Y_4 \leq 800$

Circuito No. 1: 11:00 – 17:00 \
Circuito No. 2: 4:00 – 18:00 Demanda = D_i
Circuito No. 3. 10:00 – 18:00 /

Tiempo circuito No. 1: 2 hr (ida y vuelta)
Tiempo circuito No. 2: 3 hr (ida y vuelta)
Tiempo circuito No. 3: 1 hr (ida y vuelta)

Los camiones son de 50 toneladas cada uno.

¿Cuántos camiones se requieren?

$X_{i,\, i+2}$ = en que horario inicia y termina un ciclo en el circuito 1

$Y_{i,\, i+3}$ = en que horario inicia y termina un ciclo en el circuito 2

$Z_{i,\, i+1}$ = en que horario inicia y termina un ciclo en el circuito 3

C1 = camiones en el circuito 1
C2 = camiones en el circuito 2
C3 = camiones en el circuito 3

MIN $C1X_{1113} + C1X_{1214} + C1X_{1315} + C1X_{1416} + C1X_{1517} + C2Y_{0407} + C2Y_{0508} + C2Y_{0609} + C2Y_{0710} + C2Y_{0811} + C2Y_{0912} + C2Y_{1013} + C2Y_{1114} + C2Y_{1215} + C2Y_{1316} + C2Y_{1417} + C2Y_{1518} + C3Z_{1011} + C3Z_{1112} + C3Z_{1213} + C3Z_{1314} + C3Z_{1415} + C3Z_{1516} + C3Z_{1617} + C3Z_{1718}$

Sujeto a:

$D1 \geq 170$

$D2 \geq 290$

$D3 \geq 340$

$C1 \leq 5$

$C2 \leq 12$

$C3 \leq 8$

$C1X_{1113} + C1X_{1315} = 1$

$C1X_{1315} + C1X_{1517} = 1$

$C1X_{1214} + C1X_{1416} = 1$

$C1X_{1113} + C1X_{1315} + C1X_{1517} = 1$

$C2Y_{0407} + C2Y_{0710} + C2Y_{1013} + C2Y_{1316} = 1$

$C2Y_{0508} + C2Y_{0811} + C2Y_{1114} + C2Y_{1417} = 1$

$C2Y_{0609} + C2Y_{0912} + C2Y_{1215} + C2Y_{1518} = 1$

$C3Z_{1011} + C3Z_{1112} + C3Z_{1213} + C3Z_{1314} + C3Z_{1415} + C3Z_{1516} + C3Z_{1617} + C3Z_{1718} = 1$

$50X_{1113} + 50X_{1214} + 50X_{1315} + 50X_{1416} + 50X_{1517} - D_1 = 0$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

$50Y_{0407} + 50Y_{0508} + 50Y_{0609} + 50Y_{0710} + 50Y_{0811} + 50Y_{0912} + 50Y_{1013} + 50Y_{1114} + 50Y_{1215} + 50Y_{1316} + 50Y_{1417} + 50Y_{1518} - D_2 = 0$

$50Z_{1011} + 50Z_{1112} + 50Z_{1213} + 50Z_{1314} + 50Z_{1415} + 50Z_{1516} + 50Z_{1617} + 50Z_{1718} - D_3 = 0$

Resultado

$X_{1113} = 1$
$X_{1214} = 0$
$X_{1315} = 1$
$X_{1416} = 1$
$X_{1517} = 1$

$Y_{0407} = 1$
$Y_{0508} = 1$
$Y_{0609} = 1$
$Y_{0710} = 1$
$Y_{0811} = 1$
$Y_{0912} = 0$
$Y_{1013} = 0$
$Y_{1114} = 0$
$Y_{1215} = 0$
$Y_{1316} = 0$
$Y_{1417} = 1$
$Y_{1518} = 0$

$Z_{1011} = 1$
$Z_{1112} = 0$
$Z_{1213} = 1$
$Z_{1314} = 1$
$Z_{1415} = 1$
$Z_{1516} = 1$
$Z_{1617} = 1$
$Z_{1718} = 1$

F.O: = 6 camiones

3.36

Asuma que este ciclo de requerimientos se repite indefinidamente. El gerente desea encontrar la programación de horarios de empleados que satisfaga los requerimientos a un mínimo costo.

MIN $6x_{11} + 6x_{21} + 6x_{31} + 6x_{41} + 6x_{51} + 6x_{61} + 6x_{71}$

sujeto a:

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} \geq 25$
$X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} + X_{61} + X_{71} \geq 33.334$
$X_{31} + X_{41} + X_{51} + X_{61} + X_{71} + X_{11} \geq 66.667$
$X_{41} + X_{51} + X_{61} + X_{71} + X_{11} + X_{21} \geq 50$
$X_{51} + X_{61} + X_{71} + X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 116.667$
$X_{71} + X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} > 50$
$X_{61} + X_{71} + X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} \geq 133.334$

Miércoles contratar 99 personas descansan lunes y martes
Viernes contratar 33 personas descansan miércoles y jueves
Sábado contratar 2 personas descansan jueves y viernes

El costo ser de $804.00 suponiendo que se les pague $1.00

3.37

X_{11} = Unidades enviadas de la planta "1" al almacén "1"
X_{12} = Unidades enviadas de la planta "1" al almacén "2"
X_{13} = Unidades enviadas de la planta "1" al almacén "3"
X_{21} = Unidades enviadas de la planta "2" al almacén "1"
X_{22} = Unidades enviadas de la planta "2" al almacén "2"
X_{23} = Unidades enviadas de la planta "2" al almacén "3"

MAX $4X_{11} + 4X_{12} + 3X_{13} + 5X_{21} + 5X_{22} + 4X_{23}$

Sujeto a:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 100$
$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 200$
$X_{11} + X_{21} \leq 150$
$X_{12} + X_{22} \leq 200$
$X_{13} + X_{23} \leq 350$
$X_{11} \geq 0$
$X_{12} \geq 0$
$X_{13} \geq 0$
$X_{21} \geq 0$
$X_{22} \geq 0$
$X_{23} \geq 0$

Resultados

$X_{11} = 0$
$X_{12} = 100$
$X_{13} = 0$
$X_{21} = 150$
$X_{22} = 50$
$X_{23} = 0$
F.O.: = 1400

3.38

Planteamiento

AT = 1 Si hay vuelo a Atlanta a las 8:00
= 0 No ....
AT = 1 Si hay vuelo a Atlanta a las 10:00
= 0 No ....
AT = 1 Si hay vuelo a Atlanta a las 12:00
= 0 No ....

LA = 1 Si hay vuelo a Los Ángeles a las 8:00
= 0 No ....
LA = 1 Si hay vuelo a Los Ángeles a las 10:00
= 0 No ....
LA = 1 Si hay vuelo a Los Ángeles a las 12:00
= 0 No ....

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

NY = 1 Si hay vuelo a New York a las 8:00
= 0 No ....
NY = 1 Si hay vuelo a New York a las 10:00
= 0 No ....
NY = 1 Si hay vuelo a New York a las 12:00
= 0 No ....

PE = 1 Si hay vuelo a Peoria a las 8:00
= 0 No ....
PE = 1 Si hay vuelo a Peoria a las 10:00
= 0 No ....
PE = 1 Si hay vuelo a Peoria a las 12:00
= 0 No ....

$$\begin{aligned} \text{MAX} \quad & 10\,AT_8 + 9\,AT_{10} + 8\,AT_{12} + \\ & 11\,LA_8 + 10.5\,LA_{10} + 9.5\,LA_{12} + \\ & 17\,NY_8 + 16\,NY_{10} + 15\,NY_{12} + \\ & 8.4\,PE_8 + 2.5\,PE_{10} - 1\,PE_{12} \end{aligned}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} & AT_8 + AT_{10} + AT_{12} = 1 \\ & LA_8 + LA_{10} + LA_{12} = 1 \\ & NY_8 + NY_{10} + NY_{12} = 1 \\ & PE_8 + PE_{10} + PE_{12} = 1 \\ & AT_8 + LA_8 + NY_8 + PE_8 \le 2 \\ & AT_{10} + LA_{10} + NY_{10} + PE_{10} \le 2 \\ & AT_{12} + LA_{12} + NY_{12} + PE_{12} \le 2 \end{aligned}$$

Resultados:
$AT_8 = 1$
$LA_{10} = 1$
$NY_{10} = 1$
$PE_8 = 1$
F.O: 44.9 (MIL)

3.40
Planteamiento:
MIN 2X11 + 3X12 + 5X13 +
3X21 + 1X22 + 4X23

Sujeto a
X11 + X21 = 10000
X12 + X22 = 8000
X13 + X23 = 15000
X11 + X12 + X13 <= 20000
X21 + X22 + X23 <= 15000
END

Resultados:
X11 = 10000
X12 = 0
X13 = 8000
X21 = 0
X22 = 8000
X23 = 7000

3.41
Planteamiento
MIN 50 F + 16 P1 + 16 P2 + 16 P3 + 16 P4 + 16 P5

SUBJECT TO

$$\begin{aligned} & F + P1 \ge 10 \\ & F + P1 + P2 \ge 12 \\ & 0.5F + P1 + P2 + P3 \ge 14 \\ & 0.5F + P1 + P2 + P3 + P4 \ge= 16 \\ & F + P2 + P3 + P4 + P5 \ge 18 \\ & F + P3 + P4 + P5 \ge 17 \\ & F + P4 + P5 \ge 15 \\ & F + P5 \ge 10 \end{aligned}$$

$F \le 12$
$4\,P1 + 4\,P2 + 4\,P3 + 4\,P4 + 4\,P5 \le 56$
$4(P1 + P2 + P3 + P4 + P5) \le 0.5(10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 17 + 15 + 10)$

Resultados
F = 10
P2 = 2
P3 = 7
P4 = 2
P5 = 3
F.O: $724.00

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se presentan algunas respuestas a los problemas para resolver.

4.1
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 5;\ Z^* = 40$

4.2
$X_1^* = 2;\ X_2^* = 4;\ Z^* = 30$

4.3
$X_1^* = 1;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 1;\ X_4^* = 0;\ X_5^* = 0;\ W^* = 12$

4.4

$X_1^* = 1;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 1;\ X_4^* = 0;\ X_5^* = 0;\ W^* = 12$

4.5
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 1;\ Z^* = 4$

4.6
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 0;\ W_1^* = 0;\ W_2^* = 1;\ Z^* = -4$

4.7
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 7;\ X_3^* = 8;\ Z^* = 37$

4.8
$X_1^* = 2;\ X_2^* = 4;\ Z^* = 58$

4.9
$X_1^* = 1;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 3;\ X_4^* = 1;\ Z^* = 11$

4.10
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 2;\ X_3^* = 0;\ X_4^* = 0;\ Z^* = 6$

4.11
$X_1^* = 4;\ X_2^* = 2;\ Z^* = 340$

4.12
$X_1^* = 7;\ X_2^* = 3;\ Z^* = 130$

4.13
$X_1^* = 30;\ X_2^* = 0;\ W^* = 60$

4.14
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 1;\ Z^* = 3$

4.15
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 2;\ X_3^* = 0;\ Z^* = 100$

4.16
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 2;\ X_3^* = 2;\ Z^* = 70$

4.17
$X_1^* = 1;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 0;\ X_4^* = 0;\ X_5^* = 0;\ X_6^* = 0;$
$X_7^* = 0;\ X_8^* = 0;\ X_9^* = 0;\ X_{10}^* = 0;\ X_{11}^* = 0;\ X_{12}^* = 1;\ W^* = 2$

4.18
$X_1^* = 2;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 0;\ Z^* = 18$

4.19
$X_1^* = 1;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 1;\ Z^* = 8$

4.20

$X_1^* = 1;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 1;\ X_4^* = 0;\ W^* = 2$

4.21
$X_{AD}^* = 200;\ X_{AE}^* = 50;\ X_{AF}^* = 50;\ X_{BE}^* = 150;$
$X_{CF}^* = 250;\ W^* = 3200$

$X_{AF}^* = 25;\ X_{BE}^* = 30;\ X_{BF}^* = 10;\ X_{CD}^* = 30;\ W^* = 230$

4.23
$X_{AE}^* = 35;\ X_{BD}^* = 30;\ X_{BE}^* = 5;\ X_{BF}^* = 25;$
$X_{CE}^* = 5;\ X_{CG}^* = 20;\ W^* = 3100$

4.24
$X_{AD}^* = 20;\ X_{AE}^* = 5;\ X_{AF}^* = 15;\ X_{BE}^* = 20;$
$X_{BG}^* = 5;\ X_{CG}^* = 35;\ W^* = 415$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.25

$X^*_{AE} = 30;\ X^*_{BE} = 15;\ X^*_{BH} = 25;\ X^*_{CE} = 5;\ X^*_{CI} = 45;$
$X^*_{DE} = 15;\ X^*_{DF} = 15;\ X^*_{DG} = 30;\ W^* = 585$

4.26

$X^*_{AD} = 20;\ X^*_{BD} = 5;\ X^*_{BE} = 15;\ X^*_{BG} = 10;\ X^*_{CF} = 10;$
$X^*_{CG} = 6;\ X^*_{CH} = 24;\ W^* = 185$

4.27

$X^*_{AI} = 100;\ X^*_{BH} = 40;\ X^*_{BJ} = 160;\ X^*_{CE} = 150;$
$X^*_{CH} = 80;\ X^*_{CI} = 70;\ X^*_{DF} = 175;\ X^*_{DG} = 225;$
$W^* = 22395$

4.28

$X^*_{AE} = 30;\ X^*_{AG} = 45;\ X^*_{BF} = 15;\ X^*_{BI} = 70;$
$X^*_{CH} = 55;\ X^*_{DF} = 25;\ X^*_{DG} = 5;\ X^*_{DH} = 5;\ W^* = 3100$

4.29

$X^*_{AG} = 10;\ X^*_{BF} = 14;\ X^*_{BG} = 6;\ X^*_{CD} = 12;\ X^*_{CE} = 18;$
$W^* = 190$

4.30

$X^*_{AF} = 15;\ X^*_{BD} = 10;\ X^*_{BF} = 10;\ X^*_{CE} = 20;\ X^*_{CF} = 2;$
$X^*_{CG} = 1;\ W^* = 179$

4.31

$X^*_{AF} = 200;\ X^*_{AH} = 30;\ X^*_{BH} = 350;\ X^*_{CG} = 300;$
$X^*_{CH} = 20;\ X^*_{DE} = 100;\ W^* = 32140$

4.32

$X^*_{AD} = 20;\ X^*_{BD} = 5;\ X^*_{BF} = 25;\ X^*_{CE} = 38;\ X^*_{CF} = 2;$
$W^* = 2874$

4.33

$X^*_{AD} = 350;\ X^*_{AE} = 150;\ X^*_{BD} = 100;\ X^*_{BF} = 200;$
$X^*_{BG} = 300;\ X^*_{CE} = 400;\ W^* = 77850$

4.34

$X^*_{AD} = 80;\ X^*_{AG} = 70;\ X^*_{BE} = 90;\ X^*_{BG} = 20;$
$X^*_{CF} = 100;\ X^*_{CG} = 20;\ W^* = 12650$

4.35

$X^*_{AD} = 20;\ X^*_{AG} = 13;\ X^*_{BF} = 1;\ X^*_{BG} = 27;$
$X^*_{CE} = 30;\ X^*_{CF} = 9;\ W^* = 1098$

4.36

$X^*_{AG} = 200;\ X^*_{AH} = 100;\ X^*_{BF} = 400;\ X^*_{CF} = 50;$
$X^*_{CH} = 30;\ X^*_{CI} = 420;\ X^*_{DE} = 350;\ X^*_{DH} = 250;$
$W^* = 64710$

4.37

$X^*_{AE} = 10;\ X^*_{AI} = 15;\ X^*_{BF} = 35;\ X^*_{CG} = 23;\ X^*_{CH} = 22;$
$X^*_{DF} = 5;\ X^*_{DG} = 27;\ X^*_{DI} = 23;\ W^* = 6109$

4.38

$X^*_{AE} = 10;\ X^*_{AG} = 15;\ X^*_{BH} = 35;\ X^*_{CF} = 20;$
$X^*_{CG} = 15;\ X^*_{CH} = 5;\ X^*_{CI} = 2;\ X^*_{DI} = 48;\ W^* = 513$

4.39

$X^*_{1B} = 3;\ X^*_{2A} = 3;\ X^*_{3D} = 5;\ X^*_{4C} = 4;\ W^* = 15$

4.40

$X^*_{1B} = 61;\ X^*_{2C} = 62;\ X^*_{3D} = 63;\ X^*_{4E} = 87;$
$X^*_{5F} = 50;\ X^*_{6A} = 36;\ W^* = 359$

4.41

$X^*_{1F} = 6;\ X^*_{2B} = 4;\ X^*_{3C} = 29;\ X^*_{4E} = 10;\ X^*_{5D} = 5$
$X^*_{6H} = 6;\ X^*_{7A} = 55;\ X^*_{8G} = 0;\ W^* = 115$

4.42

$X^*_{1B} = 2;\ X^*_{2D} = 0;\ X^*_{3A} = 0;\ X^*_{4C} = 0;\ W^* = 2$

4.43

$X^*_{1A} = 2;\ X^*_{2C} = 5;\ X^*_{3B} = 6;\ X^*_{4D} = 2;\ W^* = 15$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

4.44

$X_{1C}^{*}=9;\ X_{2D}^{*}=4;\ X_{3A}^{*}=2;\ X_{4B}^{*}=2;\ W^{*}=17$

4.46

$X_{1A}^{*}=2;\ X_{2D}^{*}=2;\ X_{3G}^{*}=1;\ X_{4E}^{*}=2;\ X_{5C}^{*}=2;$
$X_{6B}^{*}=2;\ X_{7F}^{*}=2;\ W^{*}=13$

4.47

$X_{1E}^{*}=60;\ X_{2B}^{*}=120;\ X_{3C}^{*}=140;\ X_{4A}^{*}=50;$
$X_{5D}^{*}=75;\ W^{*}=445$

4.48

$X_{1A}^{*}=8;\ X_{2C}^{*}=15;\ X_{3B}^{*}=14;\ X_{4D}^{*}=10;\ W^{*}=47$

4.49

$X_{1D}^{*}=3;\ X_{2C}^{*}=2;\ X_{3B}^{*}=4;\ X_{4A}^{*}=2;\ W^{*}=11$

4.50

$X_{1D}^{*}=14;\ X_{2E}^{*}=11;\ X_{3A}^{*}=10;\ X_{4B}^{*}=12;$
$X_{5C}^{*}=11;\ X_{6F}^{*}=14;\ W^{*}=72$

4.51

$X_{1D}^{*}=1;\ X_{2A}^{*}=2;\ X_{3B}^{*}=2;\ X_{4E}^{*}=1;\ X_{5C}^{*}=5;$
$W^{*}=11$

4.52

$X_{1E}^{*}=1;\ X_{2D}^{*}=5;\ X_{3B}^{*}=3;\ X_{4C}^{*}=2;\ X_{5A}^{*}=4;$
$W^{*}=15$

4.53

$X_{1B}^{*}=3;\ X_{2A}^{*}=1;\ X_{3D}^{*}=3;\ X_{4C}^{*}=1;\ W^{*}=8$

4.54

$X_{1D}^{*}=2;\ X_{2C}^{*}=2;\ X_{3A}^{*}=9;\ X_{4B}^{*}=3;\ W^{*}=16$

4.55

$X_{1C}^{*}=25;\ X_{2D}^{*}=25;\ X_{3B}^{*}=14;\ X_{4A}^{*}=24;\ W^{*}=88$

4.56

$X_{1A}^{*}=11;\ X_{2C}^{*}=13;\ X_{3D}^{*}=13;\ X_{4B}^{*}=14;\ W^{*}=51$

4.57

$X_{1D}^{*}=60;\ X_{2B}^{*}=140;\ X_{3A}^{*}=60;\ X_{4C}^{*}=80;$
$W^{*}=340$

4.58

$X_{1A}^{*}=15;\ X_{2B}^{*}=15;\ X_{3C}^{*}=30;\ X_{4D}^{*}=55;\ W^{*}=115$

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

A continuación se presentan algunas respuestas a los problemas para resolver.

5.1
La asignación por el método de la esquina noroeste se muestra en la Tabla 5.7 y el costo inicial es de 65'500 + 500M. Después de cuatro iteraciones se llega a la solución óptima de $60'000 con el siguiente plan de asignación: de las plantas mandar toda su capacidad al almacén 1 y de este almacén surtir a las cuatro concesionarias.

5.2
Con el método MAV se llega en 1 iteración, con el del método noroeste en 3 y con el método del costo mínimo en 2.

5.3
a) Costo de $15'650

	Veracruz	Ciudad de México	Cuernavaca	Tlaxcala	Oferta
Puebla	200	250	100		550
Satélite			300	350	650
Nodo ficticio				200	200
Demanda	200	250	400	550	

b) solución óptima $14450

	Veracruz	Ciudad de México	Cuernavaca	Tlaxcala	Oferta
Puebla	200	250	100		550
Satélite			100	550	650
Nodo ficticio			200		200
Demanda	200	250	400	550	

5.4
La solución generada por MAV es la solución óptima. Si creamos la solución inicial con el método de la esquina noroeste tenemos que hacer una iteración más para llegar a la solución óptima.

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.5
Tenemos que multiplicar $0.1/ton*km por cada uno de las distancias de la tabla para que nos dé como resultado $/ton. La solución inicial por el método de la esquina noroestes nos da un costo de $8'765

	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Oferta
Plantación 1	400	50		450
Plantación 2		400		400
Plantación 3		75	225	300
Demanda	400	525	225	

Después de dos iteraciones se llega al siguiente plan de distribución

	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Oferta
Plantación 1	400		50	450
Plantación 2		225	175	400
Plantación 3		300		300
Demanda	400	525	225	

El costo de este plan de distribución es de $4'977.5. Los máximos beneficios son 450(9.5) + 6.5(400) + 5(300) – 4977.5 = **$3'397.5**

5.6
El costo de distribución óptimo es $6'115. Los beneficios son 450(9.5) + 6.5(400) + 5(300) – 6'115 = **$2'260**. No le conviene, las ganancias son menores que en el problema 5.5.

5.7
En este caso los orígenes y destinos son los periodos (P)rimavera, (V)erano, (O)toño e (I)nvierno. La oferta es la capacidad de producción en cada uno de los periodos y la demanda es el pronóstico hecho por el depto. de mercadotecnia. Existe un costo unitario de producción para cada periodo y un costo de almacenaje de $10. La tabla inicial es:

	P	V	O	I	Oferta
P	80	90	100	110	30'000
V	M	85	95	105	25'000
O	M	M	82	92	30'000
I	M	M	M	86	25'000
Demanda	25'000 – 10'000	40'000	30'000	15'000+10'000	

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

Por ejemplo, en primavera se van a producir 30'000 unidades si las consumimos en el mismo periodo nos cuentan $80, si consumimos $20'000 unidades en primavera y 10'000 en veranos, éstas nos constarán $80 más $10 pesos por almacenarlas un periodo. El costo de M significa que no podemos producir para periodos anteriores.

	P	V	O	I	Oferta
P	15'000	15'000			30'000
V		25'000	0	0	25'000
O			30'000		30'000
I				25'000	25'000
Demanda	15'000	40'000	30'000	25'000	

5.8

La solución inicial generada por MAV

La costo del plan de producción es $9'285'000, la solución óptima es la generada por MAV. Por lo tanto la utilidad es 120(15'000)+140(40'000)+125(30'000)+105(25000)-9'285'000= $4'490'000

5.9

*a)*Min 400xp1p2 + 400xp2p1 + 400xp1c + 900xp2c + 900xp1w1 + 100xcw2 + 200xw2w1 + 900w1w2

```
Subject to
   xp1w1 + xp1c + + xp1p2 – xp2p1 = 50
   xp2p1 + xp2c – xp1p2 = 40
   xcw2 – xp1c – xp2c = 0
   xw1w2 – xw2w1 – xp1w1 = -45
   xw2w1 – xw1w2 – xcw2 = -45
end
```

*b)*Se deben de agregar una demanda de 10 en el almacén C -- restricción 3 en el problema en a). Sin embargo el problema no tiene solución ya que se debería incrementar la oferta en 10 unidades.

xcw2 – xp1c – xp2c = -10

end

c) al modelo en a) anexar la siguiente restricción **xp1c <= 20**

	P1	P2	c	W1	W2	Oferta
P1	0	400	400	900	M	50 + B
P2	400	0	900	M	M	40+B
C	M	M	0	M	100	B
W1	M	M	M	0	900	B
W2	M	M	M	200	0	B
Demanda	B	B	B	45	45	

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.10
Construimos por MAV la solución inicial
Si B = 90, después de una iteración encontramos la solución óptima con un costo de $ 70'000 y el siguiente plan de distribución

	P1	P2	c	W1	W2	Oferta
P1	50		90	0		140
P2	40	90				130
C					90	90
W1				90		90
W2				45	45	90
Demanda	90	90	90	135	135	

5.11
La solución es:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 80000.00

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
XP1P2	0.000000	700.000000
XP2P1	0.000000	100.000000
XP1C	20.000000	0.000000
XP2C	40.000000	0.000000
XP1W1	30.000000	0.000000
XCW2	60.000000	0.000000
XW2W1	15.000000	0.000000
W1W2	0.000000	900.000000
XW1W2	0.000000	200.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	300.000000
3)	0.000000	0.000000
4)	0.000000	900.000000
5)	0.000000	1200.000000
6)	0.000000	1000.000000
7)	0.000000	200.000000

Si restringimos el número de unidades por la ruta xp1c el costo se incremente en $10'000 ($80'000-$70'000)

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

5.13
Primero la demanda de plantas no es suficiente para satisfacer la demanda. Por lo tanto el plan de distribución tiene un costo de $2'490'000. La demanda de 3 no es atendida y solo se le llevaran 500 unidades a 4

	1	2	3	4	
A	1800	300		500	2600
B		1800			1800
Ficticio			**550**	**1250**	**1800**
Demanda	1800	2100	550	1750	

5.14
No porque el costo aumentaría a $3'960'000

5.15
Costo = $8'000, con el siguiente plan de distribución

	C	D	E	
A		100		100
B	100		100	200
Demanda	100	100	100	

5.16
El costo se mantiene igual ($5'000) mandando 100 unidades de A a E, 200 de B a C y 100 de C a E.

5.17
La oferta no es suficiente para los requerimientos de Vuelo-Mex. De tal manera que el costo mínimo de $8'525'000 se obtiene cuando se compran 110'000 litros a D para abastecer a B; 220'000 litros a E y se abastece A (165'000) y B (55'000); 330'000 litros a F y se abastece a C; y 385'000 a G para abastecer a A(110'000) y C(330'000). No se surten 385'000 litros a B.

5.19
a)

	1	2	3	4	5	6	7	8	Demanda
1	0	M	M	1.5	1.2	M	M	M	450+B
2	M	0	M	1.3	0.6	M	M	M	700+B
3	M	M	0	2	0.7	M	M	M	500+B
4	M	M	M	0	M	1	0.6	0.7	B
5	M	M	M	0.2	0	0.8	0.4	0.9	B
6	M	M	M	M	M	0	0.3	0.8	B
7	M	M	M	M	M	M	0	0.4	B
8	M	M	M	M	M	0.8	M	0	B
Oferta	B	B	B	B	B	550+B	500+B	600+B	

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.

b) Min 1.5P1D4 + 1.2P1D5 + 1.3P2D4 + 0.6P2D5 + 2P3D4 + 0.7P3D5 +

D4C6 + 0.6D4C7 + 0.7D4C8 + 0.2D5D4 + 0.8D5C6 + 0.4D5C7 + 0.9D5C8 +

0.3C6C7 + 0.4C7C8 + 0.8C6C8 + 0.8C8C6

```
      Subject to

    P1D5 + P1D4 = 450
    P2D4 + P2D5 = 700
    P3D4 + P3D5 = 500

    D4C6 + D4C7 + D4C8 - P1D4 - P2D4 - P3D4 = 0
    D5D4 + D5C6 + D5C7 + D5C8 - P1D5 - P2D5 - P3D5 = 0

    C6C7 + C6C8 - D4C6 - D5C6 = - 550
    C7C8 - D4C8 - D5C8 = -500
    C8C6 - D4C8 - D5C8 - C6C8 = - 600

End
```

c) $2430
d) D4C6 + D4C7 + D4C8 - P1D4 - P2D4 - P3D4 = -100
D5D4 + D5C6 + D5C7 + D5C8 - P1D5 - P2D5 - P3D5 = -100

D.R. © 2014 Grupo Editorial Patria S.A. de C.V. Queda prohibida la reproducción con fines comerciales directos e indirectos, la trasmisión total o parcial de los contenidos de este documento en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin la autorización por escrito del editor.